HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Année MDCCIX.

Avec les Memoires de Mathematique & de Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.

MDCCXXXIII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

A PARIS,

Chez
- Gabriel Martin, ruë Saint Jacques, à l'Etoile.
- François Montalant, Quay des Auguſtins.
- Jean-Baptiste Coignard Fils, Imprimeur du Roy & de l'Académie Françoiſe, ruë Saint Jacques, à la Bible d'or.
- Hippolyte-Louis Guerin, ruë Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin.



TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

ã ij

BOTANIQUE.

ALGEBRE.

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

OPTIQUE.

ACOUSTISQUE.

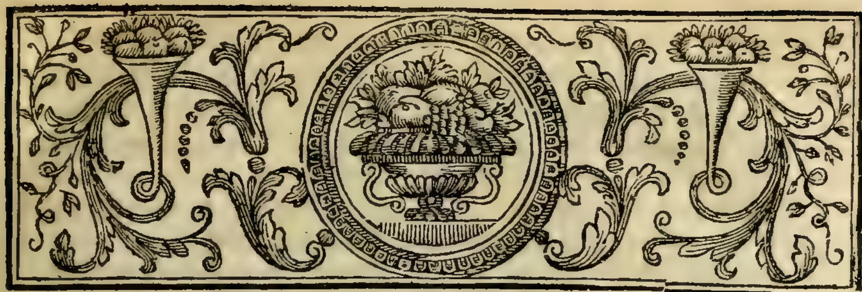
MECHANIQUE.





TABLE
POUR
LES MEMOIRES.

Fin des Tables.



HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCIX.



PHYSIQUE GENERALE.

SUR LA PESANTEUR DE L'ATMOSPHÉRE.



LA pesanteur de l'Atmosphére est si importante en Phisique, qu'on ne la peut trop étudier; on y est même invité par l'esperance du succés, qui semble ne dépendre que de quelques calculs assés faciles. V. les M. p. 176.

M. de la Hire aïant fait à Meudon des experiences trés exactes de la quantité dont la hauteur du Barometre varioit depuis le lieu le plus élevé du Parc jusqu'à la

Riviere qui est à 85$\frac{1}{3}$ Toises au dessous, il en a tiré la hauteur de la colomne d'air qui répondoit alors à une ligne de Mercure, & la contrebalançoit, & il a trouvé qu'elle étoit de prés de 76 pieds, la pesanteur de la colonne entiere de l'Atmosphére étant de 28 pouces de Mercure, à $\frac{1}{2}$ ligne prés. Il s'étoit servi d'un trés bon Barometre double de M. Huguens, qui marque les degrés de la variation dans une plus grande étenduë que le Barometre simple, mais qui aussi demande plus de calcul, parce qu'aprés les experiences faites, il faut le reduire au simple. Il l'y reduisit selon les principes que nous avons expliqués d'aprés lui dans l'Hist. de 1708.*

* p. 3. & suiv.

Il est à propos de remarquer que la hauteur entiere de 85 Toises $\frac{1}{3}$ répondoit à prés de 7 lignes de Mercure, & que les 76 pieds de hauteur d'air qui répondent à 1 ligne de Mercure ont été trouvés, en supposant les 7 hauteurs d'air, dont chacune répond à une ligne de Mercure, égales entr'elles, ce qui n'est pas exactement vrai, car l'inferieure est la moindre parce qu'elle est chargée d'un plus grand poids, & plus condensée, & ainsi de suite; mais M. de la Hire a negligé cette difference. Mrs Cassini & Maraldi * voulant y avoir égard ont mis entre ces hauteurs une progression telle que la 1ere ayant 61 pieds, la 2de en eût 62, la 3me 63 &c. du moins dans l'étenduë d'une demie-lieuë. A ce compte la hauteur moyenne de ces 7 divisions seroit de 64 pieds, ce qui est fort éloigné de prés de 76. Nous ne dissimulons point ces differences, qui peut-être s'accorderont avec le temps.

* V. l'Hist. de 1703. p. 12.

Aux observations de Meudon sur la pesanteur de l'Atmosphére, M. de la Hire en a joint d'autres sur la variation que le chaud & le froid causent à la liqueur du Barometre double, variation trompeuse, & qui, si elle n'étoit bien connuë, pourroit être attribuée au changement de pesanteur de l'air. Il a supposé, comme il est vrai, que le Mercure du Barometre simple ne se dilatoit ni ne se condensoit sensiblement par le chaud ou par le froid, il y a comparé chaque jour pendant trois ans un Baro-

mettre double, & ensuite il a pris les jours les plus differents par rapport au chaud & au froid, & où cependant le Barometre simple étoit à la même hauteur. Il est évident que dans ces jours-là la hauteur du Barometre double auroit dû aussi être la même, si elle ne varioit qu'avec la pesanteur de l'Atmosphére. Mais elle s'est toûjours trouvée differente, & quelquefois de 19 lignes, dont ce Barometre étoit plus élevé dans le chaud. Le hazard a voulu que dans ces trois années d'observation il n'ait pas fait de grands froids, mais seulement de grandes chaleurs. D'ailleurs il ne s'y est pas trouvé des jours du plus grand chaud & du plus grand froid, où le Barometre simple ait été à la même hauteur; ainsi les 19 lignes ne sont la difference que d'un grand chaud à une constitution d'air temperée, & M. de la Hire n'a pû voir la plus grande variation dont le Barometre double soit susceptible à cet égard. Elle doit beaucoup passer 19 lignes, ce qui certainement n'est pas à compter pour rien. Cependant la liqueur de ce Barometre a été choisie pour la moins capable de rarefaction que l'on pût trouver.

SUR DES OBSERVATIONS DU BAROMETRE FAITES EN DES LIEUX ELOIGNÉS.

CE que fait le Barometre à l'égard d'un certain lieu, il le peut faire à l'égard de toute la Terre; c'est-à-dire que si pour un lieu particulier il marque les variations qui arrivent à la pesanteur de l'Atmosphére, il peut marquer les differences qui sont à cet égard entre les differentes parties de l'Atmosphére entiere, ou même les differences qui se trouvent entre les variations de ces differentes parties. Par là il devient la mesure universelle du poids & de l'action de toute cette grande envelope d'air répan- V. les M. p. 233.

duë autour du globe terreſtre, & ſi l'on en découvre jamais la nature, ce ſera par le ſecours du Barometre. Dans cette vûë, M. Maraldi a comparé enſemble un aſſés grand nombre d'obſervations faites ſur cet Inſtrument en des lieux éloignés les uns des autres. Nous en rapporterons ſeulement ici les réſultats, & quelques concluſions qu'on en peut tirer juſqu'à preſent. Je dis *juſqu'à préſent*, car peut-être faudra-t-il quelque jour ou modifier celles-cy, ou même en tirer de contraires.

1°. Pendant 3. années entieres il s'eſt trouvé aſſés de conformité entre les variations du Barometre à Paris & à Gennes, de ſorte qu'en ces deux Villes il a trés-ſouvent monté ou deſcendu les mêmes jours, & cela, quoique les Vents y fuſſent preſque toûjours differents, & quelquefois oppoſés, & la conſtitution de l'air très differente à l'égard du chaud & du froid.

2°. Cette conformité eſt égale, ſoit que le Barometre varie ſubitement & promptement, comme lorſqu'il monte ou deſcend de 10 lignes ou d'1 pouce en un jour (il s'agit ici du Barometre ſimple) ſoit lorſqu'il varie plus lentement, comme il fait d'ordinaire. Mais cette même conformité n'eſt pas ſi grande quand le Barometre eſt vers l'une ou l'autre extremité de l'étenduë de ſa variation, que quand il eſt vers le milieu.

Par là ſe confirme un principe établi par Mrs Caſſini & Maraldi pour une nouvelle meſure des Montagnes *, que l'on peut ſuppoſer que dans une aſſés grande étenduë de Païs la variation du Barometre eſt la même. Mais on voit en même temps que pour la pratique de cette Methode, il faut préferer les obſervations du Barometre faites en des temps où il eſt à une hauteur moyenne.

* V. l'Hiſt. de 1703. p. 11. & ſuiv.

3°. Comme le Barometre a communément une plus grande étenduë de variation en hiver, auſſi en a-t-il une plus grande dans les Païs plus Septentrionaux. Elle ne va guere entre les Tropiques qu'à 5. ou 6 lignes, & ici elle eſt de 2 pouces; à Gennes elle eſt de 3 lignes moindre qu'à Paris, parce que Paris eſt plus ſeptentrional.

4°. Cependant cette même étenduë de variation ſe trouve un peu plus petite à Zuric qu'à Gennes, qui eſt beaucoup plus meridionale. Mais M. Maraldi fait remarquer que Zuric eſt beaucoup plus élevé ſur le niveau de la Mer que Gennes, & que par les obſervations du P. Laval ſur le S. Pilon *, plus élevé que Marſeille de 480 Toiſes, & plus ſeptentrional de 2′, la variation du Barometre eſt moindre auſſi qu'à Marſeille. Si l'on veut donc trouver ſon compte à la progreſſion de la variation du Barometre toûjours croiſſante depuis l'Equateur, il faut ne comparer enſemble que des lieux à peu près également élevés ſur le niveau de la Mer. L'Atmoſphére eſt plus exempte de changements & plus tranquille, tant entre les Tropiques où le Soleil agit preſque toujours également, qu'à une certaine élevation, où le Soleil agit auſſi ſur une matiere plus égale, & moins mêlée des vapeurs & des exhalaiſons de la Terre.

* V. l'Hiſt. de 1708. p. 105. & ſuiv.

5°. On a fait à Malaca, qui n'a que 2 degrés de latitude ſeptentrionale, les mêmes experiences * qui ont fait conclure ici à M. Mariotte, & à tous les autres Phiſiciens, que l'air ſe dilate préciſément ſelon qu'il eſt chargé d'un moindre poids, & on a trouvé qu'il ſe dilatoit moins que ſelon cette portion. Il vient d'abord dans l'eſprit que l'air de Malaca étant déja très-dilaté par la grande chaleur du climat, peut n'être plus ſi ſuceptible de dilatation. M. Maraldi ne diſconvient pas que cette cauſe n'ait part au phenomene, mais il prétend qu'elle n'eſt pas la ſeule; car aïant fait les experiences dont il s'agit ici avec de l'air dilaté par la chaleur de l'eau boüillante, & par conſequent plus dilaté que celui de Malaca, il a trouvé que les dilatations de cet air s'éloignoient moins de la proportion des poids que celles de l'air de Malaca, ou, ce qui revient au même, qu'il ſe dilatoit d'avantage. Ce n'eſt donc pas la ſeule chaleur du climat qui rend l'air de Malaca moins capable de dilatation, il faut outre cela que de luy-même il le ſoit moins, & à ce compte la maſſe de l'Atmoſphére ſera éterogene ſelon les differens climats,

* V l'Hiſt. de 1705. p. 12. & ſuiv.

& il faudra être fort reservé en cette matiere à tirer des consequences d'un climat à un autre. On peut dire généralement qu'en fait de Phisique la présomption doit être toûjours grande pour la diversité.

SUR LA MATIERE DU FEU.

V. les M. p. 400. * p. 50.

L'Hist. de 1700 * a dit en parlant de la Chaux : *On n'imagine point que ses principes actifs puissent être autre chose que des particules ignées, que la calcination a fait entrer dans la Chaux. Il est vrai que ces particules ignees fixées & devenuës immobiles dans les pores d'un Corps, revoltent un peu l'esprit. Mais enfin le Regule d'Antimoine calciné au Miroir ardent augmente de poids, & l'on ne peut soupçonner nulle autre matiere de s'y être melée, que celle qui compose les rayons du Soleil. Il faut convenir que cette hipothése est presque également difficile à recevoir, & à rejetter.*

M. Lémery le fils croit qu'on peut sortir de cette incertitude, & se declare absolument pour l'hipothêse. On a imaginé jusqu'ici que l'essence de la matiere du Feu consistoit uniquement dans une grande subtilité jointe à une extrême agitation, & selon cette idée il est impossible de concevoir que quand elle est enfermée dans les pores de la Chaux, ou du Regule d'Antimoine, ou enfin des autres mineraux qui augmentent de poids par la calcination, elle ne perde pas tout son mouvement, & ne cesse pas d'être matiere de Feu. Mais. M. L'émery ajoute à sa subtilité, & son agitation une figure particuliere, de sorte que ni une autre matiere qui auroit autant ou plus de subtilité & d'agitation ne seroit matiere de Feu, ni celle-là ne cesse de l'être, ou du moins trés disposée à le redevenir, quoiqu'elle ait perdu une partie de son mouvement. Il est vrai qu'elle ne doit pas le perdre tout à fait, & pour lui en conserver ce qui lui est necessaire,

on peut concevoir & qu'elle agit toûjours contre les petites cavités des Corps où elle eſt empriſonnée, & qu'une matiere beaucoup plus ſubtile & plus agitée, qui remplit tous les vuides de l'Univers, & ne trouve point de pores ſi étroits qui ne lui laiſſent un libre paſſage, coule inceſſamment dans les lieux où elle eſt enfermée, & entretient ſon mouvement. Elle n'en a pas aſſés pour forcer ſes priſons, mais elle eſt toûjours en état de joindre ſon action à celle de quelque agent exterieur qui viendra la ſecourir. C'eſt ainſi que dés que l'eau vient diſſoudre la Chaux vive & en deſunir les parties, la matiere de Feu qu'elle renfermoit s'échape de toutes parts, & cauſe une violente effervéſcence.

Si l'on demande pourquoi cette matiere que la calcination a fait entrer par les pores d'un corps, n'en ſort pas par les mêmes pores aprés la calcination, M. Lémery répond que l'action du Feu rarefiant tous les corps, comme on le ſçait par experience, elle rend tant qu'elle dure leurs pores beaucoup plus grands, & que quand elle vient à ceſſer, elle leur permet de ſe rétrecir, & par conſequent d'empriſonner dans les petites cavités ce qui y avoit penetré.

Il n'y a rien d'unique dans la Nature, & ſi une certaine mechanique eſt conſtante en certaines occaſions, elle doit ſe retrouver en d'autres qui y auront rapport. Puiſque l'on admet une fois que la matiere du Feu, peut, ſans ceſſer d'être ce qu'elle étoit, s'enfermer dans les cavités des corps calcinés, on ſera en droit d'imaginer qu'elle ait été pareillement enfermée dans les cavités de pluſieurs autres corps, dés que l'on pourra croire qu'elle en ſorte, & en un mot on ſuppoſera legitimement que c'eſt elle qui rend inflammables tous les corps qui le ſont, & qu'elle s'en échape ſous la forme de flame, ſi tôt qu'elle eſt dégagée de ſes envelopes, pourvû que d'ailleurs elle ſoit aſſés abondante. Cette ſuite du Siſtême de M. Lémery l'étend infiniment,

A ce compte, la matiere du Feu & celle de l'eau, quoi-

que si opposées, ont un rapport essentiel. Elles sont l'une & l'autre cachées dans une infinité de Mixtes, & même souvent en grande abondance, sans y découvrir cependant aucune de leurs proprietés les plus sensibles, & sans se declarer pour ce qu'elles sont, à moins que les agents exterieurs ne leur aident à se montrer.

Ceux de tous les corps où la matiere du Feu est le plus sensiblement renfermée, ce sont les Phosphores; on n'a qu'à les exposer au jour, ils en prennent aussitôt une nouvelle qui met l'ancienne en action; ce sont des éponges de lumiere, aussi la rendent-ils avec la même facilité qu'ils l'ont prise. Il faut concevoir tous les corps inflammables comme des Phosphores, mais moins sensibles, & qui ne rendent pas si facilement la matiere du feu qu'ils contiennent.

L'air sera aussi un grand Phosphore, tout impregné de cette matiere, qui n'attend que l'action du Soleil, dont elle tire sa source. Mais nous ne voulons pas pousser plus loin des idées qui appartiendroient à un Sistéme général, nous les laissons au Memoire de M. Lémery, aussi-bien que l'éclaircissement des difficultés que tout Sistême général ne peut manquer de produire.

DIVERSES OBSERVATIONS

DE PHISIQUE GENERALE.

I.

M. Jaugeon ayant été curieux de savoir ce que c'est que le Chagrin qui nous vient de Turquie, s'en informa à M. de Feriol Ambassadeur à Constantinople, dont il reçut toute l'instruction qu'il souhaitoit. Il n'y a point d'animal de ce nom, comme quelques-uns l'ont crû. On fait le Chagrin avec la peau de la croupe des Chevaux & des Mulets, qu'on passe bien, & qu'on rend la plus mince qu'il est possible, on la tient sous la presse pendant un certain

certain tems, aprés y avoir mis de la graine de Moutarde la plus fine. Quand la graine prend bien, les peaux sont belles, sinon, il y reste des endroits unis qu'on appelle des *Miroirs*, & qui sont un grand défaut. On fait les plus beaux Chagrins à Constantinople, & en quelques endroits de Syrie.

II.

Il a paru étonnant que le Froid de l'Hiver de 1709, qui fut si extraordinaire, & si rigoureux, ait été pendant plusieurs jours à Paris par un vent de Sud. Pour en rendre raison, M. de la Hire a dit que les Montagnes d'Auvergne, qui sont au Sud de Paris, étoient alors toutes couvertes de nége, & M. Homberg, qu'un vent de Nord trés froid qui venoit de loin, & s'étendoit loin, ayant précedé, le vent de Sud ne fut qu'un reflux du même air que le Nord avoit poussé, & qui ne s'étoit échauffé en aucun païs. Ces deux causes peuvent fort bien s'être jointes.

III.

Il y eut encore une autre merveille pendant ce même Hiver. Malgré l'extrême violence du froid, la Seine ne se gela point entierement à Paris, & le milieu de son courant fut toûjours libre, horsmis qu'il y flottoit de gros glaçons. Cependant on a vû dans des hivers moins rigoureux la Seine si bien prise, que des Charettes y pouvoient passer. M. Hombert croit que du moins dans notre Climat de grosses Rivieres comme celle là ne doivent point geler d'elles-mêmes, si ce n'est vers les bords, parce que leur courant est toûjours trop fort vers le milieu, qu'ainsi si l'on ne cassoit point la glace des bords, ce qu'on ne manque jamais de faire pour differentes raisons, le milieu couleroit toûjours à l'ordinaire, & ne charrieroit point de glaçons, supposé d'ailleurs qu'il ne tombât point de petites rivieres dans la grosse, mais que comme il y en tombe, les glaçons qu'elle charrie dans son milieu viennent pour la plus grande partie des petites rivieres, qui ont gelé facilement, & dont on a cassé la glace, que ces glaçons arrêtez ou par un pont, ou par un coude de la

riviere, ou par quelque obstacle que ce soit, se prennent & se colent les uns aux autres par le froid, & forment ensuite une espece de croûte qui couvre toute la surface de la riviere, & qu'enfin comme le froid de 1709. fut & trés subit & trés âpre dès son premier commencement, les petites rivieres qui tombent dans la Seine au dessus de Paris gelerent tout à coup, & entierement, de sorte que leurs glaçons qui se seroient pris sur la superficie de la Seine, ne purent y être portez, du moins en assez grande quantité. Il est assez remarquable, que la violence même du froid ait été en partie cause de ce que la Seine ne gela point.

On a sû que dans ce même hiver la glace du Port de Copenhague avoit été épaisse de 27 pouces, dans les endroits même où elle n'étoit point accumulée. Ce fait est d'autant plus digne d'attention, que dans la grande gelée de 1683 la Societé Roïale ayant fait mesurer l'épaisseur de la glace de la Tamise, quand on alloit dessus en carosse, elle ne se trouva que de 11 pouces.

NOus renvoyons entierement aux Memoires.

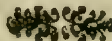
V. les M p. 1. Le Journal de M. de la Hire pour l'année 1708.

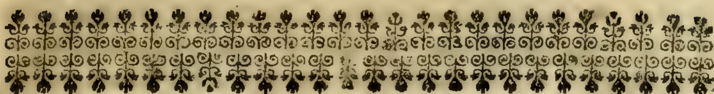
V. les M. p. 5. Ce qu'il a donné sur les Pluyes & les Vents observez à Pontbriand.

V. les M. p. 8. Et sur les Pluyes & les Vents observez à Lyon.

V. les M. p. 20. Ce que M. Maraldi a donné sur les Observations du Barometre faites à Zuric.

V. les M. p. 131. Et le Memoire de M. Saurin sur la Pesanteur.





ANATOMIE.

SUR LE DÉLIRE MELANCOLIQUE.

SI ce n'étoit un certain ſentiment commun à tous les Hommes, qui leur perſuade que leur Tête ou leur Cerveau eſt le ſiége de leurs penſées, il y auroit autant de lieu de croire que c'eſt le Poumon, ou le Foye, ou tel autre Viſcere qu'on voudroit, car ſi leur méchanique ne paroît avoir aucun rapport à la penſée, celle du Cerveau n'y en a pas davantage. Il faudroit une partie où vinſſent aboutir tous les mouvemens de ſenſations, & telle que M. Deſcartes avoit imaginé la Glande pineale, mais il n'eſt que trop vrai que c'étoit une pure imagination, & que même nulle autre partie n'eſt capable des fonctions qu'il lui attribuoit. Ces traces qu'on ſuppoſe ſi volontiers, & dont les Philoſophes modernes ont tant parlé qu'elles commencent à devenir familieres dans le diſcours commun, on ne ſait pas trop bien où les mettre, & on ne voit point de partie dans le Cerveau qui ſoit bien propre ni à les recevoir, ni à les garder. Non ſeulement nous ne connoiſſons pas notre Ame, ni la maniere dont elle agit ſur des Organes materiels, mais dans ces Organes mêmes nous ne pouvons appercevoir aucune diſpoſition à l'être.

Cependant la difficulté du ſujet n'exclut pas les hipotheſes, elle doit ſeulement les faire traiter avec moins de rigueur. M. Vieuſſens le fils ayant deſſein d'expliquer le Délire mélancolique, a ſuppoſé que le Centre ovale étoit le ſiége des fonctions de l'Eſprit. Selon les découvertes ou le ſiſtême de M. Vieuſſens le Pere, qui a pouſſé fort

loin les recherches anatomiques, le Centre ovale eſt un tiſſu de petits vaiſſeaux trés déliez, qui communiquent tous les uns avec les autres par une infinité d'autres petits vaiſſeaux encore infiniment plus déliez, que produiſent tous les points de leur ſurface exterieure. C'eſt dans les premiers de ces petits vaiſſeaux que le ſang arteriel ſe ſubtiliſe au point de devenir Eſprit animal, & il coule dans les ſeconds ſous la forme d'Eſprit. Au dedans de ce nombre prodigieux de tuyaux preſque abſolument imperceptibles ſe font tous les mouvemens auſquels répondent des idées, & les impreſſions que ces mouvemens y laiſſent ſont les traces qui rappellent les idées qu'on a déja euës. Il ne faut pas oublier que le Centre ovale ſe trouve placé à l'origine des Nerfs, ce qui favoriſe beaucoup la fonction qu'on lui donne ici.

Si cette méchanique eſt une fois admiſe, il eſt aiſé d'imaginer que la ſanté de l'Eſprit, en ce qu'elle a de materiel, dépend de la régularité, de l'égalité, de la liberté du cours des eſprits dans ces petits canaux. S'il y en a la plûpart d'affaiſſez, comme pendant le ſommeil, les eſprits qui coulent dans ceux qui reſtent fortuitement ouverts, réveillent au hazard des idées entre leſquelles il n'y a le plus ſouvent aucune liaiſon, & que l'Ame ne laiſſe pas d'aſſembler, faute d'en avoir en même tems d'autres qui lui en faſſent voir l'incompatibilité. Si au contraire tous les petits tuyaux ſont ouverts, & que les eſprits s'y portent en trop grande abondance, & avec une trop grande rapidité, il ſe réveille à la fois une foule d'idées trés vives, que l'Ame n'a pas le tems de diſtinguer ni de comparer, & c'eſt là la Freneſie. S'il y a ſeulement dans quelques petits tuyaux une obſtruction telle que les eſprits ceſſent d'y couler, les idées qui y étoient attachées ſont abſolument perduës pour l'Ame, & elle n'en peut plus faire aucun uſage dans ſes operations, de ſorte qu'elle portera un jugement inſenſé toutes les fois que ces idées lui auroient été neceſſaires pour en former un raiſonnable; hors delà tous ſes jugemens ſeront ſains. C'eſt là le Délire mélancolique.

M. Vieussens a fait voir combien sa supposition s'accorde avec tout ce qui s'observe dans cette maladie. Puisqu'elle vient d'une obstruction, elle est produite par un sang trop épais & trop lent, aussi n'a-t-on point de fiévre. Ceux qui habitent les païs chauds, & dont le sang est dépoüillé de ses parties les plus subtiles par une trop grande transpiration, ceux qui usent d'alimens trop grossiers, ceux qui ont été frapez de quelque grande & longue crainte, &c. doivent être plus sujets au Délire mélancolique. Nous n'entrerons point dans un plus grand dénombrement, il iroit peut être trop loin ; il n'y a guere de tête si saine où il n'y ait quelque petit tuyau du Centre ovale bien bouché.

SUR LES INCISIONS

FAITES A LA CORNÉE.

LA Chirurgie s'enhardit tous les jours. Nous avions déja parlé dans l'Histoire de 1707 * d'incisions qu'on avoit faites, ou qu'on pouvoit faire à la Cornée. M. Gandolphe, qui avoit déja enrichi cette même Histoire d'un assez grand article *, a fait pratiquer à Dunquerque cette operation sur un Homme, à qui un coup donné sur l'œil avoit causé un grand épanchement de sang dans l'humeur aqueuse. Comme elle en étoit entierement obscurcie, la vûë étoit éteinte dans cet œil, & il ne lui restoit qu'un foible sentiment à une grande lumiere. Du reste il n'y avoit nul autre accident. M. Gandolphe trouva que le sang épanché étoit en trop grande abondance, pour pouvoir être dissipé par des remedes Topiques, & d'ailleurs pour l'être assez promptement, sans quoi il pouvoit par un long séjour obscurcir pour toûjours l'humeur aqueuse. Il se résolut donc à ouvir la Cornée dans l'œil malade, & il y fit faire jusqu'à trois incisions, parce que toute la matiere qu'il falloit tirer n'étoit pas sortie par les deux premieres. Elles furent faites toutes trois en travers, &

* p. 24.

* p. 26. & suiv.

ne causerent point de douleur. On ne mit sur l'Oeil que des Compresses trempées dans un mélange de 4 onces d'eau de Plantin, & de 2 onces d'eau Vulneraire. En 8 jours, à compter depuis la premiere operation, l'Oeil eut repris sa transparence naturelle ; il ne resta aucune cicatrice des incisions. Ce dernier fait est trés remarquable. M. Gandolphe dit qu'il l'a trouvé dans un vieux Livre de Medecine, mais il étoit parfaitement oublié.

On reconnut dans cette cure que les plantes résolutives, telles que le Persil & le Cerfeuil, qui sont excellentes pour résoudre le sang des chairs meurtries, faisoient un mauvais effet à l'œil, qu'elles y causoient des douleurs, & rendoient la vûë trouble.

Quand l'œil fut guéri, on vit que la prunelle demeuroit toûjours fort dilatée, & à tel point que son diametre étoit double de ce qu'il avoit été. Comme elle étoit exactement ronde, on ne pouvoit soupçonner que l'Iris qui la forme eût été blessée par la lancette, & en eût perdu son ressort. Elle l'avoit pourtant perdu du moins pour la plus grande partie, mais par une autre cause ; apparemment c'étoit par le coup qui avoit causé l'épanchement de sang. Cet œil qui a une plus grande prunelle doit être plus commode dans une moindre lumiere, & l'autre au contraire dans une plus grande, & il y a lieu de croire que l'Homme qui les a s'en sert alternativement.

A l'experience & aux faits de M. Gandolphe, M. Littre a joint quelques réflexions.

Il avertit qu'on ne doit pas prendre pour un principe général que les incisions de la Cornée ne laissent point de cicatrices, & M. Gandolphe convient avec lui qu'elles en doivent laisser, quand elles ont été faites sur des yeux affectez de fluxions, d'ulceres, d'inflammations, car alors le tissu & les vaisseaux de la Cornée aïant été extrêmement dilatez, le suc nourricier s'y porte en plus grande abondance, & s'y attache confusément, ce qui forme la cicatrice ; mais il est visible, qu'il peut y avoir d'autres

cas, où cette raiſon ceſſe, tel que celui dont nous avons parlé.

M. Littre veut qu'on faſſe toûjours l'inciſion à la partie inferieure de la Cornée, tant afin que le ſang extravaſé, ou le pus ſortent plus facilement, qu'afin que la cicatrice, s'il y en a une, nuiſe moins à la viſion. Par cette derniere raiſon, l'ouverture doit être auſſi la plus petite qu'il ſoit poſſible.

Il recommande que l'inſtrument dont on ſe ſervira ſoit bien tranchant, & peu pointu, bien tranchant afin que le globe de l'œil ſoit moins ébranlé par le coup, & que les vaiſſeaux d'où le ſang s'eſt épanché ne ſe rouvrent pas, peu pointu, afin que le Chirurgien ſoit moins en péril de piquer l'Iris.

Pour prévenir encore cet accident, il conſeille au Chirurgien de bien aſſujettir le globe de l'œil, avant que d'inciſer, & de lui faire prendre une figure telle que l'Iris ſoit la plus éloignée qu'il ſe pourra de la Cornée.

SUR LES YEUX D'ECREVISSES,

ET SUR QUELQUES PARTICULARITEZ DES ECREVISSES.

CE qu'on appelle Yeux d'Ecreviſſes, ſont de petites pierres blanches, rondes, & ordinairement plates, à qui on a donné ce nom, parce qu'effectivement elles ſe tirent des Ecreviſſes de Riviere, & que quoiqu'elles ne reſſemblent guere à des yeux, elles y reſſemblent encore plus qu'à toute autre partie. V. les M. p. 309.

Les plus habiles Naturaliſtes avoient crû quelles ſe formoient dans le Cerveau des Ecreviſſes, & Vanhelmont a trouvé le premier que c'étoit dans la région de l'Eſtomac, & en même temps il a découvert pluſieurs particularitez trés remarquables de l'hiſtoire naturelle de

ces Animaux. Mais comme il eſt établi qu'on ne ſe fie pas trop à lui, on en avoit douté, ou même on n'y avoit pas fait beaucoup d'attention. Cependant M. Geoffroy le jeune en a verifié une grande partie, & c'eſt ce que nous allons raſſembler ici.

On peut faire un genre des Animaux qui portent leurs os en dehors, au lieu que les autres les portent en dedans, & les Ecreviſſes en ſont une eſpece. Celles de Riviere ſe dépoüillent tous les ans au mois de Juin de ces os dont elles ſont découvertes & armées. Une membrane qui tapiſſe le dedans de toutes leurs écailles, prend leur place aprés qu'elles ſont tombées, & devient en ſe durciſſant & en s'épaiſſiſſant une écaille nouvelle. Dans le tems de cette müë, les Ecreviſſes ſont foibles, languiſſantes, & ne mangent point.

Les Reptiles qui quittent leur ancienne peau ſont un exemple de ce qui arrive aux Ecreviſſes, & enfin il n'eſt pas ſi étonnant qu'un Animal ſe dépoüille d'une envelope exterieure. Mais il l'eſt qu'il puiſſe ſe défaire d'une partie externe, telle que l'Eſtomac, & c'eſt ce que font les Ecreviſſes. Leur ancien Eſtomac s'en va, & apparemment auſſi l'Inteſtin, du moins M. Geoffroy le conjecture, & les membranes exterieures de ces viſceres leurs ſuccedent. Il y a lieu de croire que comme ils ſont uſez, & à demi diſſous, ils achevent de ſe diſſoudre dans les viſceres nouveaux, & ſont la nourriture de l'Animal pendant ſa müë. Le vieil Eſtomac eſt le premier aliment que le nouveau digere.

C'eſt ſeulement dans ce tems-là qu'on trouve les pierres, qu'on appelle Yeux d'Ecreviſſes. Elles commencent à ſe former quand l'ancien Eſtomac ſe détruit, & ſont enſuite envelopées dans le nouveau, où elles diminuënt toûjours de grandeur, juſqu'à ce qu'enfin elles diſparoiſſent. M. Geoffroy croit qu'elles contribuent auſſi à nourrir l'Animal pendant ſa maladie. Quelle prodigieuſe diverſité de deſſeins dans les ouvrages de la Nature ! Qui eût crû qu'il y a un Animal qui ſe nourrit de la ſubſtance de

de ſon propre Eſtomac ? aprés cela, s'il y a quelque choſe d'incroyable en ce genre, il faut que ce ſoit une impoſſibilité bien démontrée.

SUR LA FORMATION
DES COQUILLES

JUſqu'ici les Curieux ont été aſſez touchez des Coquillages, de leur prodigieuſe varieté, de la régularité exacte de leur ſtructure, de la beauté & de la vivacité ſinguliere de leurs couleurs, de la juſteſſe de leurs compartimens, à peine imitable au Pinceau, mais les Phiſiciens ne leur ont pas rendu, pour ainſi dire, aſſez de juſtice, & ont trop negligé de les conſiderer en Phiſiciens, & d'étudier leur Formation. Apparrement ils onr crû que comme les Coquilles, ainſi que les écailles des Ecreviſſes, ſont des os exterieurs pour tous les Animaux qu'elles couvrent, il falloit les regarder comme parties de leurs corps, & comprendre cette merveille dans celle de la formation générale des Animaux, incompréhenſible à tout l'Eſprit humain. Ils ont donc ſuppoſé que l'Animal & ſa Coquille naiſſoient du même Oeuf, & ſe dévelopoient enſemble, & ils ſe ſont contentés d'admirer que la Nature eût fait des demeures ſi bien travaillées & ſouvent ſi précieuſes pour de ſi vils Animaux. Mais cette ſuppoſition n'eſt que commode, & quoi qu'aſſés vraiſemblable, elle n'eſt nullement vraye. L'Animal naît de ſon œuf, mais non pas la Coquille qui eſt une merveille à part, & c'eſt ce que M. de Reaumur a démêlé le premier, du moins ne connoit-on juſqu'à préſent aucun Auteur qui lui puiſſe conteſter la gloire de la découverte.

V. les M. p. 364.

Il a reconnu par des experiences déciſives que la Coquille des Limaçons de jardin ſe forme de la matiere qui tranſpire de leur corps, & ſe durcit enſuite à l'air. Il eſt certain que tous les autres Animaux tranſpirent auſſi, &

ſont envelopés d'une eſpece de nuage ou d'Atmoſphére qui s'eſt exhalée d'eux, & qui peut-être prend à peu prés leur figure exterieure. Tout ce que les Limaçons ont de particulier c'eſt que l'Atmoſphére de leur tranſpiration s'épaiſſit autour d'eux, & leur forme une envelope viſible dont leur corps eſt le moule, au lieu que ce que les autres Animaux tranſpirent, s'évapore & ſe perd en l'air. Cette difference vient de la differente ſubſtance qui tranſpire, celle qui ſort des Limaçons eſt viſqueuſe & pierreuſe. Ce n'eſt pas là ſeulement une ſuppoſition, c'eſt un fait aſſez bien prouvé par des experiences de M. de Reaumur.

A ce compte, quoique la Coquille faſſe la fonction d'os *univerſel* de l'Animal, elle ne croît pourtant pas, comme les os ni comme les autres parties par vegetation, c'eſt à dire, par un ſuc qui circule au dedans d'elle-même, mais par une addition exterieure de parties qui ſurviennent les unes aprés les autres, & s'entaſſent peu à peu, ſelon qu'on le penſe communément des Pierres, & il eſt remarquable qu'il y ait une partie d'Animal qui emprunte des Mineraux cette façon de croître.

Pour entrer un peu plus dans le détail, il faut ſe ſouvenir que la tête du Limaçon eſt toûjours à l'ouverture de la Coquille, & ſa queuë ou l'autre extrémité de ſon corps vers la pointe ou le ſommet de la Coquille, & que ſon corps, par quelque cauſe que ce ſoit, ſe tourne naturellement en ſpirale, dont les differens tours ſont en differens plans. Cela ſuppoſé, prenons le Limaçon qui ne fait que d'éclorre, & qui eſt dans ſa premiere petiteſſe. Puiſqu'une matiere qu'il tranſpire ſe petrifie autour de lui, il doit ſe faire d'abord une petite envelope proportionnée à la grandeur de ſon corps, & comme ſon corps eſt encore trop petit pour faire un tour de ſpirale, ou du moins un tour entier, cette envelope ne ſera que le centre, ou tout au plus le premier commencement d'un trés petit tour de ſpirale. L'Animal croît enſuite. S'il ceſſoit de tranſpirer, il eſt viſible que ſon corps autant qu'il ſeroit augmenté demeureroit nud, mais comme

il ne cesse pas de transpirer, il se fait à lui-même une couverture à mesure qu'il croît, elle se met au bout de la premiere, & si le Limaçon a crû jusqu'à faire un second tour de spirale, la Coquille en fait aussi un second. Ce second tour est le second, ou, ce qui est la même chose, la spirale est allongée, parce que l'Animal a crû en longueur, & en même tems ce tour est aussi plus large que le premier, ou d'un plus grand diamettre, parce que l'Animal a crû aussi en largeur. Les autres tours se forment de même. Ils peuvent aller dans les Coquilles des Limaçons de jardin jusqu'à quatre & demi.

C'est une suite necessaire de cette formation des Coquilles que les premiers tours de celle d'un jeune Limaçon, qui n'en a encore, si l'on veut, que deux, ne soient pas plus grands que les deux premiers tours de celle d'un Limaçon plus âgé qui en aura quatre; car ce qu'il y a une fois de formé dans la Coquille, ne s'augmente plus, seulement il s'y ajoûte avec le tems de nouvelle Coquille. Aussi est-ce là ce qui s'observe invariablement, & il n'en faudroit pas davantage pour démontrer le sistême de M. de Reaumur. Et ce qui le confirme encore, c'est que ces mêmes premiers tours de spirale qui dans la Coquille d'un jeune Limaçon sont aussi longs & aussi larges que dans celle d'un plus âgé, sont cependant moins épaïs. On voit par là que la partie de l'Animal qui seroit demeurée nuë par son accroissement est, comme il a été dit, celle qui a travaillé à se couvrir, & que celle qui étoit déja couverte, ne laissant pas pour cela de transpirer toûjours a augmenté l'épaisseur de sa couverture.

Entrons encore un peu davantage dans les particularités. On voit des rayes spirales tracées sur la Coquille des Limaçons, principalement sur celles d'une certaine espece de petits Limaçons de jardin; le fond en est ordinairement jaune ou citron, avec des rayes noires ou brunes. Voici comment M. de Reaumur explique ces rayes. Ce qu'on appelle le *Collier* du Limaçon est le principal ouvrier de la Coquille, parce que quand le Limaçon

croît, c'eſt toûjours le Collier qui demeure découvert. Si l'on conçoit qu'il ſoit jaune avec un ſeul point noir, ou pour parler plus préciſément, que la matiere qui s'échape de tout le Collier ſoit de nature à faire une Coquille jaune, à l'exception de celle qui s'échapera par un ſeul pore ou point, & qui fera la Coquille noire, il eſt évident, pourvû qu'on ſe repreſente l'Animal croiſſant depuis ſa moindre grandeur, ſe roulant toûjours en ſpirale, & augmentant le nombre des tours, que le point noir du Collier tracera ſur toute la Coquille une raye noire, qui ſera une ſpirale trés-exactement décrite ſelon les accroiſſemens inſenſibles, & reguliers de l'Animal. Si le point noir n'étoit pas un point, mais une raye droite, la ſpirale de la Coquille en ſeroit moins courbe, mais toûjours auſſi regulierement décrite. S'il y avoit ſur le Collier pluſieurs points, ou pluſieurs rayes de la même ou de differentes couleurs, il y auroit auſſi ſur la Coquille pluſieurs rayes ſpirales, ſoit de differentes couleurs, ou de la même, & la poſition qu'elles auroient entre elles dépendroit de celle des points ou des rayes du Collier.

Il ne faut pas croire que ces points ou rayes du Collier ſoient une pure hipothêſe, on les voit diſtinctement, & de plus on les voit toûjours placés ſous l'extremité de la ſpirale qu'ils ont dû tracer ſur la Coquille, parce que c'eſt là où ils en ſont de leur ouvrage. La partie du Limaçon qui ſuit le Collier ne fournit qu'une matiere blanche, & luiſante, & comme c'eſt elle qui tant que le Limaçon croît ſuccede au Collier & ſe place toûjours ſous la partie de la Coquille qu'il vient de former, elle enduit d'un blanc luiſant toute la ſurface interieure de Coquille, & de là vient que cette ſurface ou n'a pas la même couleur que l'exterieure, ou n'a nulle varieté de couleurs.

Il n'y a point de Phiſicien qui n'étende de lui-même ce que nous avons dit des Coquilles des Limaçons à celles de tous les autres Animaux qui en ſont revêtus. Les varietés que nous avons déja imaginées dans le Collier à l'égard de la couleur, du nombre, de la poſition de ſes

points ou rayes, doivent servir à en faire imaginer encore d'autres d'une espece differente. Par exemple, s'il a de petites éminences disposées sur sa surface exterieure, elles en feront de pareilles sur la Coquille, qui iront toûjours en augmentant regulierement, parce que le Collier avec ses éminences croîtra de la même maniere. Si l'Animal cesse de croître dans certains tems reglés, qui lui seront contraires comme l'Hiver ou l'Eté, & qu'ensuite il recommence, il pourra y avoir sur la Coquille des traces de ces differentes reprises, comme les cercles concentriques du tronc des Arbres sont les marques des differens accroissemens de chaque année interrompus en certains tems. Nous évitons avec soin un plus grand détail, aussi bien que toute la méchanique particuliere de la formation des Coquilles. Il nous suffit qu'on l'aperçoive en général, & que l'on voye comment des Animaux sont eux-mêmes les Architectes de leurs habitations, & que ces habitations ne sont si regulieres que parce qu'elles se forment & s'accroissent avec leurs Architectes mêmes, dont elles representent tous les differens âges & les differens états.

Nous devons avertir ici le Public, que pendant que M. de Reaumur étudioit cette matiere, M. du Verney l'étudioit aussi de son côté, comme faisant partie de l'Histoire entiere des Limaçons qu'il a entreprise. Nous avons déja parlé de l'Hist. de 1708 * de ses découvertes sur leur Génération, il poursuit de même tout ce qui les regarde à prendre cet Animal depuis son Oeuf. On verra en son tems qu'elles sont ses pensées sur la formation de leur Coquille.

* p. 48. & suiv.



DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

On a sû dans l'Academie par une Lettre d'un Magistrat fort considerable, que le 1 Février 1709 la femme d'un Boucher d'Aix étoit accouchée de 4 filles qui paroissoient à differens termes, qu'ensuite il étoit venu une masse informe, & puis de 2 jours en 2 jours de nouveaux Enfans, bien formez, tant Garçons que Filles, jusqu'au nombre de 5, de sorte qu'en tout il y en avoit 9, sans compter la masse. Ils étoient tous vivans, & furent baptisez ou ondoyez. On n'avoit point encore ouvert la masse informe, qui apparemment contenoit un autre Enfant. Le nombre des Enfans, & quelques soupçons de superfétation sont ici des choses trés remarquables. Il est vrai que l'Histoire de la fameuse Comtesse de Hollande seroit bien plus merveilleuse, mais aussi n'a-t-elle pas l'air d'une histoire.

II.

M. Méry a apporté à l'Academie les deux yeux d'un Homme qui venoit de mourir, & que l'on étoit persuadé qui avoit des Cataractes. Il les a ouverts en presence de la Compagnie, & n'a trouvé dans tous les deux que le Cristallin qui commençoit par son milieu à devenir glaucomatique. *Depuis que l'on agite dans l'Academie la question des Cataractes* *, comme nous l'avons dit dans l'Histoire de 1708, *ce qu'on a crû Cataracte, s'est toûjours trouvé Glaucoma*, & voilà le nombre des Glaucoma crûs Cataractes encore augmenté.

* V. l'Hist. de 1706. p. 22. celle de 1707. p. 22. & celle de 1708. p. 39.

III.

Les Medecins tiennent qu'une Loupe peut être de trois especes, selon la matiere dont elle sera formée. Si cette matiere ressemble à de la Boüillie, la Loupe s'appelle un

Atherome, si elle ressemble à du Miel, *Meliceri*, si elle ressemble à du Suif, *Steatome*. M. Littre veut établir une quatriéme espece, qui s'appellera *Lipome*, à cause de la graisse qui forme la Loupe. Il en a vû une en effet placée sur l'épaule d'un Homme depuis 4 à 5 ans, grosse comme un pain d'un sou, qui n'étoit qu'un Kiste ou sac membraneux, mince & d'un tissu fort lâche, rempli d'une graisse molle, & qui avoit toutes les qualitez des graisses ordinaires. Quoique la graisse & le suif se ressemblent, cette nouvelle espece de Loupe, ou ce Lipome ne peut pas être rapporté au Steatome, parce que la matiere du Steatome n'est point inflammable, & ne se fond point ou du moins trés difficilement, & imparfaitement, & c'est tout le contraire de celle du Lipome. Quand l'Homme qui avoit cette Loupe, fatiguoit beaucoup, ou faisoit quelque excés en vin ou liqueurs ardentes, sa Loupe s'enfloit pour quelques jours, apparemment ou parce que son sang se fermentoit davantage, & que la graisse du Lipome se fondoit en partie, & acqueroit un plus grand volume dans un Kiste qui lui cédoit facilement, ou parce que les vaisseaux de la Loupe se dilatoient par le nouveau boüillonnement du sang.

IV.

On croit communément la Matrice si délicate qu'une égratignure, un coup d'ongle y cause une inflammation, & souvent la mort, & que le plus petit ulcere y est presque toûjours incurable. Cependant M. Jaugeon a fait voir à l'Academie une Lettre écrite à M. Dionis par M. Ciron Chirurgien de la Marine à Brest, qui rapportoit qu'une playe de Matrice trés considerable n'avoit point causé la mort. Voici le fait trés abregé, & réduit aux seuls points essentiels. Une Blanchisseuse de Brest, âgée de 34 ans, d'un temperament robuste, grosse de 6 à 7 mois, étant tombée violemment sur la pointe d'une pallissade du fossé de la Ville se fit 3 ou 4 doits au dessous du nombril une playe large de 2 doits. De ce tems-là, elle cessa de sentir son Enfant. Elle vuida par le vulve 8 ou 10 jours aprés

beaucoup de ſang mêlé de pourriture, & cet écoulement dura 8 ou 10 jours. La playe du ventre ayant été traitée à l'ordinaire, cette femme revint en aſſez bon état recommença de travailler, paſſa le 9me mois de ſa groſſeſſe, & alla juſqu'au 15me ſans incommodité conſiderable. Alors il ſe fit une tumeur à l'endroit du ventre où elle avoit été bleſſée, la tumeur s'ouvrit d'elle-même, ſupura pendant 40 jours des matieres aſſez loüables, enſuite ſe deſſecha, & ſe cicatriſa. Le 27me mois de la groſſeſſe, la tumeur revint, mais beaucoup plus conſiderable, & fut en 3 jours groſſe comme un balon. On l'ouvrit, & on en tira 2 pintes de matieres trés puantes, dont l'évacuation ſoulagea fort la Malade. Le 3me jour du penſement, il vint de petits os, & enfin de jour en jour vinrent les uns aprés les autres tous les os d'un petit ſquelette de 6 à 7 mois. Certainement la Matrice avoit été percée par la pointe de la paliſſade, le fœtus y avoit été tué de ce coup, il s'y étoit pourri, & enſuite ou il en étoit ſortit par l'ouverture de la playe, n'étant plus qu'un ſquelette, ou ſes os en étoient ſortis par la même ouverture les uns aprés les autres. Rien ne peut être plus contraire que cette hiſtoire à l'extrême délicateſſe qu'on attribuë à la Matrice, ou ſi, comme il y a apparence, cette délicateſſe lui eſt attribuée avec raiſon, rien ne prouve mieux qu'il ne faut jamais déſeſperer d'aucune cure, & que l'on ne ſait ſi l'on n'eſt pas dans de certaines circonſtances ſingulieres. Nous ne devons pas oublier que cette même femme le 14me mois aprés ſa chute ſe trouva enceinte d'un faux germe, qu'elle rendit avec une perte de ſang conſiderable.

V.

Une femme de 17 ans, d'un temperament bilieux, & d'une grande vivacité, fut groſſe, & porta ſon Enfant du côté droit. Il devint ſi gros qu'il ne put ſortir, & fut tiré du ventre de ſa Mere mort & par pieces. Dans les derniers mois de ſa groſſeſſe, elle fut incommodée d'une oppreſſion de poitrine, d'une difficulté de reſpiration, & de palpitations de cœur, & depuis ce tems-là ces maux ne

ne firent qu'augmenter pendant les 5 années suivantes, aprés quoi ils s'arréterent au point où ils étoient, si ce n'est que la Malade fît quelque excès, mais l'excès passé, ils cessoient aussi d'augmenter. Il faut remarquer que pendant ces 5 années, comme elle étoit fort jeune, elle crut encore en hauteur, elle eut encore 2 enfans, qu'elle porta toûjours du côté droit, & elle en accoucha sans peine. Elle mourut à 39 ans, en partie pour ne s'être pas conduite comme on lui avoit prescrit. M. Littre ouvrit son corps. Il trouva que le Ligament large & le Ligament rond de la Matrice du côté droit étoient plus courts, plus compactes, & plus gros que ceux du côté opposé, que la Matrice étoit plus grosse qu'à l'ordinaire, & panchoit un peu du côté droit, que le grand Lobe du foye qui doit être cave par derriere, convexe par devant, mince & étroit en bas, épais & large en haut, entierement renfermé dans la capacité du ventre, étoit de figure conique long de 9. pouces, large de 4. à sa base qui étoit sa partie inferieure, & de 2 à sa pointe, entrant jusques dans la partie moyenne de la cavité de la poitrine, quoique d'ailleurs il ne fût que du poids ordinaire, & qu'enfin toutes les parties du même côté, le Rein, le Diaphragme, le Poumon, étoient tant par leur figure, que par leur position, tant en elles-mêmes que par rapport aux parties voisines, dans le même état que si elles avoient été violemment poussées par la Matrice de bas en haut. Aussi M. Littre conjecture-t-il qu'elles l'avoient été. La trop grande force des Ligamens de la Matrice du côté droit, avoit tiré & fait pancher la Matrice de ce côté-là, & déterminé le premier Enfant à s'y porter. Malheureusement encore il fut extrêmement gros, & fit une forte compression à toutes les Parties qui étoient au dessus de lui, de sorte que le Poumon droit en fut fort rapetissé, & resserré. De-là tous les maux, ainsi qu'il est visible. Les parties comprimées, & gênées par cet Enfant, l'ayant été pendant un tems considerable, ne se remirent point aprés sa sortie, tant parce qu'elles

avoient déja perdu une partie du reſſort neceſſaire, que parce que les Enfans ſuivans étant toûjours du côté droit, les entretinrent dans ce mauvais pli. Elles le conſerverent donc, même en croiſſant, & par conſequent tant que la Dame crut en hauteur, les incommoditez augmenterent, parce qu'elles avoient commencé par une preſſion faite en ce ſens-là. Il ſuffit que les Medecins ſoient avertis de la poſſibilité de ces accidens, pour les prévenir aiſément dans de jeunes femmes groſſes, lorſqu'ils s'appercevront qu'elles porteront trop leurs Enfans d'un côté.

V.

M. Plantade, de la Societé Royale de Montpellier, étant à Paris, a trouvé à ſes repas deux fois de ſuite en aſſez peu de tems deux Poulets qui avoient chacun deux Cœurs. Il donna ceux du dernier à M. Caſſini le fils qui les apporta à l'Academie. M. Littre les examina, il commença par les ramollir dans de l'eau tiéde pour les mettre en état d'être diſſequez. Ils étoient égaux entre eux, & ſeulement tant ſoit peu plus petits chacun que le Cœur d'un Poulet de même âge. Ils étoient ſituez à côté l'un de l'autre à un demi pouce de diſtance, avoient chacun leurs ventricules, leurs oreillettes, & tous leurs vaiſſeaux ſanguins comme les Cœurs ordinaires, & n'avoient rien de ſingulier ſinon qu'ils étoient attachez tous deux par leur Veine Cave inferieure à un des Lobes du foye. M. Littre conjecture que le ſang du ventricule droit du Cœur droit alloit dans le Poumon droit, & le ſang du ventricule droit du Cœur gauche dans le Poumon gauche. Quant à l'autre circulation, ou les Aortes des deux Cœurs pouvoient s'unir, & n'en former qu'une, ou l'Aorte du Cœur droit fourniſſoit du ſang aux parties du côté droit, & celle du Cœur gauche au côté gauche, ou toutes deux ſe diſtribuoient également par tout le Corps, de ſorte qu'il y avoit toûjours double Artere. Du reſte, comme chacun des deux Cœurs avoit preſque autant de force qu'un Cœur unique, ce Poulet avoit

deux fois plus de vie qu'un autre, & si un Cœur lui manquoit, il en avoit encore un de relais. Cette conformation qui, selon ce qu'on a vû, n'est pas apparement fort rare dans cette espece, ne doit pas être impossible dans l'Homme, peut-être a-t-elle déja produit des phenomenes, qui ont confondu les Phisiciens.

VII.

On a déja vû dans l'Histoire de 1701 * quelques-unes des difficultez que M. Méry oppose au Systême de la génération de l'Homme par des Oeufs. On prend our ces Ooeufs des Vesicules pleines de liqueur qui sont dans les Testicules où prétendus Ovaires des Femmes, & M. Méry avoit trouvé des Vesicules toutes pareilles dans l'épaisseur de l'Orifice interne de la Matrice, & certainement celles-là n'étoient pas des Oeufs. Il vient d'en trouver encore de parfaitement semblables, & qui sont encore moins des Oeufs, s'il est possible, puisqu'elles étoient dans les Testicules d'un Homme. Si elles avoient été toutes réünies ensemble, elles auroieut fait le quart de son volume. Leur liqueur étoit claire & transparente comme de l'eau, & la membrane qui la renfermoit étoit, comme dans les Ovaires des femmes, naturellement inséparable de la substance propre du Testicule. Les Ovaires des Femmes étant cuits dans l'eau boüillante, la liqueur de leurs Vesicules se durcit, ce qui paroît favoriser le sistême des Oeufs, mais ce Testicule d'Homme étant pareillement cuit, il y eut une partie de ses Vesicules dont la liqueur se durcit, & d'autres dont la liqueur demeura fluide. Il en arrive autant aux eaux qu'on tire du ventre des Hidropiques; quelquefois elles s'épaississent par le feu, quelquefois elles conservent leur fluidité, & cette difference ne vient que de ce que les unes sont de la limphe destinée à la nourriture des parties, & les autres de la serosité du sang, semblable à l'urine. On peut legitimement dire la même chose de toutes les Vesicules ou Hydatides, ainsi l'épaississement de la liqueur

* p. 38. & suiv.

contenuë dans les Ovaires des Femmes ne prouve rien pour les Oeufs.

Il eſt vrai que le Teſticule d'homme obſervé par M. Méry étoit malade, & non pas dans l'état naturel. Auſſi M. Méry ne prétend-il pas que les Teſticules des hommes reſſemblent à ceux des femmes, qu'on a pris pour des Ovaires, mais ſeulement que ſi par quelque cauſe que ce ſoit il ſe trouve dans les uns & dans les autres des Véſicules toutes ſemblables, il y a apparence qu'elles ne ſont pas plus des œufs dans les uns que dans les autres.

VIII.

M. Méry ayant ouvert à un Malade un abſcès ſur la ſurface du grand *Trochanter* du *Femur* droit, dont il ſortit une palette & demie de ſang trés fluide, mais d'un rouge obſcur, y trouva un Polipe, long de 2 pouces, large de 1, épais de 5 ou 6 lignes, couvert de pluſieurs tuberoſitez inégales, & irrégulieres, dont quelques-unes étoient ſuſpenduës par de petits ligamens. Il étoit fortement attaché au tendron du *grand Feſſier* par un pedicule long d'un pouce, & gros comme une plume à écrire C'étoit là ce qu'il avoit de plus ſingulier, car les Polipes qui ſe forment dans le Cœur, & jettent ſouvent des branches dans ſes vaiſſeaux, ne tiennent point à ſa ſubſtance par de pareils pedicules. Delà M. Méry conjectura qu'il devoit s'être formé d'une maniere differente de ceux du Cœur. Ils ſont apparement produits par la Limphe, qui dans les ventricules ſe ſépare des autres parties du ſang à cauſe de quelque diſpoſition particuliere, & l'on voit effectivement par toutes les ſaignées qu'elle a beaucoup de facilité à s'en ſéparer, car c'eſt cette pattie blanche du ſang, qui en un moment monte au haut de la Palette, s'y coagule, & y fait une croûte parfaitement ſemblable à la matiere des Polipes du Cœur. Auſſi croit-on qu'il s'y en engendre ſouvent dans le petit eſpace de tems, où un Mort ſe refroidit, & que c'eſt là ce qui rend les petits Polipes ſi communs dans les cadavres que l'on ouvre. Mais il paroît à cauſe du pedicule qu'avoit le Polipe dont il s'agit pre-

ſentement ; qu'il ne s'étoit formé que peu à peu du ſuc qui exudoit du tendon, où il étoit attaché. L'épanchement extraordinaire de ce ſuc avoit été cauſé par une chute que le Malade avoit faite ſur cette partie, il y avoit trois ſemaines.

IX.

M. Gandolphe, dont nous avons déja parlé dans l'Hiſt. de 1707 *, Medecin de la Marine à Dunquerque, a envoyé à l'Académie la deſcription & la figure d'un Ver Ténia, rendu par une Dame de Dunquerque, & la Relation exacte & trés bien circonſtanciée de la maladie, avec une Petite Diſſertation ſur ces ſortes de Vers en général.

* p. 26. & ſuiv.

La Malade venoit d'acoucher heureuſement pour la quatriéme fois. Comme elle avoit des accidens qui n'étoient point une ſuite de ſon état, de la fiévre auſſi-tôt qu'elle eut accouchée, de frequentes nauſées, une difficulté de reſpiration, qui alloit juſqu'à une eſpece d'étranglement, de grandes douleurs dans le bas ventre, quoique ſans aucune tenſion, M. Gandolphe crut qu'il y avoit quelque choſe d'extraordinaire dans le bas ventre, & il ordonna le Tartre Emetique avec de la Manne, ce qui fit ſortir le Ténia le troiſiéme jour aprés l'accouchement.

Ce Ver fut en mouvement pendant quelque tems. Quoiqu'il eût 50 pouces de long, il n'étoit pas ſorti tout entier, il y a apparence que le reſte vint dans des ſelles, mais ſi corrompu qu'on ne le reconnut pas. Il avoit 4 lignes de large vers le milieu du corps, & environ $\frac{1}{2}$ ligne d'épais. Il étoit plat comme un Lacet, & delà vient ſon nom. Il étoit articulé dans toute ſa longueur par des anneaux enchaſſez régulierement les uns dans les autres, mais avec quelque difference. Les 11 premiers anneaux ou articles du côté de la tête étoient unis par une membrane fine qui les ſeparoit tant ſoit peu les uns des autres, ils étoient un peu plus épais & plus petits que les articles du reſte du corps, & alloient en groſſiſſant inſenſiblement depuis la tête. Tous les autres articles étoient unis immé-

diatement les uns aux autres. Ceux du milieu avoient plus de grosseur, & une articulation plus aisée que les précédens, & ceux de l'extremité étoient plus longs & moins larges, & leur articulation encore plus manifeste.

M. Gandolphe remarqua quelques singularitez au premier article, qui formoit la tête. Il y avoit au dessous une ouverture presque imperceptible en forme de fente, deux trous dans l'épaisseur de l'extremité, & une petite éminence ronde au dessus.

Au dessous des six premiers articles, il y avoit plusieurs petites éminences rondes, placées en long, comme les pieds des Chenilles.

La partie superieure de chaque article, c'est-à-dire, celle qui étoit vers la tête, étoit reçûë dans l'article précédent, & la partie inferieure recevoit l'article suivant, ce qui fait l'articulation perpetuelle du Ver. M. Gandolphe appelle *ventre* une partie de chaque article où les Visceres sont renfermez. C'est une espece de cavité qui ne se voit sensiblement que dans les articles du milieu & de l'extremité. Elle est élevée, & placée à la partie superieure de l'article, & se termine en pointe au milieu de l'article même. Ce qui a fait reconnoître à M. Gandolphe cet endroit pour le ventre, c'est qu'en le pressant legerement dans un article separé des autres, il en voyoit sortir d'espace en espace comme de petits canaux blancs d'une grande finesse, qui ne pouvoient être que les Visceres du Ver.

En separant les articles de l'extremité, il a vû que la partie superieure de chacun étoit enchassée dans une petite cavité, & que la partie inferieure de l'article qui recevoit débordoit un peu au delà du corps & des côtez de l'article reçû. La cavité où chaque article étoit joint, étoit toute traversée par des fibres musculeuses, qui laissoient entre elles de petits espaces, par où les Visceres communiquoient d'un article à l'autre.

Les côtez des articles ne se terminoient ni en pointe ni en mammelon, mais il y avoit toûjours à un seul côté

de chacun une petite ouverture en forme d'iſſuë, placée prés de la partie inferieure. Il y aboutiſſoit un canal qui s'étendoit juſqu'au milieu de l'article. Ces iſſuës n'étoient pas toujours du même côté du Ver, mais alternativement de côté & d'autre ſans ordre reglé, tantôt deux, trois, ſix de ſuite, tantôt une ſeule. M. Andry, fameux Medecin de la Faculté de Paris, & fameux ſur tout en cette matiere, a le premier obſervé ces ouvertures. Il les prend pour des Trachées, parce que certaines eſpeces d'Inſectes en ont effectivement qui ſont diſpoſées ainſi tout le long de leur corps à chaque article ou *inciſion*, mais M. Gandolphe doute que ceux qui vivent dans le corps d'autres Animaux, & ne vivent que là, comme le Ténia, ayent beſoin de reſpiration & de Trachées.

La peau du Ténia en fait preſque toute la ſubſtance. C'eſt un veritable muſcle formé de fibres diſpoſées en pluſieurs ſens, & entrecoupées aux jointures. Elles ne paroiſſoient qu'à l'interieur de la peau. Elles ont plus de force dans le ventre de chaque article, parce que c'eſt l'endroit où il ſe peut faire le plus de compreſſion. Le Ver ſe plie facilement dans toute ſon étenduë, mais principalement aux jointures. Le deſſous étoit plus plat & plus liſſe que le deſſus.

La Dame qui avoit ce Ténia avoit rendu pluſieurs fois par les ſelles de petits corps blancs, ou des Vers qui reſſemblent à de la graine de Courge, & qu'on appelle par cette raiſon Vers *cucurbitaires*, ou *cucurbitins*. Ils étoient ſortis ſeuls. La plûpart des Auteurs les regardent comme des ſignes & des eſpeces d'avantcoureurs d'un Ténia qui eſt dans le corps, mais M. Gandolphe ne croit pas ces ſignes encore bien certains, & il déſiroit qu'on obſervât plus exactement ces ſortes de corps blancs, pour ſavoir ſi ce ſont effectivement des Vers, s'ils ſont vivans ou morts, d'une autre eſpece que le Ténia &c.

Il eſt à remarquer que le Pere de la Malade étoit mort d'une Pleureſie, & qu'avant que de mourir il avoit jetté un Ver plat & fort long. Nous dirons en paſſant que le

Malade qui donna occaſion au livre de M. Andry ſur la *Generation des Vers*, & qui en avoit jetté un de 179 pouces, qui n'étoit pas entier, avoit pareillement une Pleureſie, mais dont il fut entierement guéri deux jours aprés la ſortie du Ver.

Si le Ténia étoit toûjours un mal hereditaire, cette circonſtance ſerviroit peut être à expliquer l'origine de ce Ver, qu'il eſt trés difficile d'imaginer. Car il eſt à préſumer qu'il vient d'un Oeuf comme tous les autres Animaux, mais comment cet Oeuf ſe trouve-t-il dans le corps d'un homme? y eſt-il venu de dehors enfermé dans quelque Aliment, ou même, ſi l'on veut, porté par l'air? On devroit donc voir quelquefois ſur la terre des Ténia, & l'on n'en a jamais vû. On pourroit bien ſuppoſer que le Chile dont ils ſe nourriſſent dans le corps humain leur convient mieux que toute autre nourriture qu'ils pourroient trouver ſur la terre, & qu'ils n'y parviendroient jamais à avoir ni 50 pouces, ni 179, encore moins 1980, car on en a vû de cette énorme longueur, mais du moins devroit-on connoître des Ténia de terre, quelque petits qu'ils fuſſent, & l'on n'en connoît point. Il eſt vrai qu'on pourroit encore dire que leur extrême petiteſſe les rend abſolument méconnoiſſables, & change même leur figure, parce que tous leurs articles ou anneaux ſeront roulez les uns dans les autres; mais que de cette petiteſſe qui les change tant ils puiſſent venir à avoir 1980 pouces ou plus de 27 toiſes de long, c'eſt une ſuppoſition un peu violente; quel Animal a jamais crû ſelon cette proportion? il ſeroit donc commode de ſuppoſer, que puiſque le Ténia ne ſe trouve que dans le corps de l'Homme ou de quelque autre Animal, l'œuf dont il eſt éclos étoit naturellement attaché à celui dont cet Animal eſt venu, & les Vers héréditaires s'accommoderoient fort à cette hipothêſe, mais juſqu'à preſent il vaut mieux, ſelon M. Gandolphe, s'abſtenir de deviner ſur ce ſujet.

Il a ſû que ſa Malade ayant une fiévre intermitente pendant ſa troiſiéme Groſſeſſe avoit pris des tablettes vo-

mitives,

mitives, qui avoient puissamment agi, sans que son Ténia eût causé aucun simptôme. A plus forte raison auroit-il pû n'en causer jamais dans un corps toûjours sain. Ainsi on peut porter un Ténia toute sa vie sans s'en apercevoir. Cet hôte n'est nuisible que par des mouvemens extraordinaires, & il n'y a apparemment que de certains vices particuliers des humeurs qui l'y obligent en l'incommodant & en l'irritant. Hors delà il peut vivre paisiblement avec celui qui le loge, en lui dérobant seulement un peu de Chile, dont la perte se peut aisément souffrir à moins que le Ver ne fût d'une prodigieuse grandeur, ou qu'il n'y eût quelque autre circonstance particuliere.

X.

Les Naturalistes croyent que les Epines dont les *Oursins* sont herissés, leur tiennent lieu de Jambes, & qu'ils s'en servent pour marcher. Mais M. Gandolphe ayant observé à Marseille ces Animaux qui marchoient assés vîte au fond de la Mer, a découvert que ce ne sont point leurs Epines qui executent ce mouvement, mais des Jambes disposées autour de leur bouche, qui est toûjours tournée contre le fonds de la Mer, ces Jambes disparoissent entierement, dès que les Oursins sont tirés du fonds de l'eau, & delà est venuë l'erreur commune. On a sû qu'ils marchoient & on n'a point vû leurs Jambes, parce qu'on ne les a point vûs marcher dans la mer. Elles ressemblent à celles d'un Insecte plat, nommé *Etoile de mer*, que M. Gandolphe a étudié à Dunquerque, & dont il promettoit une description, qu'apparement nous ne verrons pas. L'Academie a appris sa mort dans cette même année 1709, & a crû perdre avec un si bon Correspondant beaucoup de belles observations.

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

L'Ecrit de M. Littre sur un Fœtus humain monstrueux. V. les M. p. 9.

Celui de M. Méry sur un autre Fœtus monstrueux. V. les M. p. 16.

V. les M. p. 55. Et les observations de M. Méry sur les mouvemens de la Langue du Piver.



CHIMIE.

SUR LE SUBLIMÉ CORROSIF.

V. les M. p. 42. LE Sublimé corrosif est du Mercure avec lequel se sont exactement, & intimement incorporés par une operation Chimique du Sel, & du Vitriol. On l'appelle *Sublimé*, parce que dans l'operation il s'est élevé au haut d'un Matras, & *corrosif*, parce que les matieres avec lesquelles on l'a mêlé lui ont donné une vertu de ronger & de corroder qu'il n'avoit pas. Il y a toute apparence, qu'étant par la figure ronde de ses plus petites particules aussi divisible, aussi mobile, aussi actif, qu'il l'est naturellement, mais par cette même figure incapable de déchirer, il en devient trés capable, lorsqu'il est armé & herissé de toutes parts des Acides aigus du Sel, & du Vitriol. Aussi le Sublimé corrosif pris interieurement est-il un trés fort poison, mais appliqué par dehors il est bon pour nettoyer les ulceres, & manger les chairs qu'il faut consumer,

Il a encore d'autres usages en Medecine, mais ce n'est que lorsqu'il a en partie changé de nature, & qu'il est devenu Sublimé *doux*. Il le devient par une nouvelle addition de Mercure, & par de nouvelles sublimations, car la même quantité des Acides du sel & du Vitriol étant répanduë sur une plus grande quantité de Mercure, la vertu corrosif diminuë d'autant, & l'activité nuisible

réduite à un certain degré n'eſt plus qu'utile. On eſt même aſſés maître du degré par l'operation.

Comme il eſt bon de l'être ; principalement à l'égard des Remedes violens, l'experience que M. Lémery a faite en travaillant ſur le Sublimé corroſif, peut avoir ſon utilité. Il a trouvé qu'on le peut faire avec le Sel ſeulement, pourvû que l'on mette autant de Sel, que l'on auroit mis de Sel & de Vitriol, & que de cette maniere il eſt moins corroſif, & cauſe moins de douleur en rongeant les chairs. Ce nouveau Sublimé corroſif doit par conſéquent ſe changer plus aiſément en Sublimé doux, & une ſi grande addition de Mercure n'y doit pas être neceſſaire ; & c'eſt ce qui ſe trouve en effet.

Il eſt aſſés établi chés les Chimiſtes que les Acides du ſel ſont plus groſſiers que ceux du Vitriol, & cela ſuppoſé, il n'eſt pas ſurprenant que le Mercure ait moins d'action, l'orqu'il n'eſt armé que de dards moins perçans.

Cette même groſſierté des Acides du Sel, qu'on peut trés raiſonnablement & qu'on doit même ſuppoſer inégale dans le même Sel, rend raiſon de ce que, ſelon que M. Lémery l'a éprouvé, le Sel qui aprés avoir ſervi à faire du Sublimé corroſif eſt demeuré dans le fond du Matras, ne peut plus ſervir à en faire d'autres, quelque purifié qu'il puiſſe être. C'eſt que tous ſes Acides les moins groſſiers ayant été épuiſés par la premiere operation, ceux qui reſtent le ſont trop pour s'attacher au Mercure, & pour s'envoler avec lui.

Aprés avoir fait du Sublimé corroſif avec le Sel ſeulement, M. Lémery a voulu voir s'il en feroit avec le Vitriol ſeul ; mais il n'en a pû venir à bout. Il ne s'eſt élevé au haut du Matras que quelques Souffres legers du Vitriol, tout le reſte de ſa ſubſtance eſt demeuré incorporé avec le Mercure au fond du Vaiſſeau. Peut-être les Acides du Vitriol par leur grande quantité, & par la fineſſe dont ils ſont, s'uniſſent-ils ſi facilement, ſi promptement, & en ſi grande abondance à la ſubſtance du

Mercure, qu'ils en font une masse liée & pesante, qui ne se peut élever. Cette idée feroit entendre aussi pourquoi le mélange du Sel & du Vitriol réüssit dans la composition du Sublimé.

SUR LES METAUX IMPARFAITS EXPOSEZ AU VERRE ARDENT.

V. les M. p. 162.

LE Verre ardent du Palais Royal est le Fourneau le plus vif que la Chimie ait jamais eu, & il peut servir à des operations que nul autre ne pourroit executer, mais le mal est qu'il ne va pas souvent. Nous avons dit pourquoi dans l'Hist. de 1705 *, & nous pouvons ajoûter ici que dans toute l'année 1708 il y eut à peine 3 ou 4 jours favorables.

* p. 39. & 40.

M. Geoffroy en profita pour presenter au Soleil les 4 Metaux imparfaits, le Fer, le Cuivre, l'Etain & le Plomb, & penetrer par là dans le mistere de leur composition intime. Il faut renvoyer au Memoire de l'Auteur le détail des Experiences, quoiqu'agréable & instructif, & venir ici aux faits généraux qui en résultent.

Ces 4 Metaux ont pour base une Terre susceptible de vitrification, cassante, friable, differente dans tous les quatre, puisqu'elle se vitrifie differemment. Dans le Fer, c'est un simple *Regule* de Fer, c'est à dire la partie la plus dure, & la plus fixe de ce Metal; elle est plus blanche que lui. Dans le Cuivre, c'est une matiere rouge, dont les petits grains vûs avec le Microscope sont autant de Rubis; dans l'Etain, c'est une matiere cristalline trés-difficile à fondre, car elle ne se fond pas parfaitement au feu du Soleil, & se met seulement en aiguilles herissées de pointes; dans le Plomb, c'est une matiere talqueuse, ou du moins disposée par lames, comme le Talc, un peu molasse, douce au toucher, transparente, de differentes couleurs en differens endroits.

Ces vitrifications des Metaux ne sont pas ordinairement bien achevées, parce qu'il faudroit pour cela qu'ils eussent été tenus en fonte au foyer du Miroir un certain tems, & pendant ce tems ils fondent, penetrent, & percent leurs *supports*, c'est à dire, les matieres surquoi on les expose au Soleil. C'est encore là une des incommodités du Verre ardent. La grande chaleur, qui en fait le merite, y a ses inconveniens.

Outre la Terre, il entre dans les 4 Metaux un Souffre, ou une substance huileuse, qui en fait l'opacité, le brillant, & la malleabilité. Elle est la même dans tous les quatre, & de plus la même que dans les Vegetaux, & par conséquent dans les Animaux. Cette proposition avoit déja été avancée dans l'Hist. de 1707 *, en voici la preuve. Pour vitrifier au Soleil lequel que ce soit des Metaux imparfaits, il faut le tenir exposé au foyer non sur un Charbon, mais sur un morceau de Coupelle, ou de Grez, ou de Porcelaine, dont on ait ôté le Vernis. La raison est, que l'huile de ces Metaux s'envole d'abord en fumée, & c'est ce qui les réduit en une terre vitrifiable, mais ils ne s'y réduiroient pas, s'il leur survenoit d'ailleurs de nouvelle huile, qui tînt la place de celle qu'ils perdent. Or il leur en surviendroit s'ils étoient sur le charbon, qui échauffé par le Soleil leur en fourniroit, parce qu'il est fort sulphureux. On les met donc sur des matieres purement terreuses, ou du moins destituées d'huile, autant qu'il est possible. Quand ils ont été vitrifiés sur ces supports, on n'a qu'à les remettre au Soleil sur le Charbon, & les y fondre, ils reprennent tous leur forme métallique, parce que le Charbon leur a rendu le seul principe qui leur manquoit, & qui par conséquent devoit être le même dans tous, & le même que dans les Plantes. M. Geoffroy a trouvé qu'il étoit encore le même dans le Mercure.

* p. 44.

Cette conclusion lui étoit fort favorable dans sa contestation avec M. Lémery le fils, exposée dans les Histoires précédentes, car il n'étoit plus du tout merveilleux

que des Plantes brûlées produisissent quelques atômes de Fer. Cependant M. Geoffroy a déclaré qu'il ne prétendoit point ni que les experiences que nous avons rapportées, ni même que les raisonnemens qu'il auroit employés, prouvassent rien de décisif en sa faveur, & qu'enfin il ne regardoit son opinion que comme une opinion, à laquelle il ne desiroit que la vraisemblance. Il y a peu de matieres en Phisique, qui ne donnassent lieu à des Philosophes sensés d'en dire autant.

SUR LE CACHOU.

V. les M. p. 227.

Comme les Naturalistes ne savent pas bien ce que c'est que ces petits grains noirs dont la matiere vient des Indes, & qu'on appelle du Cachou, c'est aux Chimistes à le reconnoître. M. Bolduc est persuadé par toutes les Analises qu'il en a faites que c'est un suc vegetal. L'Extrait que l'on en tire par l'Esprit du vin est en plus grande quantité, & d'une qualité plus forte que celui qu'on tire par l'Eau, marque que c'est le souffre ou la partie resineuse qui domine dans ce Mixte.

SUR L'ANALISE DES CLOPORTES.

Les Cloportes sont des Insectes si connus, qu'il seroit inutile d'en faire la description. Seulement est-il bon de remarquer que M. Lémery a reconnu sûrement contre l'opinion de quelques Auteurs, qu'elles sont vivipares. Il croit qu'il y en a de deux especes, les Domestiques qu'on trouve sur les toits, dans les Caves, dans les crevasses des Murs, enfin dans les lieux humides, & salpetreux, & les Sauvages, qui vivent dans les Bleds, dans les Bois, dans les fentes des vieux Arbres. Ces dernieres

ſont les plus petites, & on les employe beaucoup moins en Medecine. Les Domeſtiques ſont préferées parce qu'elles paroiſſent plus empreintes d'un ſel ſalpetreux., dont elles ſe ſont nourries, & qui fait toute leur vertu. C'eſt ce ſel qui les rend utiles dans les occaſions où il s'agit d'ouvrir & de réſoudre, comme dans la Nephetique, dans la Jauniſſe, dans les Ecrouelles, dans l'Eſquinancie, &c.

M. Lémery a tiré des Cloportes domeſtiques par la diſtillation un ſel volatil tout ſemblable à celui du Vipere, & dont on peut ſe ſervir dans les mêmes maladies, & en même doſe. L'Eſprit de Cloporte a la même vertu, puiſque ce n'eſt que ce ſel volatil, qui nage dans un flegme. Il vient des Cloportes, comme des Viperes, & plus généralement comme de tous les autres animaux, une huile noire & fœtide, empreinte auſſi d'un ſel volatil. Cellecy ayant été mêlée avec deux fois plus d'Eſprit de Nitre déflegmé, il s'eſt fait une grande efferveſcence, & M. Lémery a crû même appercevoir un peu de feu, mais embaraſſé, & comme abſorbé par l'épaiſſeur & la noirceur de l'huile. Cette experience reſſembleroit à l'inflammation cauſée par le mélange de l'Eſprit de Nitre, & des Huiles eſſentielles de certaines Plantes, dont il a été parlé dans l'Hiſt. de 1702*, & dépendroit du même principe, c'eſt à dire de l'extrême avidité avec laquelle des Souffres bien dépoüillez d'Acides, s'en chargent. Il pourroit ſeulement y avoir une difference que M. Lémery a remarquée. C'eſt que s'il ne ſoupçonne pas d'Alcali dans les Huiles eſſentielles des Plantes, au lieu qu'on peut croire qu'il s'en trouve dans des Huiles d'Animaux, qui ont été tirées par la Cornuë à un grand feu, car il y a beaucoup d'apparence que c'eſt le feu qui fait ces Alcali. Anſi il n'y a que l'experience des Huiles des Plantes, qui prouve que ces Alcali ne ſont pas les ſeules matieres capables de faire efferveſcence avec les Acides.

* p. 66. & ſuiv.

Le Charbon qui reſte des Cloportes diſtilées dans la Cornuë ayant été calciné, M. Lémery a trouvé du Fer

dans ces cendres. Il en avoit trouvé aussi dans des cendres provenuës d'autres Animaux, mais cela ne lui est pas toûjours arrivé. Il n'en a pû tirer de la Corne de Cerf, de l'Yvoire, des Yeux d'Ecrevisses, des Coquilles d'Huitres, au lieu que jusqu'ici on en a toûjours découvert dans des Cendres de Vegetaux. Peut-être en reconnoissant à force d'experiences les matieres où il se trouve du fer, & celles où il ne s'en trouve point, on viendra à découvrir pourquoi il est plûtôt dans les unes que dans les autres.

SUR LES ACIDES MINERAUX ET VEGETAUX.

V. les M. p. 354.

NOus venons de voir que le Souffre qui entre dans la composition des Metaux, du moins des Metaux imparfaits, est précisément le même que celui qui entre dans la composition des Plantes, mais sur des experiences faites & rapportées par M. Homberg, on pourroit croire que l'Acide Mineral & le Vegetal seroient fort differens.

Que l'on verse sur de l'Esprit d'urine qui est un Alcali volatil une quantité à peu prés égale de Vinaigre distillé, qui est un Acide vegetal, il ne se fera ni ébullition ni effervescence, & cette tranquillité des deux liqueurs mêlées ensemble durera, jusqu'à ce que la quantité de l'Esprit d'urine soit fort diminuée, ou celle du Vinaigre distillé fort augmentée. Mais si sur de l'Esprit d'urine, quelle qu'en soit la quantité, on verse un Acide mineral, comme de l'Esprit de Sel, ou Nitre, n'y en eût-il qu'une goute, aussi-tôt il se fait une ébullition, plus ou moins grande, selon qu'il y a plus ou moins d'Acide par rapport à la quantité de l'Alcali. M. Homberg rapporte une autre experience pareille, & qui prouve la même chose.

Cependant il ne prétend pas que les Acides Mineraux & Vegetaux soient differens. D'où les Plantes tirent-elles leurs

leurs Acides que de la Terre, & n'y sont-ils pas Mineraux? mais il veut que ces Acides & par eux-mêmes & lorsqu'ils entrent dans la composition de quelque Mineral soient comme des paquets de plusieurs Aiguilles couchées les unes sur les autres, au lieu qu'aprés qu'ils ont esté sucés par les racines des Plantes, & qu'ils ont circulé par leurs caneaux étroits, les Aiguilles se sont separées & par là ont perdu la force qu'elles tiroient de leur union. Cette seule idée suffit pour donner la clé du petit Sistême de M. Homberg sur cette matiere.

Quelque forts que puissent être les Acides mineraux parce qu'ils sont en paquets, ils ne laissent pas, pour ainsi dire, d'avoir de la peine, lorsqu'ils ont affaire, non à des Alcali volatils distillés, tels que l'Esprit d'urine, & qui sont en quelque sorte nuds & entierement exposés à leur action, mais à d'autres Alcali volatils non distillés, encore envelopés d'huiles, ou enfin de parties étrangeres. C'est ainsi que M. Homberg dit qu'il a vû un mélange d'Esprit de Nitre & de Mouches Cantharides faire pendant plus de deux ans une petite & lente ébullition. L'occasion qui a mis sous ses yeux un fait si remarquable merite qu'on y fasse dans son Memoire une attention particuliere. Il s'agissoit d'un remede pour la Gravelle & pour la Pierre.

M. Homberg en suivant la Theorie presente en a trouvé un pour un mal sans comparaison moins important, c'est pour les Tannes du Visage, mais les remedes qui sont les fruits du raisonnement en doivent être plus précieux, ne fût-ce que par leur rareté. Il a trouvé par experience que le Fiel de Beuf étoit un Savon semblable au Savon artificiel, c'est à dire un composé d'une Huile, & d'un Alcali. D'un autre côté il étoit persuadé que les Tannes étoient une portion huileuse & saline de la Sueur, arrêtée dans les mailles de la Peau. Sur cela, il a conçû que le Fiel de Beuf dépoüillé de sa partie huileuse & reduit à sa seule partie alcaline, devoit être un dissolvant pour les Tannes.

M. Juſſieu, Medecin de Lyon, & Succeſſeur de l'illuſtre M. Tournefort au Jardin Royal, a donné à l'Academie la Deſcription d'une Mine de Cuivre & de Vitriol, qui eſt aux environs de Lyon.

V. les M. p. 106.

NOus renvoyons entierement aux Memoires L'Ecrit de M. Homberg ſur le Mercure, deſtiné à faire partie de ſes Eſſais de Chimie.



BOTANIQUE.

SUR UNE VEGETATION SINGULIERE.

V. les M. p. 64.

NOus ne repeterons rien ici du Fait rapporté par M. Marchant, mais comme pour l'expliquer il a recours à une ſuppoſition particuliere qui appartient au Siſtême général de la multiplication des Plantes, nous en parlerons avec quelque étenduë, & nous tâcherons de l'éclaircir.

Les Oeufs des Animaux, & les Graines des Plantes, c'eſt la même choſe ; un Animal & une Plante contenus en petit l'un dans ſon Oeuf, l'autre dans ſa Graine, viennent à ſe déveloper, & alors on dit qu'ils naiſſent ; juſquelà tout eſt égal de part & d'autre. Mais les Plantes ont des manieres de naître qui ne leur ſont pas communes avec les Animaux ; il y en a pluſieurs qui peuvent venir de *bouture*, une branche de Figuier, par ex. miſe en

terre, pousse des racines, & devient une Plante entiere.

On conçoit sans peine qu'un Corps, quelque petit qu'on le suppose, soit organisé, & croisse ensuite en conservant la disposition de ses parties, mais qu'une partie devienne en croissant le tout entier, c'est ce qui ne se conçoit pas aisément, car où peut-elle prendre les autres parties organiques differentes d'elle? où la branche de Figuier a-t-elle pris des racines qui n'appartenoient qu'au Figuier entier, & qu'elle n'a jamais dû contenir en petit? on n'imagine point que de la jambe d'un Animal, il pût jamais se former son Cœur, son Poumon, enfin tout l'Animal.

Puisqu'on ne peut concevoir qu'une partie organisée se forme de nouveau, & que les Phisiciens sont obligez d'en supposer toûjours la préexistence en petit, il faut necessairement admettre dans la branche de Figuier de petites racines qui ne seroient jamais dévelopées, si elle n'avoit esté separée de l'Arbre, & mise en terre. Cette suposition doit passer d'autant plus aisément, que pour faire de la Branche un Arbre entier il ne faut ajoûter à tout ce qu'elle eût montré naturellement que des racines cachées, & que ces racines qui n'auroient point paru si la branche n'eût point esté separée, & qu'elle fût demeurée toute entiere à l'air, peuvent être déterminées à paroître par l'attouchement de la terre dans la partie qui en est embrassée. Les racines sont infiniment moins differentes du tronc, qu'une partie organique d'un Animal ne l'est de toute aute partie organique.

Toutes les manieres dont les Plantes peuvent se multiplier autrement que par graines, se reduisent pour le Sistême phisique à celle que nous venons d'expliquer, & l'on verra dans le Memoire de M. Marchant diverses experiences qui prouvent que de trés petites parties de Plantes, & qui en ont été séparées de differentes façons, vegetent & rendent la Plante toute entiere. Ainsi une Plante contient des graines dans toutes ses parties, ou, ce qui revient au même, c'est un amas & un composé d'un nombre infini de petites Plantes pareilles, qui ne

paroissent que comme parties de ce Tout, & ne montrent point ce qui pourroit les rendre elles-mêmes des Touts parfaits. Ce bisarre principe de la Philosophie Scolastique sur la maniere dont l'Ame est dans le Corps, *que le Tout est dans le Tout, & le Tout dans chaque partie*, est donc exactement vrai à l'égard des Plantes, & il est assés remarquable qu'on trouve réellement dans la matiere ce qui avoit été imaginé comme une proprieté particuliere & incomprehensible de l'Esprit.

Aprés cela, il est aisé d'apercevoir en general la cause des Vegetations singulieres, ou des Plantes monstrueuses. Il est évident que la maniere dont se forment les Animaux monstrueux expliquée dans l'Hist. de 1702 * ne produiroit pas des Plantes qui le fussent, mais si par quelque accident une partie d'une Plante met au jour ce qu'elle n'y doit pas mettre comme simple partie, & qu'elle devienne une espece de Tout à part, quoi qu'attachée au grand Tout, c'est un Monstre. On en avoit déja vû un exemple dans les Mem. de 1707. * La structure méchanique des Plantes étant beaucoup plus simple que celle des animaux, & par consequent moins susceptible de bisarreries fortuites, les Monstres de Botanique sont aussi en moindre quantité, & moins surprenants.

* p. 28.

* p. 488.

SUR LA CIRCULATION DE LA SEVE DANS LES PLANTES.

EN 1667, dés la naissance de l'Academie, feu M. Peraut, homme plein de vuës, & de vuës le plus souvent hardies, qui sentoient l'esprit original, avança cette proposition alors fort surprenante, que la séve circule dans les Plantes, comme le sang dans les Animaux. On ne savoit pas encore qu'un Medecin de Hambourg l'avoit

publiée deux ans auparavant. Un an & demi aprés, M. Mariotte ayant été reçû dans la Compagnie, mit en avant la même propoſition comme toute nouvelle, mais il trouva que M. Perraut l'avoit prévenu, & s'il fut bien aiſe que cette conformité fût une eſpece de preuve du Siſtême, peut-être fût-il fâché qu'on lui en eût enlevé le premier honneur. L'Illuſtre M. Malpighi, en qui le genie de l'invention a tant brillé, a été auſſi dans la même penſée. Mrs Perrot & Mariotte l'ont tous deux expoſée au Public avec toutes ſes preuves dans leurs *Eſſais de Phiſique.* Cependant l'Académie, qui ſe pique d'une ſage lenteur, n'en a jamais été pleinement convaincuë, & Mrs du Clos & Dodart entre autres ont toûjours proteſté contre cette opinion.

M. Dodart convenoit bien qu'il y a un ſuc qui de la racine des Plantes monte juſqu'aux extremitez des branches, & même des feuilles, & un ſuc qui de ces extremités deſcend aux racines. Une de ſes principales raiſons étoit que ſi on tranſplante en un même jour deux Arbres de même eſpece, après leur avoir coupé leurs branches & leurs racines, ſi enſuite, les deux Arbres ayant repris, on retranche à l'un des deux quelques-unes des nouvelles branches de chaque année, on verra qu'il profitera beaucoup moins que l'autre par le tronc, & par les racines, ce qui prouve que ces parties reçoivent une nourriture des branches. Il concevoit que cette nourriture étoit plus aërienne, puiſqu'elle étoit formée des humidités de l'air, de la roſée, &c. au lieu que celle qui venoit des racines étoit plus terreſtre. Mais enfin il prétendoit que le ſuc montant & le ſuc deſcendant n'étoient pas le même, ou que celui qui avoit monté ne redeſcendoit point, & reciproquement, & que par conſequent il n'y avoit point de circulation.

M. Magnol a attaqué ce Siſtême encore plus directement en répondant en détail à tous les raiſonnemens & à toutes les experiences qui compoſent le Traité de M. Perraut ſur ce ſujet.

Ses raisonnemens sont tirés la plûpart de l'Analogie des Plantes & des Animaux, qui rend égale de part & d'autre la necessité de la circulation. Mais cette Analogie, quoique specieuse, & en quelque façon séduisante, quand on veut bien s'y prêter un peu, ne conclut pas beaucoup quand on la traite à la rigueur, & il n'est pas difficile à M. Magnol de répondre à tout ce qu'elle a fourni. Nous ne nous arrêterons pas sur cet article, parce que ce sont de simples probabilités, qu'il est également aisé d'établir & de détruire.

Les experiences sont plus décisives, ou du moins elles le devroient être, mais souvent il n'est pas plus facile d'en faire une bien incontestable & bien concluante qu'une démonstration phisique, qui consisteroit en un simple raisonnement. De 25 Experiences que M. Perraut avoit rassemblées pour appuyer son sistême, M. Magnol en nie la plûpart, & il prétend que les autres ne prouvent rien. Nous ne nous attacherons qu'à tout ce qu'il y a dans tout cela de plus important.

M. Perraut avoit avancé que quand de jeunes rejettons avoient été gelés ou broutés par les Animaux, le reste de l'Arbre languissoit ou mouroit, parce que les mauvaises qualités contractées par ces accidens se communiquoient à tout le corps de la Plante par le moyen de la circulation; que par la même raison le Guy, & la Mousse tuoient les Arbres; que quand on leur ôtoit entierement leurs feuilles, leurs fruits ne profitoient pas tant, parce qu'ils étoient privés du suc qu'elles devoient leur renvoyer; que si on fait une ligature à la tige d'une Plante qui soit de nature à rendre beaucoup de suc, comme le grand Tithimale, la tige s'enfle au dessus de la ligature, ce qui prouve & qu'il y a un suc qui descend, & que ce suc est plus grossier & plus épais que celui qui monte, puisque celui-ci n'a point causé de gonflement; que si l'on coupe la tige d'un Pavot quatre doigts au dessous de sa tête, lorsqu'elle commence à meurir, on voit sortir un suc fort blanc de bas en haut, & un jaunâtre de haut en bas.

M. Magnol nie nettement tous ces faits. On ne doute pas que M. Perraut ne les eut vûs, mais apparemment il ne les avoit pas aſſés repetés, aſſés tournés de differens ſens, & pour ainſi dire, aſſés chicanés. Il faut ſe défier d'une experience où l'on voit ce qu'on veut voir.

Il y a pluſieurs autres faits que M. Magnol reçoit, mais dont il conteſte les conſequences. Par ex. il y a des Arbres comme le Sureau, la Vigne, &c. dont les branches ayant été couchées en terre y prennent racine, après quoi ſi on les coupe, & qu'on les ſépare de l'Arbre, elles deviennent elles-mêmes de nouveaux Arbres, dont la poſition eſt contraire à ce qu'elle eût été naturellement. Il eſt bien vrai qu'alors la ſéve qui doit nourrir l'Arbre a un mouvement contraire à celui qu'elle eût eu dans les mêmes canaux, mais cela prouve ſeulement que ces canaux la laiſſent indifferemment couler d'un ſens ou d'un autre, ſelon qu'ils ſont poſés par rapport à la terre. Cette indifference ſera encore plus ſenſible, ſi on peut faire, & même aſſés facilement, comme quelques Auteurs l'ont écrit, que les racines d'un jeune Tilleul deviennent ſes branches, & ſes branches ſes racines.

Aux experiences par leſquelles M. Perraut fait voir qu'il y a differens ſucs dans les Plantes, M. Magnol répond auſſi en convenant qu'ils y ſont, & qu'ils y doivent être, puiſqu'il y a des parties de differente nature à nourrir, mais en niant que ces ſucs montent, & puis deſcendent pour remonter.

M. Perraut avoit conçû que ceux qui retournoient des extrémités des branches à la racine étoient deſtinés à la nourrir, au lieu que ceux qui partent de la racine ſont deſtinés à nourrir le reſte de l'Arbre. M. Magnol combat cette penſée par pluſieurs experiences. 1°. Une Plante vivace coupée juſqu'à la racine repouſſe avec vigueur, quoique ſuivant cette hipothêſe la racine privée de toute nourriture dût mourir. 2°. De même un Olivier coupé rés terre pouſſe quantité de rejettons qui deviennent Arbres. 3°. Une Bulbe miſe en terre pouſſe pluſieurs racines avant

les feüilles. Ce n'eſt donc pas le ſuc deſcendu des feüilles qui nourrit les racines.

La circulation par laquelle les ſucs ſont plus briſés, plus attenués, & en quelque ſorte plus tourmentés que par un ſimple mouvement direct, engageoit M. Perraut à dire que les Plantes ont beſoin d'une nourriture extrement préparée. M. Magnol ne convient pas de la neceſſité de cette grande préparation. Il a fait tremper pendant une nuit une tige de Tubereuſe en fleur dans du ſuc de *Solanum racemoſum* mêlé d'un peu d'eau. Ce ſuc eſt de couleur de laque, & la Tubereuſe eſt devenuë d'un beau couleur de roſe. Il ne paroît pas que les ſucs qui ont fait ce changement de couleur, & qui par conſequent ont très-intimement nourri la Plante, ayent pû être fort alterés ni fort travaillés. On ſait auſſi qu'il ne faut qu'un peu d'eau pour remettre en vigueur une Plante arrachée de terre qui commence à ſe flétrir, & quelquefois même pour la faire vegeter.

Après tout cela cependant il faut avoüer qu'il reſte à M Perraut quelques preuves qu'il n'eſt pas aiſé de détruire. Il avoit arraché de terre pluſieurs Plantes pareilles & entieres avec leurs racines, & il en prit une dont le tronc ſe diviſoit en deux branches; il la plongea dans l'eau ſeulement par le bout d'une des deux branches, elle y fut quelques jours, & non ſeulement elle s'entretint fraîche, mais elle pouſſa de nouvelles feüilles du côté qui n'étoit pas moüillé, tandis que les autres Plantes ſe deſſecherent entierement. D'autres Auteurs ont ajoutés une experience ſemblable. Quand on peut rencontrer par haſard un Arbre porté par deux groſſes racines dont l'une eſt découverte d'environ un pied & demi, on la coupe à 4 doigts de terre, de ſorte que ſa partie ſuperieure qui eſt de plus d'un pied doit perir, ſi elle ne tire ſa nourriture que de la terre, car elle n'a plus de communication avec elle. Cependant loin de perir elle pouſſe l'année ſuivante des branches & des feüilles. Ces faits qui ne ſont point conteſtés, marquent un mouvement par lequel la

Séve

Séve se porte de haute en bas. Mais est-ce un mouvement de circulation? voici un autre fait qui le prouve, ou du moins qu'il y a un suc qui monte, & un autre suc different qui descend par d'autres canaux.

On a pris un morceau d'un petit Rameau d'Orme sans nœuds, long environ de 3 pouces, & on lui a mis à chaque bout un entonnoir fait avec de la cire; on a coupé le rameau en deux, & on en a versé de l'eau dans les entonnoirs. Elle n'a passé que dans le morceau de bois dont l'entonnoir étoit appliqué au bout qui regardoit les branches. Aprés cela, au lieu d'eau on a mis dans les entonnoirs de l'esprit de vin, qui a distillé promptement par le morceau par où l'eau n'avoit pû passer, & n'a passé que long-temps aprés par celui qui avoit laissé couler l'eau. La même chose est arrivée à d'autres especes de bois. Vû la position qu'avoit les deux morceaux du rameau, lorsqu'il faisoit partie de l'Arbre, M. Perraut a conclu que les caneaux qui laissoient passer l Esprit de vin étoient *montants*, & ceux qui laissoient passer l'eau *descendants*, & que la liqueur qui couloit dans les canaux montants étoit plus spiritueuse & plus subtile, & celle des caneaux descendants plus aqueuse, plus grossiere. Jusquelà tout est assés prouvé, du moins pour quelques especes d'Arbres, & ensuite c'est une conjecture qui peut passer pour vraisemblable, que ces deux liqueurs differentes ne sont que la même, qui étant remplie de parties spiritueuses, lorsqu'elle a monté de la racine, en a laissé en chemin la plus grande quantité pour la nourrirure du tronc & des branches, & aprés cela n'a rapporté des extremités des branches que ses parties les plus grossieres mêlées avec les humidités de l'air, ou avec les eaux de la pluye. M. Perraut imaginoit de plus que cette Séve qui retourne devoit être plus propre à la nourriture des racines.

Sur cette matiere, comme sur beaucoup d'autres, on peut encore attendre les lumieres du tems. Il est difficile en Phisique d'aller jusqu'à un Sistême, il l'est même quelquefois d'en détruire un absolument.

DIVERSES OBSERVATIONS BOTANIQUES.

I.

LEs Religieux de Joyenval ayant mangé de la Jusquiame dans une Salade le Mercredi saint au soir, ils dormirent trés mal la nuit, eurent de grands maux de tête, & des retentions d'urine, & le lendemain ils étoient comme des gens yvres, ne pouvant lire, ni presque parler, & il leur fut absolument impossible de dire l'Office du Jeudi saint. C'est de M. Chevalier que l'Academie aprit cet accident.

II.

Un Orme des Tuilleries qui à l'entrée du Printemps de 1708 étoit entierement dépoüillé de son écorce depuis le pied jusqu'au branches, ne laissa pas de pousser sa séve dans toutes ses parties, & d'entretenir ses feüilles pendant tout l'Eté suivant, avec moins de vigueur cependant que les autres Ormes. M. du Puis premier Jardinier des Tuilleries le fit arracher en Autonne, persuadé qu'il ne pouvoit plus subsister à l'avenir. C'est dommage qu'on ne l'ait pas laissé vivre autant qu'il auroit pû, mais les interests de la Phisique, & ceux de la beauté du Jardin se sont trouvés differents. M. Parent a montré à l'Academie une attestation de M. du Puis sur ce fait, qui meritoit effectiment d'être bien certifié, car on a crû jusqu'apresent l'écorce beaucoup plus necessaire à la vie des Arbres.

III.

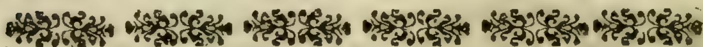
M. Magnol sur l'usage de la Moëlle des Plantes a rapporté cette experience. En Languedoc on ente les Oliviers en Ecusson au mois de Mai, quand ils commencent d'être en séve au tronc, ou aux grosses branches. On coupe l'écorce horisontalement de la largeur de 3 ou 4

doits tout autour du tronc ou des branches, un peu au dessus de l'ente, de sorte que le bois ou corps ligneux est découvert, & que l'Arbre ne peut recevoir de nourriture par l'écorce. Il ne perd pourtant pas encore ses feüilles, elles sont nourries par le suc, qui étoit déja monté. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que l'Arbre porte dans cette année des fleurs & des fruits au double de ce qu'il avoit coûtume d'en porter. Ensuite les branches au dessus de l'ente, étant privées du suc qui doit monter par l'écorce, meurent, & les rejettons qui sortent de l'ente font un nouvel Arbre, Il paroît par-là que le suc qui monte par l'écorce n'est pas celui qui fait les fleurs & les fruits, que c'est donc celui qui a passé par la Moëlle, & y a été préparé, que la quantité du suc qui devoit naturellement passer par la Moëlle a été augmentée de celui qui ne pouvoit plus passer par l'écorce, & que c'est là ce qui a causé la multiplication des fleurs & des fruits. En effet la Moëlle des Plantes est, comme celle des Animaux, un amas d'une infinité de petites Vesicules, qui paroissent destinées à filtrer & à travailler un suc plus finement qu'il ne seroit necessaire pour la seule nourriture du bois. M. Magnol a observé que les Plantes qui ont beaucoup de Moëlle, comme le Rosier, le Troësne, le Lilac, ont aussi beaucoup de fleurs & de graines, & que dans les Plantes ferulacées la Moëlle monte de la tige jusqu'à la semence; il dit même que les longues semences du *Myrrhis odorata*, n'étant pas encore mûres, ne sont visiblement que de la Moëlle.

M. Marchant a donné la Description du *Dracunculus, sive Serpentaria triphylla Brasiliana*, de l'*Heliotropium maius*, & de l'*Helenium vulgare*, ou *Enula Campana*, Aulnée.

M. Chomel a donné celle de l'*Apium Pyrenaïcum Thapsiæ facie*, Inst. Bot. ou *Seseli Pyrenaïcum Thapsiæ facie*, D. Fagon Schol. Bot. Parad. Bot.

* p. 42. M. Juſſieu dont nous avons déja parlé cy-deſſus * ſucceſſeur de l'amour de M. Tournefort pour la Botanique, auſſi bien que de ſa place au Jardin Royal, a fait voir quelques Plantes qu'il a cruës nouvelles, & entre autres une eſpece de *Chondrille*, dont il a donné la deſcription.



ALGEBRE.

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITÉS.

V. les M. p. 320 & 419. * p. 71. & ſuiv. L'Hiſt. de 1708 a deja expliqué * & la fameuſe Regle de M. Deſcartes pour la Conſtruction des Egalités déterminées, & les défauts que M. Rolle y trouve, malgré l'applaudiſſement avec lequel elle a été reçûë par les Geometres, & même malgré le grand nombre de ſuccés qu'elle a eû juſqu'à preſent dans la pratique. En un mot il n'y a aucun inconvenient poſſible où M. Rolle ne prétende qu'elle tombe quelquefois, & même pour ne rien diſſimuler, pas trop rarement; de ſorte que les Geometres qui l'ont un peu maniée, & qui n'en ont pas ſenti les défauts, ont dû, ou être bien heureux à tomber dans les cas qui lui ſont favorables, ou en ſavoir éviter les écueils avec beaucoup d'adreſſe, ou ſe prendre à eux mêmes des embarras qu'elle leur produiſoit, & ne s'en pas vanter. M. Rolle a continué cette année le détail de ces défauts qu'il avoit commencé l'année derniere. L'idée generale

que nous en avons donnée est suffisante, & nous ne la repeterons pas.

Ensuite il a voulu remonter aux sources des inconveniens, & il a commencé à en découvrir une. C'est l'*Evanoüissement* des Inconnuës.

Quand on travaille à resoudre un Problême, on en exprime chaque condition par une Equation algebrique, où il entre des quantités inconnues differemment mêlées & combinées avec les Connues. Comme on ne cherche qu'à diminuer le nombre des Inconnuës, & à s'en delivrer dans le Calcul, lorsqu'une même Inconnuë ce qui arrive presque toûjours, se trouve dans plus d'une Equation, on tire de deux Equations sa valeur exprimée par des lettres differentes d'elle, aprés quoi on ne se sert plus dans les operations que de cette valeur, & l'Inconnuë est entierement chassée du Calcul, ou *évanoüie*. L'équation où l'Inconnuë évanoüie ne se trouve plus, s'appelle la *Reduite*. Il est visible que si deux Equations qui auroient chacune deux Inconnuës, & qui par consequent seroient indéterminées, avoient deplus les mêmes Inconnuës, il n'y auroit donc qu'à en faire évanoüir l'une ou l'autre, pour avoir une Reduite qui seroit une Equation déterminée. Cest pour ces sortes d'Equations, ou pour la construction des Problêmes qui en dépendent, que M. Descartes avoit imaginé sa Regle. Par consequent si dans la Methode d'évanoüir les Inconnuës il y a quelque défectuosité, il ne sera pas étonnant, que celle de la Construction des Egalités s'en ressente.

On n'a point encore douté que la Reduite ne contînt toutes les conditions des deux Equations *primitives* ou *generatrices* dont on l'a formée, car on ne l'a formée qu'en concluant que deux quantités étoient égales entre elles, puisqu'elles étoient égales à une troisiéme, conclusion la plus évidente & la plus infaillible sur laquelle l'Esprit humain puisse compter. Cependant M. Rolle prouve par un assés grand nombre d'exemples que la Reduite peut être fort differente des generatrices, que par ex. & c'est

uniquement sur quoi il insiste jusqu'à present, deux generatrices exprimant les conditions d'un Problême impossible, la Reduite en pourra exprimer un possible. Cela se reconnoît en ce que la Reduite ayant des Racines réelles quand on vient à les appliquer aux generatrices, on voit ces Equations n'avoir plus que des Racines imaginaires ou aboutir à des contradictions. Or on sait qu'en Geometrie le réel, & l'imaginaire, ou le contradictoire, sont les marques certaines du possible & de l'impossible. D'où peut venir cette bisarrerie ? où la Reduite peut-elle avoir pris des Racines, non seulement differentes de celles des generatrices, mais d'une nature toute contraire ? comment l'impossibilité & la contradiction des generatrices produit-elle de la possibilité & de la realité dans la Reduite ? Nous allons tâcher de le faire entendre par des reflexions assés simples, & si simples, que peut-être sera-t-on surpris de l'avoir esté.

Que l'on suppose une Inconnuë prise 2 fois égale à 5 ; cette Equation est impossible en nombres entiers, c'est à dire qu'il est impossible que l'Inconnuë soit un nombre entier, & cela est trés évident, puisqu'étant prise 2 fois elle seroit un nombre pair, qui ne peut être égal à 5. Que l'on suppose la même Inconnuë prise 4 fois égale à 7, l'Equation est encore impossible par la même raison. Maintenant que l'on dispose ces deux Equations de maniere que leur second membre soit Zero, ce qui est la forme la plus ordinaire que l'on donne aux Equations, & qu'ensuite on les ajoûte l'une à l'autre, elles produiront une troisiéme Equation dont le second membre sera encore Zero, parce que deux Zero sont Zero. Mais cette troisiéme Equation donnera l'Inconnuë prise 6 fois égale à 12, c'est à dire l'Inconnuë égale à 2, & par consequent ce sera là une Equation trés possible & trés réelle produite par deux Equations impossibles & contradictoires.

L'origine de cette difference entre les deux premieres Equations & la troisiéme est bien claire. Deux nombres impairs mis ensemble en font un pair, & la reünion des

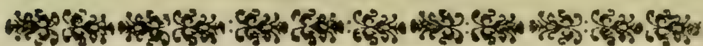
deux premieres Equations a entierement corrigé tout ce qui faisoit l'impossibilité de chacune separément. Cet exemple, méprisable peut-être par son trop de simplicité & d'évidence, n'est ici que pour faire appercevoir en general comment dans des cas plus compliqués l'impossible peut produire le possible.

L'impossibilité des generatrices peut tenir à differentes choses, qui disparoîtront par leur réünion dans la Reduite. Par ex. cette impossibilité venoit de ce que l Inconnuë qu'on a évanoüie étoit élevée au quarré, & si c'eût été un simple plan, l'Equation étoit possible; dés que l évanoüissement a chassé ce quarré, la Reduite doit être toute réelle. L'impossibilité étoit fondée sur ce que chacune des generatrices avoit une Racine imaginaire, or le produit de l'imaginaire par l'imaginaire peut être réel; si en fermant la Reduite on a multiplié les deux Racines imaginaires l'une par l'autre, il peut donc n'y rester plus rien que de réel. Plus generalemeut encore, on voit en y faisant un peu d'attention, que tous les rapports, ou pour mieux dire, toutes les combinaisons de rapports que les grandeurs connuës ou inconnuës ont entre elles dans les Equations generatrices, ne passent pas dans la Reduite, il s'en éclipse quelques-uns avec l'Inconnuë qui s'évanoüit, il s'en introduit d'autres par la nouvelle face que prend la Reduite, & il peut arriver assés naturellement que l'impossibilité des deux generatrices s'en aille avec les rapports qui s'en vont, ou soit reparée par ceux qui surviennent.

Ceci peut donner une démonstration *à priori* d'une chose que M. Rolle n'a fait qu'avancer dans son Memoire. Il dit que quand il y a plus de deux generatrices, qui conspirent à donner une Reduite, ce qui arrive souvent, plus il y en a, plus le nombre des inconveniens, que produit la Methode, peut être grand. C'est que le nombre de ces rapports dont nous venons de parler sera plus grand aussi. Il peut s'y joindre encore d'autres causes d'inconveniens.

Ce qui a pû tromper, c'eſt que quand des Generatrices on tire la Reduite, il eſt certain qu'on raiſonne bien en un ſens; on tire une Equation qui eſt vraye, & qui doit l'être dans toute ſon étenduë, mais ce n'eſt pas à dire qu'elle renferme tout ce qui étoit dans ſes generatrices, ni même préciſément & parfaitement tout ce qui leur étoit commun, & ſi on le prétend, on eſt dans l'erreur, parce qu'on tire une concluſion trop forte. En un mot, il eſt ſûr que l'Egalité qu'on déduit eſt bien déduite, mais non pas qu'en la comparant à celles dont elle eſt déduite, on n'y doive trouver rien de changé.

S'il peut naître des effets biſarres du ſeul changement de deux generatrices en une Reduite, ou, ce qui eſt la même choſe, de l'évanoüiſſement d'une Inconnuë, il ne doit pas être étonnant que l'introduction d'une Inconnuë nouvelle produiſe des nouveautés, & ſoit ſujette à des inconvenients impréveus. Or cette introduction ſe fait toutes les fois que l'on veut conſtruire ſelon la Regle de M. Deſcartes une Equation déterminée. Il n'en faut pas davantage pour faire apercevoir en general la ſource purement logique des erreurs. Il ne nous eſt pas permis de ſuivre M. Rolle juſque dans le geometrique.



GEOMETRIE.

SUR DES FIGURES EGALES EN SURFACE COURBE, ET EN SOLIDITE'.

V. les M. p. 118. ARchimede, l'un des plus puiſſants Genies, qui ayent jamais été en Mathematique, a découvert le premier que la ſurface d'une Sphére, & celle du Cilindre circonſcrit,

circonſcrit, priſe ſans les deux baſes planes, ſont égales, & même *continuellement* égales, c'eſt-à-dire, non ſeulement dans leur tout, mais encore dans leurs parties correſpondantes, lorſque ces deux Corps ſont coupés en tranches par des lignes perpendiculaires à leur axe commun. Il découvrit encore que la ſolidité de la Sphére eſt à celle de ſon Cilindre circonſcrit comme 2 à 3, & tout le monde ſaît qu'il voulut que ces deux figures fuſſent repreſentées ſur ſon tombeau, comme des monuments éternels de ſa gloire. A la Sphére, & au Cilindre, il ajoûta le Cone droit, qu'il compara à ces deux autres Corps, tant en ſurface courbe qu'en ſolidité.

Il fit encore plus. Il créa de nouveaux Corps pour les étudier, ce furent les Solides qu'il conçut que formeroient les trois Sections Coniques en tournant autour de leurs Axes. Elles lui en produiſirent quatre, parceque l'Ellipſe a deux Axes, & même elles en auroient dû produire cinq, puiſque l'Hyperbole a deux Axes auſſi, mais Archimede ne conſidera la revolution de l'Hyperbole qu'autour de ſon Axe traverſal, ou *premier*, & M. Walis eſt le premier qui l'ait fait tourner autour de l'Axe conjugué; il a nommé *Cylindroïde* le Solide qu'elle forme par cette revolution. Archimede compara les ſolidités de ſes nouveaux Corps à celles de la Sphére, du Cilindre, & du Cone, mais non pas les ſurfaces; du moins il ne nous en reſte rien dans les Ecrits qui ſont venus de lui juſqu'à nous.

M. Huguens dans ſon fameux Traité de la Pendule donna les rapports de ces ſurfaces, excepté celle du Cylindroïde, mais ſans les démontrer. La methode qui l'y avoit conduit lui parut digne d'être cachée. M. Parent ſe piqua de démêler le miſtere, & y reüſſit. Il trouva, outre les ſurfaces des Solides d'Archimede, celle du Cylindroïde de M. Wallis, & il y reconnut cette proprieté remarquable, que quand les deux Axes conjugués de l'Hyperbole qui a produit ce Solide, ont une certaine proportion avec ceux d'un Sphéroide *aplati* qui y ſera inſcrit, les ſurfaces de ces deux Solides ſeront continuellement éga-

les, comme le sont celles de la Sphére, & du Cilindre circonscrit. La proposition d'Archimede peut même n'être qu'un simple Corollaire de celle de M. Parent, parce qu'il est fort aisé de changer le Cylindroïde en Cilindre, & le Spheroïde en Sphére.

M. Parent trouva aussi un rapport continuel & constant, qui est entre une portion quelconque de la surface d'un Cone droit, & sa projection sur sa base, & il presenta en 1697 toutes ces recherches à l'Academie, où il n'avoit pas encore été reçû.

Il s'avisa ensuite de faire tourner un Quart de cercle autour du diametre auquel la Tangente de son point du milieu seroit parallele. Cela forme une espece d'Anneau large, toûjours plus élevé dans son milieu. Il y inscrivit une Sphére, il s'aperçut que non seulement la surface interieure de l'Anneau, & celle de la Sphére, mais encore leurs solidités étoient continuellement égales, ce qui lui parut avec justice plus singulier que tout ce qu'il avoit trouvé jusque là. C'étoit pour la premiere fois que cette double égalité entre les deux mêmes Corps paroissoit en Geometrie. Aussitôt M. Parent songea à la trouver entre d'autres Corps pris à volonté, & il en fit un Problême tout nouveau. Il supposa une Sphére déterminée avec laquelle ils devoient avoir la double égalité, & par consequent l'avoir entre eux.

* p. 71. & 72. Nous avons dit dans l'Hist. de 1706. * la raison essentielle pour laquelle le Cercle est de toutes les Courbes possibles celle qui dans un circuit égal comprend le plus grand espace, & par la même raison la Sphére est de tous les Corps celui qui sous une surface égale à la plus grande solidité. Delà il suit évidemment qu'il est impossible qu'aucun Corps soit égal à une Sphére en surface & en solidité à la fois, à moins qu'il n'y ait une certaine partie de sa surface qui ne soit point comptée, & pour cela M. Parent prend des Corps tels que des Cilindres, des Cones, &c. dont la surface totale a une partie plane, & l'autre courbe, & ne compte point la partie plane. Ainsi

il ne s'agit dans ce Problême que de la ſurface courbe & convexe d'un Cilindre, ou d'un Cone, par ex. & on n'y comprend point leur baſe circulaire. Par la même raiſon, quand on aura trouvé un Cilindre, par ex. égal en ſurface & en ſolidité à la Sphére propoſée, on ſaura qu'il ſera impoſſible de trouver un Spheroïde, un Fuſeau, enfin quelque autre Corps que ce ſoit terminé par une ſeule ſurface courbe, qui ait cette double égalité avec ce Cilindre, car il faudroit donc qu'il l'eût auſſi avec la Sphére, ce qui ne ſe peut.

En égalant differents Corps à la Sphére, M. Parent trouve quantité de nouvelles proprietés geometriques dans leſquelles nous n'entrerons point. Nous en détacherons ſeulement quelques-unes, ou des plus ſimples, qui ſerviront d'exemples, ou des plus générales, qui apartiendront de plus prés au Siſtême de la Geometrie.

Le Cilindre qui a la double égalité avec la Sphére eſt tel que le rayon de ſa baſe eſt les deux tiers du rayon de la Sphére, & que ſa hauteur eſt triple de ce même rayon, d'où il ſuit évidemment que le rayon de ce Cilindre eſt à ſa hauteur, comme 2 à 9. & ſon diametre à ſa hauteur, comme 4 à 9. Il eſt évident auſſi que le diametre de la Sphére eſt à celui du Cilindre, comme 6 à 4, & par conſequent le diametre de la Sphére eſt 6, moyen proportionel entre 4 & 9, c'eſt à dire entre le diametre du Cilindre, & ſa hauteur, ce qui eſt aſſés remarquable.

On voit que ce Cilindre eſt unique, au lieu que s'il n'étoit queſtion que de l'une ou de l'autre des égalités, on trouveroit une infinité de Cilindres differents qui la pourroient avoir avec la Sphére. Il y a deux Cones droits, qui ont avec la Sphére ces deux égalités, mais ſi on les cherche dans le Cone droit *tronqué*, c'eſt à dire dont on retranche une partie vers ſon ſommet par un plan parallele à ſa baſe, on trouve une infinité de ces Cones, ou, ce qui revient au même, une infinité de Cones dont le diametre & la hauteur ont des proportions differentes, qu'il faut tronquer de maniere que les hauteurs qui leur

restent soient inégales. Cela vient de ce qu'une infinité de Cones de differentes proportions peuvent surpasser plus ou moins en surface & en solidité la Sphére proposée, & par conséquent pour retrancher leurs differents excés, les hauteurs qu'on leur laissera doivent être differentes. Cette infinité de Cones tronqués est cependant renfermée entre certaines bornes que le calcul de M. Parent détermine.

Il cherche aussi à égaler à la Sphére proposée une Sphére *tronquée*, ou une tranche de Sphére, terminée par deux cercles paralleles & égaux pris à discretion vers ses deux poles. Il semble que l'on doit trouver une Sphére d'un plus grand rayon à laquelle cette tranche appartiendra, & c'est la valeur de ce rayon plus grand qu'il faut découvrir. Mais il n'en vient aucun autre par le calcul que le rayon même de la Sphére proposée, c'est à dire que la Sphére proposée entiere est elle-même la tranche qui lui est égale en surface & en solidité. Il ne faut point être étonné qu'une Sphére entiere vienne au lieu d'une tranche que l'on cherchoit, car elle est une tranche pourvû qu'on imagine que c'est la Sphére moins les deux cercles infiniment petits des poles, ce qui ne la diminue point, & il est visible qu'etant ainsi conçûë elle est terminée comme l'on demandoit. Mais il est assés étonnant qu'il n'y ait aucune Sphére plus grande que la proposée, & dont une partie telle qu'on la demande ait avec la proposée la double égalité. Voici la cause qu'on peut concevoir de ce paradoxe.

Que l'on détermine à une Sphére un Equateur, & des Poles, & qu'on la divise de degré en degré depuis l'Equateur vers un pole, toûjours parallelement à ce grand cercle, il est assés évident que dans ces differentes tranches, toutes d'un degré, la proportion de la surface courbe à la solidité sera differente. La 89me, par ex. qui comprend le pole, aura beaucoup de surface, & peu de solidité, & la 1re aura beaucoup de solidité & peu de surface. En un mot, la proportion de la surface à la solidité, va toûjours

en diminuant depuis le Pole jusqu'à l'Equateur. Il n'y a donc dans la demi-sphere aucune tranche où cette proportion soit la même que dans une autre tranche quelconque. Delà il suit que si à la 1re tranche on joint celle qui lui répond de l'autre côté de l'Equateur, aux 2 premieres pareillement les deux correspondantes, &c. aucune de ces nouvelles tranches, n'aura la même proportion de surface & de solidité qu'une autre quelconque, ni par conséquent que la Sphére entiére, qui peut être prise elle-même pour une tranche, ni qu'aucune autre Sphére, puisque toutes les Sphéres sont semblables. Donc il est impossible qu'une Sphére soit égale en surface & en solidité à une tranche spherique proprement dite, & autre qu'elle-même.

Il faut bien remarquer que cette tranche sphérique, sur laquelle tombe la conclusion de nôtre raisonnement doit être telle que le raisonnement l'a supposée, c'est à dire comprendre toûjours l'Equateur en son milieu, de quelque grandeur qu'elle soit. Si l'on prend une tranche d'une autre espece, comme celle qui auroit un Pole en son milieu, ce qu'on appelle un *Segment* de Sphére, ce n'est plus la même chose, & nôtre raisonnement ne conclut point qu'un segment ne puisse avoir la même proportion de surface & de solidité que la Sphére. Au contraire il paroist clairement que dans le segment comme dans la demi-sphére la proportion de la surface à la solidité va toûjours en diminuant depuis le pole, & enfin le calcul fait voir qu'il y a un certain segment où cette proportion diminüe depuis le pole jusqu'au plus grand cercle du segment, précisément de la même maniere dont elle diminüe depuis le Pole jusqu'à l'Equateur, desorte que le segment & la demi-sphére étant divisés en un nombre égal de parties, chaque partie du segment auroit la même proportion de surface & de solidité que la partie correspondante de la demi-sphére, & comme la demi-sphére a la même proportion de surface & de solidité que la Sphére entiere, le segment auroit aussi la

même proportion que la Sphére. La determination geometrique du ſegment qui a cette proprieté eſt un endroit des plus curieux & des plus remarquables de la Theorie de M. Parent, qui cependant eſt arrivé à cette verité ſans conſiderer la proportion des ſurfaces & des ſolidités.

Il a cherché quel ſeroit le rayon d'une Sphére dont un ſegment auroit la double égalité avec la Sphére propoſée, & il a trouvé pour le rayon cherché deux valeurs, l'une eſt le rayon même de la Sphére propoſée, l'autre, un plus grand rayon. Delà il ſuit que la Sphére propoſée eſt elle-même le ſegment cherché dans le même ſens que nous avons vû qu'elle pouvoit être une tranche ſphérique autrement priſe, & puiſqu'il y a un veritable ſegment d'une autre Sphére plus grande qui lui eſt égal en ſurface & en ſolidité, il a donc la même proportion de ſurface & de ſolidité qu'une Sphére. Mais dans la Sphére propoſée il y a neceſſairement un ſegment ſemblable à celui là, & par conſequent il y a dans cette Sphére & dans toute autre un certain ſegment qui a la même proportion de ſurface & de ſolidité que la Sphére même.

La conſideration de cette proportion donne la raiſon eſſentielle, qui fait qu'une infinité de Cones tronqués ſont égaux à la Sphére propoſée, & que cette infinité eſt renfermée dans des bornes. Il eſt clair que non ſeulement dans le Cone en general la proportion de la ſurface à la ſolidité va toûjours en croiſſant depuis la baſe juſqu'au ſommet, mais même qu'elle croiſt davantage dans un Cone plus *aigu*, c'eſt à dire, dont la hauteur eſt plus grande par rapport au rayon de ſa baſe. Cette même proportion, variable dans tous les Cones differents ſelon qu'ils ſont plus ou moins aigus, eſt conſtante dans toutes les Sphéres. Il eſt aiſé d'imaginer un Cone plus grand que la Sphére propoſée tant en ſurface qu'en ſolidité, mais ſi aigu que la proportion de la ſurface à la ſolidité y ſurpaſſera beaucoup celle qui appartient à la

Sphére, & à tel point qu'elle la ſurpaſſera encore vers ſa baſe, quoi qu'elle y ſoit moindre qu'ailleurs, de ſorte qu'il ſera impoſſible de couper ce Cone de maniere que le reſte ou Cone tronqué ait la double égalité avec la Sphére. De même on peut imaginer un Cone plus grand que la Sphére, mais ſi peu aigu ou ſi *obtus*, que la proportion de la ſurface à la ſolidité y ſera beaucoup ſurpaſſée par celle qui appartient à la Sphére, & à tel point qu'elle le ſera encore vers le ſommet, quoi qu'elle y ſoit plus grande. Il y a donc dans le nombre infini de Cones plus grands que la Sphére propoſée tant en ſurface qu'en ſolidité, ne fuſſent-ils plus grands que d'une certaine quantité déterminée, un nombre infini de Cones ſi aigus, & un autre nombre infini de Cones ſi obtus, que l'on n'en ſauroit tirer des Cones tronqués égaux à la Sphére, & par conſequent le nombre de Cones tronqués qui peuvent avoir cette égalité, eſt compris entre deux termes extrêmes, où il n'y a que des Cones de certaines dimenſions. La varieté de ces dimenſions fera varier la proportion de la ſurface à la ſolidité depuis la baſe juſqu'au ſommet, & par conſequent ſera cauſe qu'il faudra tronquer ces Cones à differentes diſtances du ſommet, ou, ce qui eſt la même choſe, leur laiſſer differentes hauteurs, d'où il ſuit que leur nombre eſt infini, quoique l'étendüe dans laquelle la variation de leur hauteur eſt compriſe, ne ſoit que finie,

Voilà les principales reflexions, &, à ce qu'il nous paroiſt, les plus inſtructives que nous puiſſions faire ſur la recherche de M. Parent. Il égale encore à la Sphére pluſieurs autres corps, le Paraboloïde, le Cone coupé de maniere que la baſe du ſegment ſoit ou une Ellipſe, ou une Parabole &c. mais tout cela ne demande que beaucoup de geometrie, & de calcul.

Il s'eſt même donné la peine de faire éxécuter par le Tour juſqu'à 14 Corps dont il a démontré la double égalité avec la Sphere, & comme les dimenſions que lui donnoit le calcul geometrique ſe ſont quelquefois trou-

vées trop incommodes dans l'éxécution, ou même impraticables, il a été obligé d'en chercher d'autres, qui ne rompiſſent point l'égalité, & cela lui a produit quelques Problêmes auſſi difficiles à reſoudre, que ceux qui avoient été ſon principal objet.

SUR UNE ESPECE IMPARFAITE DE DEVELOPE'ES.

* V. les M. p. 149. & 185. *p. 81. & 82. L'Hiſtoire de 1701.* a expliqué ce que c'eſt que les Développées & leurs Rayons. Delà il ſuit qu'une Courbe quelconque étant donnée, ſi du côté qu'elle eſt convexe on tire ſur tous ſes points des perpendiculaires, deux de ces perpendiculaires infiniment proches ſe couperont toûjours au dedans de la Courbe à un point qui appartiendra à ſa Développée, & en ſera un côté infiniment petit, ou, ce qui revient au même, qu'elles ſeront deux Tangentes de la Développée infiniment proches, & enfin que toutes ces perpendiculaires formeront par leurs interſections tous les côtés infiniment petits de la Développée. On dit qu'elles en ſont les *Rayons*, lors qu'on les prend depuis la premiere Courbe à laquelle ils ſont perpendiculaires juſqu'à la Développée qu'ils touchent. * p. 78. & 79. Nous avons expliqué dans l'Hiſtoire de 1704* ce qui détermine la differente longueur de ces Rayons, & à quoi elle a rapport.

Selon l'uſage de la Geometrie d'aujourd'hui, M. de Reaumur a ſongé à étendre & à rendre plus général le Problême des Dévelopées. On n'avoit conſideré que les perpendiculaires qui tomboient ſur tous les points de la premiere Courbe du côté qu'elle eſt convexe, mais ſi de ce même côté il tomboit ſur tous ſes points d'autres lignes qui fiſſent avec elle un angle different du droit, &

toûjous

toûjours le même, qu'arriveroit-il?

Il est clair d'abord qu'il arriveroit tout ce qui arrive dans le cas des perpendiculaires, & vient non de ce qu'elles sont perpendiculaires, mais de ce qu'elles sont toutes le même angle. Ces lignes obliques se couperoient toutes au-dedans de la Courbe, & formeroient par leurs intersections les costés infiniment petits d'une Courbe nouvelle, dont elles seroient toutes autant de Tangentes. Cette Courbe seroit donc une espece de Dévelopée, qui auroit ses Rayons. Je la nomme *imparfaite*, parce que les Rayons de la vraye Dévelopée étant ses Tangentes, & en même temps perpendiculaires à la premiere Courbe, les rayons de celle-ci n'auroient que la proprieté d'être ses Tangentes, & ne pourroient par la supposition avoir l'autre proprieté. M. de Reaumur cherche comme l'on a fait pour la vraye Dévelopée, 1°, quelle seroit la longueur du Rayon de la Dévelopée imparfaite correspondant à un point quelconque de la premiere Courbe, ou, ce qui est la même chose, le point d'intersection de deux Obliques infiniment proches, 2°, quelle seroit en général la nature de la Dévelopée imparfaite. Il suppose le Rayon de la Dévelopée connu par les Methodes de M. de l'Hopital, ou de M. Varignon *.

* V. l'Hist. de 1701. p. 81. & suiv. & celle de 1706. p. 50. & suiv.

La longueur du Rayon de la Dévelopée étant donc connuë pour un point quelconque de la premiere Courbe, si l'on suppose que du côté qu'elle est convexe il tombe sur ce même point deux lignes obliques infiniment proches, qui fassent avec la Courbe un angle infiniment aigu, elles en seront Tangentes toutes deux, ne se couperont qu'au seul point d'attouchement, & n'entreront point dans la Courbe; par consequent le Rayon de la Dévelopée imparfaite sera alors nul, tandis que celui de la vraye sera une grandeur finie, d'où il suit que depuis la ligne qui tombe sur la Courbe sous un angle droit jusqu'à celle qui y tombe sous un angle infiniment aigu, le Rayon de la Dévelopée prise en général varie depuis une certaine grandeur déterminée jusqu'à Zero, ou, ce qui est le même, que pour

un point quelconque de la Courbe tout Rayon de la Dévelopée imparfaite eſt plus petit que celui de la vraye Dévelopée, & d'autant plus petit que la ligne oblique qui eſt tombée ſur la Courbe a été plus oblique. Reſte à déterminer la proportion de cette diminution.

Elle eſt la même que ſi on comparoit un choc oblique à un choc perpendiculaire d'une même Force. Par les regles de laMechani que l'impreſſion du choc perpendiculaire ſeroit à celle du choc oblique,comme le ſinus de l'angle droit, ou ſinus total, au ſinus de l'angle de l'obliquité. C'eſt cette proportion que M. de Reaumur trouve entre le Rayon de la Dévelopée & celui de la Dévelopée imparfaite, mais il la trouve par une autre voye purement geometrique, & c'eût été un défaut dans ſa démonſtration que d'y employer, quand même il l'auroit pû, une idée de Mechanique, plus compoſée que le ſujet dont il s'agit. Auſſi ne nous en ſommes-nous ſervis que comme d'une eſpece d'exemple, qui rendoit la choſe plus ſenſible. De ce que les lignes obliques tombent toûjours ſous le même angle ſur les differents points de la Courbe, il ſuit que la raiſon du ſinus total au ſinus de cet angle eſt conſtante, & que par conſéquent celle du Rayon de la Dévelopée au Rayon de la Dévelopée imparfaite l'eſt auſſi; & comme le Rayon de la Dévelopée varie à chaque point d'une Courbe, à moins qu'elle ne ſoit un Cercle, il faut que le Rayon de la Dévelopée imparfaite varie auſſi de la même maniere, devienne ou plus grand ou plus petit, & même nul ou infini, ſi l'autre le devient; & quand ils ſont tous deux ou nuls ou infinis, ils conſervent encore entre eux la proportion des Sinus.

Puiſque le Rayon de la Dévelopée eſt toûjours plus grand que celui de la Dévelopée imparfaite, il eſt neceſſaire que l'eſpace compris entre la Courbe & ſa Dévelopée ſoit auſſi plus grand que celui qui eſt compris entre la même Courbe, & ſa Dévelopée imparfaite, & il ſe trouve par une eſpece de bonheur que le rapport de ces eſpaces eſt le même que celui des quarrès des Sinus, qui repreſentoient le rapport des Rayons,

Cette Theorie de M. de Reaumur pourroit en quelque ſorte appartenir à la Dioptrique, & y ajoûter de nouvelles vûës. Nous avons dit dans l'Hiſt. de 1703 * ce que c'eſt que les *Cauſtiques par refraction.* On ne les a encore conſiderées que comme formées par des rayons qui étant partis d'un ſeul point lumineux tomboient ſur une ſurface courbe ſous differens angles, aprés quoi ils ſe rompoient. Si l'on conſideroit les rayons qui étant partis de differents points lumineux tombent ſur la ſurface courbe ſous le même angle, ce ſeroient d'autre Cauſtiques par refraction. Que cet angle commun à differents rayons ſoit le droit, il eſt viſible que la Cauſtique ſera la même courbe que la Dévelopée; pour tout autre angle, ce ſera quelqu'une des Dévelopées imparfaites de M. de Reaumur.

* p. 69. & ſuiv.

La détermination de la nature des Dévelopées imparfaites, ou leur Equation generale dépendante de la premiere Courbe ſur laquelle tombent les lignes obliques, eſt un pur calcul algebrique où nous n'entrerons point. M. de Reaumur applique ſa Theorie à deux exemples, en prenant la premiere Courbe, 1° pour un Cercle, 2° pour une Logarithmique Spirale.

Si c'eſt un Cercle, il n'a pour rayon de ſa Dévelopée que ſon propre rayon toûjours conſtant, & par conſequent celui de ſa Dévelopée imparfaite l'eſt auſſi, d'où il ſuit auſſitôt que cette Dévelopée imparfaite eſt auſſi un Cercle, mais moindre que le premier. On ſait que la Dévelopée d'un Cercle n'eſt que ſon centre même.

Si c'eſt une Logarithmique Spirale, comme ſa Dévelopée n'eſt qu'elle-même dans une poſition differente, ſa Dévelopée imparfaite ſera auſſi une Logarithmique Spirale, la même que la propoſée dans un cas, differente dans tous les autres. L'eſſence de cette Courbe conſiſte en ce que ſes Ordonnées font toûjours le même angle avec elle, & une Logarithmique Spirale eſt differente d'une autre, quand cet angle, conſtant pour chacune, eſt different. Si l'angle ſous lequel les lignes obliques rencontrent la Logarithmique Spirale eſt le même que celui que les

Ordonnées de cette Courbe font avec elle, elle se reproduit elle-même dans sa Dévelopée imparfaite, aussi-bien que dans la vraye; s'il est different, elle produit une autre Logarithmique Spirale. Feu M. Bernoulli eut encore plus de raison qu'il ne pensoit de faire graver cette Courbe sur son Tombeau*, car il ignoroit apparemment cette derniere maniere dont elle se reproduit, dûë à M. de Reaumur.

* V. l'Hist. de 1705. p. 145. & 148.

Dans le goût que l'on a presentement pour les Theories générales, on ne pouvoit s'empêcher de desirer que celle des Dévelopées imparfaites comprît aussi les vrayes, qui n'en sont proprement qu'un cas particulier. Aussi sur ce que l'Academie parut souhaiter la reünion de ces deux Theories, M. de Reaumur y travailla, & en vint à bout. Il a donc trouvé une Formule générale, que M. Varignon trouva aussi, pour les Rayons des Dévelopées quelconques, c'est à dire quel que soit l'angle constant sous lequel des lignes droites rencontrent une Courbe. Si cet angle est droit, la Formule se change aussitôt en celle, ou plûtôt en toutes celles qu'a données M. Varignon pour les Rayons des Dévelopées*. Ces Formules si générales sont des amas d'Infinis roulés, pour ainsi dire, les uns dans les autres, & qui se dévelopent successivement par les applications particulieres.

* V. l'Hist. de 1701. p. 81. & 82. & celle de 1706. p. 91. & suiv.

SUR LES COURBES

DE LA PLUS VISTE DESCENTE.

V. les M. p. 26. & 257.

M. Bernoulli, maintenant Professeur en Mathematique à Basle, demanda en *1696* à tous les Geometres de l'Europe, Quelle étoit la ligne que devoit décrire un Corps pesant pour aller, en tombant obliquement à l'Horison, d'un point donné à un autre aussi donné, le plus viste qu'il fût possible?

Si ces deux points avoient été dans une ligne verticale,

il eſt évident que cette même ligne droite, la plus courte de toutes celles qui pouvoient être compriſes entre eux, auroit été celle qu'on demandoit, mais comme on les prenoit dans une ligne oblique à l'Horiſon, la ligne droite compriſe entre eux, quoique la plus courte de toutes, n'étoit point celle qui devoit être parcouruë en moins de temps. Voici la raiſon de ce Paradoxe, qui pourroit ſurprendre d'abord.

Quand un Corps tombe par une ligne droite, ſoit perpendiculaire, ſoit oblique à l'Horiſon, les augmentations de ſa viteſſe dans chaque temps égal ſont toûjours égales, de ſorte qu'à la moitié du temps total de ſa chute, par ex. il a la moitié de la viteſſe qu'il doit avoir à la fin. S'il pouvoit avoir acquis plûtôt cette moitié de ſa viteſſe finale, il eſt viſible que ce qui lui reſteroit d'eſpace à parcourir, ſeroit parcouru plus viſte, ou en moins de temps, & par conſequent auſſi l'eſpace total, & en un mot, l'eſpace total ſera parcouru d'autant plus viſte que le Corps aura acquis plûtôt une plus grande partie de ſa viteſſe finale, qui ſera toûjours la même. Il faudroit donc pour cela que le partage de cette viteſſe entre differents temps égaux de la chute, fût inégal; or il ne peut l'être quand la chute ſe fait par une ligne droite, mais ſeulement quand elle ſe fait par une Courbe. Il eſt bien vrai que cette Courbe ſera un plus grand eſpace à parcourir que la droite, mais ce qu'il faudroit de temps de plus pourra être non ſeulement recompenſé, mais encore ſurpaſſé par une plus prompte acquiſition de viteſſe.

Cette Courbe aura pour Axe une ligne horiſontale tirée par le point d'où le Corps commence à tomber, & pour derniere & plus grande Ordonnée une ligne verticale tirée du point le plus bas de la chute ſur cette horiſontale. Toutes les autres Ordonnées ſeront paralleles à celle-cy, & quand la Courbe ſera trouvée & decrite, chacune déterminera la hauteur verticale d'où le Corps ſera tombé à chaque inſtant, & par conſequent la racine de chacune exprimera, comme l'on ſait, la viteſſe que le

Corps aura à cet inſtant, & avec laquelle il parcourra l'arc infiniment petit, où il ſe trouvera. Les racines des differences infiniment petites des Ordonnées repreſenteront donc neceſſairement les augmentations de la viteſſe à chaque inſtant.

On voit déja par ce qui a été dit que vers le commencement de la chute les augmentations que la viteſſe prend à chaque inſtant, doivent être plus grandes que vers la fin, c'eſt-à-dire, que l'Axe de la Courbe étant conçû diviſé en parties infiniment petites égales, qui repreſenteront les inſtants, les differences des Ordonnées ſeront plus grandes vers l'origine de la Courbe, & iront en diminuant de cette extrémité vers l'autre. Delà il ſuit neceſſairement que vers l'origine de la Courbe ſes côtés infiniment petits auront une direction plus approchante de la verticale, & iront toûjours vers l'autre extrémité en devenant plus horiſontaux, & cela fait encore que ces mêmes côtés infiniment petits ſeront plus grands vers l'origine de la Courbe, & iront vers l'autre extrémité en diminuant. Cette premiere ébauche de la Courbe eſt déja telle que le Problême la demande, car au commencement de la chute où le Corps a de lui-même une moindre viteſſe, il eſt plus aidé par la direction plus verticale de la Courbe, qui en même temps lui fait décrire de plus grands arcs, & le fait tomber de plus haut, de ſorte que non-ſeulement il fait plus de chemin, mais il acquiert encore plus de viteſſe pour celui qui lui reſte à faire ; & vers la fin de ſa chute où il n'a plus tant de beſoin d'être aidé par la direction de la Courbe, parce que ſa viteſſe eſt plus grande, & où il ne l'eſt plus tant en effet, il a encore l'avantage de n'avoir plus que de plus petits arcs à décrire. Voilà tout ce qu'on peut deſirer pour accourcir la durée de ſa chute.

Tout cela enſemble ſe réduit à ce ſeul point, que les côtés ou arcs infiniment petits de la Courbe ſoient plus grands, lorſque la viteſſe du Corps ſera par elle-même plus petite, & reciproquement, & rien ne peut être plus

avantageux que quand la grandeur des uns ſuivra préciſément la même raiſon que la petiteſſe de l'autre. Donc puiſque la viteſſe du Corps à chaque inſtant s'exprime par la racine de l'Ordonnée correſpondante, la Courbe doit être telle que les arcs infiniment petits ſoient plus grands en même raiſon que les racines des Ordonnées correſpondantes ſeront plus petites, & reciproquement. Or on trouve bien-tôt par le calcul que la Courbe à laquelle appartient cette proprieté, eſt la Cycloïde. Le diametre de ſon Cercle générateur ſera la ligne qui meſure l'étenduë verticale de la chute du Corps, par conſequent la Courbe de la plus viſte deſcente ſera une demi-Cycloïde qui aura pour origine & pour ſommet les deux points extrêmes de cette chute. Ce Problême eſt celui pour lequel, ainſi que nous l'avons dit dans l'Hiſt.de 1704,* *l'Angleterre, l'Allemagne, la Suiſſe & la France fournirent chacune un Geometre.* * p. 128.

Feu M. Bernoulli frere de celui qui l'avoit propoſé, en propoſa un ſecond, qui en étoit comme une ſuite, & n'avoit pas moins de difficulté. Il ne ſuppoſoit plus deux points déterminés entre leſquels ſe fît la chute, mais ſeulement un point qui en fût toûjours l'origine, & une ligne verticale où elle ſe devoit terminer à un point quelconque. De toutes les Cycloïdes qui pouvoient avoir leur origine à celle de la chute, & aller enſuite rencontrer la ligne verticale, il demandoit quelle étoit celle qui devoit être parcouruë en moins de temps?

Les deux illuſtres freres qui ont reſolu ce Problême en ont caché l'Analiſe. M. Saurin a crû qu'elle meritoit bien d'être donnée au Public, avec une Solution nouvelle, & fort ſimple qu'il a trouvée.

Pour en prendre quelque idée ſans Geometrie & ſans calcul, il faut ſe repreſenter le nombre infini de Cycloïdes, qui ayant leur origine commune au point déterminé peuvent rencontrer la verticale déterminée. La premiere de toutes celles qui la rencontrent eſt une Cycloïde entiere qui la touche, & ne paſſe point au-delà, de

ſorte que dans l'eſpace déterminée elle a une moitié qui deſcend, & une autre moitié qui remonte également haut. Enſuite viennent d'autres Cycloïdes, qui paſſent toutes au-delà de la verticale, & y paſſent par une plus grande partie de leur moitié qui remonte, ſelon qu'elles ſont plus éloignées de la premiere Cycloïde. Il en vient donc une qui paſſe au-delà de la verticale par ſa moitié entiere qui remonte, & par conſequent elle rencontre à ſon ſommet la verticale, & la coupe à angles droits, aprés quoi toutes les autres ont au-delà de la verticale une partie de leur moitié deſcendante, & une partie toûjours plus grande, juſqu'à ce qu'enfin la derniere Cycloïde infiniment plus grande que la premiere ſoit toute entiere au-delà de la verticale, à cela prés qu'elle a en deçà ſon premier arc infiniment petit par rapport au reſte de la Courbe, & cet arc infiniment petit eſt cependant une ligne droite infinie, parallele, & égale à la verticale tirée à l'infini.

Tous les arcs Cycloïdaux compris entre l'origine de la chute & la verticale, au nombre deſquels il faut mettre la Cycloïde entiere, premier terme de toute cette *ſerie* ou ſuite, ſont les eſpaces que le corps aura à parcourir. Les verticales tirées juſqu'au ſommet de chaque Cycloïde ſont les plus grandes hauteurs d'où le Corps ſera tombé, & par conſequent leurs racines repreſenteront les plus grandes viteſſes acquiſes par le Corps. On cherche l'arc Cycloïdal parcouru en moins de temps.

Toute Cycloïde étant égale à 4 fois le diametre de ſon Cercle générateur, les Cycloïdes ſont entre-elles comme les diametres ou comme les circonferences de leurs Cercles, ou enfin comme leurs propres baſes, puiſque ces baſes ſont égales aux circonferences des Cercles générateurs. Il eſt évident que la Cycloïde qui coupe la verticale à angles droits, & qui a une de ſes moitiés en deçà, & l'autre au-delà, a une baſe double de celle de la premiere Cycloïde, qui eſt toute entiere en deça de la verticale. Donc cette Cycloïde entiere eſt égale à la moitié

moitié de l'autre. Donc ces deux eſpaces à parcourir ſont égaux. D'un autre côté, le Corps qui parcourroit la Cycloïde entiere perdroit pendant la ſeconde moitié de la durée de ſon mouvement toute la viteſſe qu'il auroit acquiſe pendant la premiere moitié, & s'il parcourt la demi-Cycloïde qui rencontre la verticale à angles droits, il ne perdra rien de ſa viteſſe acquiſe, & au contraire il en acquerra juſqu'au dernier inſtant. De plus il ſuit de la poſition de la Cycloïde entiere & de la demi-Cycloïde, que le Corps qui a parcouru la demi-Cycloïde eſt toûjours tombé dans tous les inſtants d'une plus grande hauteur que celui qui a parcouru la Cycloïde entiere, lors même qu'il tomboit, & par conſéquent lors même qu'ils acqueroient tous deux de la viteſſe l'un en acqueroit plus que l'autre. Ainſi les deux eſpaces étant égaux, & la viteſſe de celui qui parcourt la demi-Cycloïde étant toûjours plus grande & de plus s'augmentant toûjours, quand l'autre n'en acquiert plus, le temps qu'il employe à ſa chute doit être plus court. Et comme les arcs Cycloïdaux compris entre la Cycloïde entiere, & la demi-Cycloïde, participent tous aux défectuoſités de la Cycloïde entiere, & y participent d'autant moins qu'ils ſont plus éloignés d'elle, il s'enſuit que le temps employé à la parcourir ſera plus long, & qu'enſuite il ira toûjours en diminuant juſqu'à la demi-Cycloïde, qui ſera donc l'arc de la plus viſte deſcente par rapport à tous les arcs précedents.

Reſte à le comparer aux arcs ſuivants. Le dernier de ceux-là eſt comme nous l'avons dit, une ligne droite infinie, qui ne peut être parcouruë qu'en un temps infini. Le temps va donc en croiſſant vers la fin de la Serie des arcs Cycloïdaux, au lieu qu'il a été en diminuant au commencement de cette Serie juſqu'à la demi-Cycloïde, & ſi la demi-Cycloïde eſt préciſément le terme où le temps commence à croiſtre, elle eſt ſûrement l'arc de la plus viſte deſcente pour la Serie entiere.

On peut remarquer que dans ces ſortes de queſtions,

où il s'agit de *plus Grands*, ou *plus Petits*, les Grandeurs qui en ont le caractere, ont aussi quelque proprieté geometrique qui n'apartient qu'à elles, & les rend en quelque sorte reconnoissables. Ainsi la plus grande Ordonnée du demi-Cercle & de la demi-Ellipse est celle dont la Tangente est paralelle à l'axe. Ici la demi-Cycloïde est le seul arc Cycloïdal qui coupe la verticale à angles droits. La premiere Cycloïde la touche, la derniere fait avec elle un angle aigu infiniment petit. Ces deux Termes extrêmes & celui du milieu étant posés, il est aisé d'imaginer les variations moyennes. La demi-Cycloïde est aussi la seule qui rencontre à son sommet la ligne verticale. Elle a donc, pour ainsi dire, beaucoup de présomptions geometriques qui lui sont favorables, & en effet c'est elle que le calcul détermine pour l'arc de la plus viste descente.

Feu M. Bernoulli, premier Inventeur de ce Problême, voulut encherir sur la difficulté de M. son frere, qui avoit encheri sur la sienne. Ce n'étoit plus une ligne verticale où se devoit terminer la chute, mais une ligne faisant avec l'Horisontale un angle aigu quelconque.

Il est essentiel pour la solution de remarquer de quel côté l'ouverture de cet angle aigu est tournée, si c'est du côté de l'origine de la chute, ou du côté opposé. Dans le premier cas, la ligne où le Corps doit arriver, & que j'appellerai *terminante*, va pour ainsi dire, au devant de lui, aussi trouve-t-on que l'arc Cycloïdal de la plus viste Descente est moindre qu'une demi-Cycloïde, au lieu qu'il en étoit une dans le cas de la verticale. Dans le second cas proposé, la terminante fuit le Corps, & l'arc Cycloïdal est plus d'une demi-Cycloïde. Il est vrai qu'alors il faut necessairement que le Corps pendant une partie de son mouvement remonte, & perde de sa vitesse acquise, mais en récompense l'arc Cycloïdal est fort petit.

Et pour donner de tout ceci une idée plus dévelopée, supposons que la ligne terminante ait sur l'horisontale

tirée par l'origine de la chute une origine fixe, à un pié, par ex. de l'origine de la chute ; imaginons ensuite que la terminante ait l'ouverture de son angle aigu du côté opposé à cette origine, & qu'elle fasse d'abord cet angle infiniment aigu, c'est à dire qu'elle soit horisontale, & se confonde depuis son origine avec celle qui est toûjours & invariablement horisontale. Quel sera alors l'arc Cycloïdal que le Corps pourra décrire en moins de temps pour arriver jusqu'à elle ? Il est visible qu'il ne pourra y arriver plutôt que n'allant que jusqu'à son origine, & que pour y aller en décrivant un arc Cycloïdal il faudra qu'il remonte à la même hauteur d'où il sera descendu, puisque la terminante est horisontale, & par consequent il décrira une Cicloïde entiere dont la base sera une étenduë horisontale d'un pié. Si l'on imagine que la terminante se meuve circulairement sur le point de son origine pris pour centre, & que d'horisontale qu'elle étoit elle devienne verticale, nous avons vû que l'arc Cycloïdal de la plus viste Descente sera une demi-Cycloïde, & il est clair que cette demi-Cycloïde aura un pié pour base, & que par consequent la Cycloïde dont elle est la moitié en a deux. Delà il suit 1°. que dans tout le chemin que la terminante a fait pour devenir d'horisontale verticale, c'est à dire tant qu'elle a été oblique, & que son angle aigu a regardé le côté opposé à l'origine de la chute, les arcs Cycloïdaux de la plus viste Descente ont été moins que des Cycloïdes entieres, & plus que des demi-Cycloïdes, 2°. que les Cycloïdes dont ils ont été portions, ont été toûjours plus grandes, 3°. qu'ils ont été des portions d'autant plus petites de Cycloïdes, & en même temps des portions de Cycloïdes d'autant plus grandes que l'angle aigu de la terminante a été plus grand, 4°. que l'arc de la plus viste Descente rencontre toûjours la terminante à un point plus bas. Les deux positions *extrêmes* de la terminante ayant produit les effets que nous avions déterminés, les effets des positions *moyennes* n'ont pû être que ceux que nous venons de re-

presenter, car la nature des deux extrémités regle les variations qui se font entre deux.

De ce principe naist encore une consequence, mais par la raison des contraires. Une Cycloïde est perpendiculaire à sa base, donc dans la position horisontale de la terminante l'arc de la plus viste Descente lui étoit perpendiculaire, puisque c'étoit une Cycloïde entiere. Quand la terminante est verticale l'arc de la plus viste Descente qui est une demi-Cycloïde lui est encore perpendiculaire ; donc cet effet étant le même dans les deux positions extrêmes de la terminante, qui ont fait varier tout le reste, il n'y a point de variation à cet égard dans les positions moyennes, & quelque angle que fasse la terminante, l'arc de la plus viste Descente lui est toûjours perpendiculaire.

Maintenant si l'on veut que la terminante acheve un mouvement demi-circulaire, & que de verticale qu'elle étoit elle redevienne horisontale, & que par consequent dans tout ce mouvement elle tourne son angle aigu du côté de l'origine de la chute, il n'y a qu'à considerer ce qui arrivera quand elle sera redevenuë horisontale. Elle fera un angle infiniment aigu avec la ligne horisontale invariable & immobile, & par consequent l'arc Cycloïdal que le Corps doit parcourir dans le moindre temps pour aller de l'origine de la chute jusqu'à la terminante qui en est infiniment proche, ne peut être qu'infiniment petit, & il sera necessairement perpendiculaire à la terminante. Non-seulement cet arc Cycloïdal est infiniment petit, mais la Cycloïde dont il est portion peut être supposée aussi petite qu'on voudra, pourvû seulement qu'elle soit finie, car rien n'en détermine la grandeur. Nous avons déja vû quelle est l'autre position extrême de la terminante, & quels en sont les effets. Donc dans tout le chemin qu'elle fait pour devenir de verticale horisontale, & ayant son angle aigu du côté de l'origine de la chute, 1°. les arcs Cycloïdaux de la plus viste Descente sont moindres que des demi-Cycloïdes, 2°. ils sont des portions de Cycloïdes toûjours plus petites,

3°. ils ſont des portions d'autant plus petites de Cycloïdes, & en même temps des portions de Cycloïdes d'autant plus petites que l'angle de la terminale eſt plus petit, 4°. l'arc de la plus viſte Deſcente rencontre toûjours la terminante à un point plus haut, 5°. il lui eſt toûjours perpendiculaire.

Ainſi l'arc Cycloïdal perpendiculaire à la terminante eſt toujours parcouru en moins de temps que tous les autres arcs en nombre infini qui la rencontrent, & c'eſt-là la Solution geometrique du Problême.

En rejoignant enſemble les deux cas de l'angle aigu de la terminante, on trouve que l'arc de la plus viſte Deſcente ne la rencontre jamais en un point plus bas que quand elle eſt verticale, que dans une moitié de ſes poſitions le Corps acquiert toûjours une nouvelle viteſſe, & que dans l'autre moitié il perd une partie de ſa viteſſe acquiſe, quoiqu'il faſſe ſon chemin dans le moindre temps poſſible, &c.

L'idée que nous avons ſuivie nous fournit un moyen tres-facile de comparer les Temps en général. Chaque temps pendant lequel eſt parcouru un arc de plus viſte Deſcente pour une certaine poſition déterminée de la terminante, eſt le plus court qu'il ſe puiſſe, mais il s'agit de comparer les Temps de plus viſtes Deſcentes correſpondants à differentes poſitions de la terminante. Quand elle fait avec l'horiſontale immobile un angle infiniment aigu du côté de l'origine de la chute, le temps ne peut être qu'infiniment petit, cela eſt clair par ce qui a été dit ſur ce cas-là. Donc depuis cette poſition de la terminante juſqu'à ce qu'elle devienne verticale, auquel cas certainement le temps eſt fini, les Temps des plus viſtes Deſcentes n'ont pû aller qu'en croiſſant toûjours. Lorſque la terminante eſt verticale, la demi-Cycloïde qui s'y termine eſt parcouruë en moins de temps que tous les autres arcs Cycloïdaux qui s'y terminent auſſi, & dans ce nombre eſt compriſe une Cycloïde entiere qui va de l'origine de la chute à celle de la terminante,

& qui a une baſe d'un pié ſelon la ſuppoſition qui a été faite. Or cette Cycloïde entiere eſt la même qui ſera l'arc de la plus viſte Deſcente lorſque la terminante de verticale qu'elle étoit ſera redevenuë horiſontale. Donc tant qu'elle fera ce chemin les Temps des plus viſtes Deſcentes continuëront de croiſtre comme ils faiſoient auparavant. Delà il ſuit que le temps de la plus viſte Deſcente, lorſque la terminante eſt verticale, eſt moyen entre tous les autres, &c.

Comme les Geometres modernes ſont difficiles à contenter en fait de difficultés, M. Bernoulli augmenta encore celle de ſon Problême, en ne ſuppoſant plus pour Courbes des plus viſtes Deſcentes des Cycloïdes, auſquelles cependant apartient particulierement cette proprieté, mais ſeulement des Courbes ſemblables en général, qui ſeront enſuite tout ce qu'on voudra, Cercles, Cycloïdes, Paraboles, &c. Les deux freres réſolurent encore ce Problême élevé à une ſi grande univerſalité, mais en cachant leur ſecret, que M. Saurin découvre preſentement. Il ſuppoſe que ces Courbes ſoient non ſeulement de la même eſpece, mais encore ſemblables, c'eſt à dire que comme elles auront une origine commune, il faut qu'une corde tirée de ce point détermine dans ces Courbes des parties pareilles, des moitiés, des tiers, &c.

Les deux freres, & M. Saurin aprés eux ont encore ajoûté une difficulté nouvelle au Problême, ils ont ſuppoſé que la terminante ne fût plus une ligne droite, mais une Courbe geometrique. Nous n'entrons point dans toutes ces Theories, il faut laiſſer à un petit nombre de Geometres le plaiſir tout entier des embarras de leur art.

Nous finirons ſeulement par une ébauche du Problême entierement réduit à des lignes droites, & par-là entierement changé. La ligne de la plus viſte Deſcente doit, auſſi-bien que la terminante, être une ligne droite. Suppoſons d'abord que la terminante ſoit verticale, & que

l'horiſontale fixe & immobile ſoit d'un pié. Toutes les lignes poſſibles de deſcente pour arriver à la verticale ſeront les hipotenuſes d'un triangle rectangle, qui aura toûjours pour l'un de ſes deux autres côtés une horiſontale d'un pié, & pour l'autre une verticale indeterminée. Ces hipotenuſes ſeront les eſpaces que le Corps parcourra, & les differentes portions de la terminante verticale repreſenteront par leurs racines les viteſſes des differentes chutes. La plus viſte Deſcente eſt celle où l'eſpace eſt le plus petit qu'il ſoit poſſible, & la viteſſe la plus grande. Il faut donc trouver dans les differents triangles celui dont l'hipotenuſe eſt la plus petite qu'il ſe puiſſe par rapport au côté vertical. Or toute hypotenuſe étant une grandeur compoſée de deux côtés qui comprennent l'angle droit, la queſtion ſe réduit à ceci. Une grandeur qui doit faire une des deux parties d'un Tout étant déterminée, trouver l'autre partie telle qu'elle ſoit la plus grande qu'il ſe puiſſe par rapport au Tout, & on trouvera par un calcul d'une ligne que la partie indéterminée & inconnuë doit être égale à la déterminée. Il faut donc que le côté vertical du triangle ſoit d'un pié auſſi-bien que l'horiſontal, & l'hipotenuſe ſera la ligne de la plus viſte deſcente. La proprieté geometrique qui diſtingue cette hipotenuſe de toutes les autres, c'eſt d'être l'hipotenuſe d'un triangle rectangle iſoſcele.

Maintenant ſi l'on conçoit que la terminante tournant circulairement ſur ſon origine comme ſur un centre s'approche infiniment prés de l'horiſontale immobile, la ligne de la plus viſte Deſcente ſera infiniment petite, & perpendiculaire à la terminante, & la portion de la terminante déterminée par cette ligne de la plus viſte Deſcente ſera encore égale à l'horiſontale immobile d'un pié. Donc dans ces deux cas extrêmes cette portion de la terminante & l'horiſontale d'un pié étant égales, il y a beaucoup d'apparence qu'elles le ſont auſſi dans tous les cas moyens, c'eſt-à-dire, tant que l'angle aigu de la terminante eſt tourné du côté de l'origine des chutes,

& la ligne de la plus viste Descente sera toûjours la base d'un triangle isoscele. Si l'angle aigu de la terminante étoit de 60 degrés, ce triangle isoscele seroit de plus équilateral.

Si l'angle aigu de la terminante est tourné du côté opposé, ou, ce qui est la même chose, si elle fait du côté de l'origine des chutes un angle obtus avec l'horisontale, la ligne de la plus viste Descente sera encore la base d'un triangle isoscele, mais *amblygone*, au lieu que dans les deux autres cas, il étoit rectangle ou *oxygone*.

Dans tous les trois cas, cette proprieté du triangle isoscele vient également de ce que la perpendiculaire qui détermine la plus grande vitesse acquise par le Corps, y est la plus grande qu'il se puisse par rapport à la ligne qui represente l'espace parcouru. Mais ce plus grand rapport de la vitesse à l'espace est beaucoup plus aisé à appercevoir dans le triangle rectangle isoscele, que dans l'oxigone, ou l'amblygone isosceles aussi.



ASTRONOMIE

SUR L'ETOILE DE L'HIDRE.

QUI PAROIST ET DISPAROIST.

V. les M. p. 33.
* p. 111. & 112.

Cette Etoile de l'Hidre qui paroist & disparoist, & dont nous avons parlé dans l'Hist. de 1706 *, a été suivie par M. Maraldi qui l'avoit découverte, ou du moins qui avoit découvert qu'elle étoit *changeante*. Comme elle est presentement un peu mieux connuë qu'elle n'a encore été, nous en allons faire une petite Histoire un peu plus circonstanciée.

Il paroiſt certain qu'elle a été vûë en 1662 par Hevelius, elle l'a été en 1672 par M. Montarani, & ni l'un ni l'autre de ces Aſtronomes ne l'a connuë pour changeante. M. Maraldi l'a obſervée en 1704, 1705, 1706 & 1708. C'a été au mois d'Avril que Hevelius & Montanari l'ont vûë, M. Maraldi en 1704 & 1708 depuis Mars juſqu'en Juin, en 1705 à la fin de l'année, & en 1706 au commencement. Il l'a cherchée inutilement en tout autre temps, depuis l'an 1702, qu'il fut averti de cette Etoile par l'obſervation de M. Montanari. Elle commence par être à peine viſible à la Lunette, & enſuite elle va juſqu'à égaler les Etoiles de la 4me grandeur, aprés quoi elle diminuë toûjours. C'eſt vers la moitié de Mai qu'elle arrive à cette grandeur. Le plus long-temps de ſon apparition peut être de 4 mois. Lorſqu'elle parut hors de ſon temps ordinaire à la fin de 1705, & au commencement de 1706, elle fut d'abord fort petite & fort foible, & ne fit encore que diminuer toûjours ; elle ne parut que 2 mois.

Par tout ce que nous venons de dire, la periode de 2 ans aſſignée par M. Maraldi dans l'Hiſt. de 1706 aux retours de cette Etoile, & qui doit commencer en 1662, temps de la premiere obſervation, s'accorde juſqu'apreſent aſſés juſte avec les phenomenes, excepté que l'Etoile ne parut point en 1702, quoiqu'elle eût dû y paroiſtre ſelon cette periode, & qu'elle parut hors de ſon temps en 1705, & en 1706. Ces irregularités du temps de ſon apparition, auſſi-bien que celles qui regardent ſa grandeur, pourront ſe concilier quelque jour avec quelque hipotheſe, & elles ne ſont pas fort conſiderables par rapport au peu d'obſervations que l'on a juſqu'ici.

On peut même déja imaginer ſelon le Siſtême des demi-Soleils expliqué à cette occaſion dans l'Hiſt. de 1706, que l'Etoile de l'Hidre qui ne paroiſt que 4 mois à peu prés en 2 ans n'a que la 6me partie de ſa ſurface qui ſoit lumineuſe, & que le reſte eſt couvert par des Taches permanentes, mais non pas abſolument fixes en un certain endroit du globe, ou qu'il s'y en peut joindre

quelquefois de nouvelles & de passageres. L'une ou l'autre de ces suppositions, ou toutes les deux ensemble, satisferont à tout.

M. Maraldi fait un petit dénombrement de quelques Etoiles qui paroissent & disparoissent comme celle de l'Hidre, ou qui ne paroissent plus, du moins depuis un certain temps, ou même qu'on a lieu de croire qui ne paroissent que depuis peu. Ces observations sont d'une extrême importance pour le Sistême de l'Univers pris en grand, si cependant c'est l'Univers pris en grand que la plus grande étenduë que nous en puissions apercevoir avec nos plus excellentes Lunettes.

SUR LES MOUVEMENTS

APPARENTS DES PLANETES.

V. les M. p. 247. IL est certain maintenant que le Soleil est le centre des mouvements des Planetes, & non pas de la Terre; les Sistêmes de Copernic & de Tycho Brahé conviennent sur ce point. Delà il suit necessairement que les mouvements des Planetes vûs de la Terre doivent paroistre extrêmement differents de ce qu'ils paroistroient étant vûs du Soleil; ils en sont presque entierement défigurés, & à peine les Courbes de leurs Orbes sont-elles reconnoissables. C'est cette difference que nous allons expliquer pour faire entendre des figures que M. Cassini a données des Courbes que les Planetes vûës de la Terre paroissent décrire. La principale de ces irrégularités apparentes consiste dans les *Retrogradations* & *Stations*, & voici ce qui les produit. Je suppose que le Sistême de Copernic perfectionné par les Ellipses de Kepler represente l'Univers tel qu'il est en effet.

Imaginons Saturne immobile, & la terre qui se meut sous lui autour du Soleil d'Occident en Orient d'un mouvement uniforme, le Soleil est entre elle & Saturne, &

elle part du 1er degré d'Ariés pour aller en Taurus; elle voit donc Saturne au 1er de Libra. Quand elle aura fait la moitié de ſon Cercle annuel ou de ſon Ellipſe, & qu'elle ſera entre le Soleil & Saturne, il eſt clair qu'elle verra encore Saturne au 1er degré de Libra; or comme elle s'eſt muë réellement, il n'eſt pas poſſible que pendant ſon demi tour, elle ait toûjours rapporté Saturne au même point du Zodiaque, elle l'a donc vû ſortir du 1er degré de Libra, & y revenir, c'eſt-à-dire qu'elle lui a vû deux mouvements contraires, l'un direct, l'autre retrograde. Et ſi l'on veut ſuivre cela plus exactement, on trouvera en tirant ſeulement une ligne droite de la Terre placée en differents points à Saturne, que dans ſon premier quart de cercle elle le voit direct & allant de Libra ſelon la ſuite des Signes, mais d'abord plus viſte, & enſuite plus lentement, quoique le mouvement de la Terre ſoit ſuppoſé égal, que dans ſon ſecond quart de cercle, elle voit Saturne retrograde & retournant ſur ſes pas, mais d'abord plus lentement, & plus viſte vers la fin, que dans le troiſiéme quart elle le voit encore retrograde, mais paſſant au-delà du 1er de Libra dans Virgo, plus viſte d'abord, & qu'enfin dans le dernier quart, elle le voit direct & retournant de Virgo au 1er de Libra, plus viſte vers la fin. Je ne conſidere point ici que la Terre étant tantôt plus proche, tantôt plus éloignée de Saturne de tout le diametre de l'Orbe qu'elle décrit, cela cauſeroit quelque difference optique dans les differentes parties du mouvement apparent de Saturne, & qu'elles ne paroiſtroient pas exactement égales; cette difference eſt trés-legere, & n'empêche pas les concluſions que nous voulons tirer. Il faut bien remarquer que dans le paſſage de la direction à la retrogradation ou au contraire le mouvement de Saturne paroiſt toûjours plus lent. Mais parce que le mouvement de la Terre, d'où dépend toute l'apparence du mouvement de Saturne, eſt égal, le mouvement apparent de Saturne ne peut en ſe rallentiſſant toûjours devenir enfin contraire à ce qu'il

étoit ſans avoir paſſé par tous les degrés poſſibles de lenteur, & par conſequent par le repos. En Geometrie, & c'eſt ici la même choſe, une grandeur ne devient point de poſitive negative, ou au contraire, ſans être devenuë auparavant infinie, ou Zero. Il y a donc toûjours un repos ou une *ſtation* entre une direction & une retrogradation, ou entre une retrogradation & une direction.

Dans l'hipotheſe de l'immobilité de Saturne, la Terre pendant une moitié de ſon cours le verroit donc direct, & retrograde pendant l'autre, il en faudroit ſeulement excepter les deux étenduës ou les deux temps pendant leſquels elle le verroit Stationnaire, ou plûtôt il vaut mieux les confondre, comme font les Aſtronomes, en partie avec les directions, & en partie avec les retrogradations, puiſqu'ils en ſont le terme commun. Saturne ſeroit donc direct pour la Terre pendant toute la moitié de ſon cours où elle ſeroit la plus éloignée de lui, ſoit qu'alors elle continuât à s'en éloigner, ſoit qu'elle s'en approchât, & il ſeroit retrograde pendant la moitié où elle ſeroit la plus proche de lui, ſoit qu'elle s'approchât pour paſſer ſous lui, ſoit qu'aprés y avoir paſſé elle s'en éloignât. Il eſt évident que tout cela eſt un effet de la figure circulaire, qui a deux moitiés entierement égales & ſemblables, mais contrairement poſées par rapport à un point pris au dehors.

Non-ſeulement la Terre pendant ſon tour ne verroit pas Saturne décrire un tour entier du Zodiaque, ni même un demi-tour, mais elle ne lui verroit décrire qu'un aſſés petit arc, préciſément à la maniere d'une Pendule qui va & revient ſur ſes pas. Si l'Orbe de la Terre étoit ſi petit par rapport à la diſtance de Saturne qu'il ne dût être compté que pour un point, l'arc d'oſcillation de Saturne paroiſtroit nul, & cette Planette ſeroit vûë immobile comme on ſuppoſe ici qu'elle l'eſt. Plus le rayon de l'Orbe de la Terre ſera grand par rapport à la diſtance de Saturne, plus le mouvement apparent de Saturne tant direct que retrograde ſera grand.

Maintenant si l'on quitte la fausse hipotese de l'immobilté de Saturne, & qu'on lui rende son mouvement veritable d'Occident en Orient, qu'arrivera-t-il? 1°. Si ce mouvement se faisoit en un an, comme celui de la Terre, elle le verroit toûjours direct, ainsi qu'il l'est réellement, mais la révolution de Saturne est de 30 ans, & 30 fois plus lente que celle de la Terre, & par consequent il est en partie immobile à son égard, & il doit conserver en partie les effets de l'immobilité que nous lui avions supposée. Il doit donc paroîstre encore tantôt direct, tantôt retrograde. 2°. La Terre ne passe pas moins sous lui que s'il étoit immobile, & par consequent il doit paroistre retrograde pendant ce passage, & même avant & aprés pendant tout le temps où la Terre est posée à son égard de la même maniere que l'orsqu'il étoit immobile. 3°. Puisque dans le cas de cette immobilité, la Terre voyoit Saturne direct dans les circonstances qu'on a marquées, à plus forte raison l'y voit-elle encore direct, car il l'est toûjours réellement, & alors la realité concourt avec l'apparence. Sa vitesse directe doit donc maintenant paroistre plus grande qu'elle ne paroissoit. 4°. Par la même raison, sa vitesse retrograde qui étoit égale à la directe doit paroistre moindre, car ce n'est plus qu'une apparence à laquelle la realité est contraire, & qui est diminuée par cette realité. 5°. Plus Saturne est éloigné du cas où il eût paru toûjours direct, & plus il approche de celui où il étoit immobile, c'est à dire en un mot, plus sa révolution est lente par rapport à celle de la terre, plus sa vitesse retrograde approche d'être égale à la directe, & reciproquement plus sa révolution approcheroit de la vitesse de celle de la Terre, plus sa vitesse retrograde seroit au-dessous de la directe. 6°. Par la même raison que sa vitesse retrograde est moindre que la directe, il paroist maintenant faire moins de chemin étant retrograde qu'étant direct, & par consequent la Terre ne le voit plus retrograde pendant qu'elle fait une moitié de son cours ou pendant 6 mois, mais

pendant un moindre eſpace de temps. 7°. L'arc de la retrogradation de Saturne eſt d'autant plus grand que ſa révolution eſt plus lente par rapport à celle de la Terre, & l'Orbe de la Terre plus grand par rapport au ſien. 8°. La durée de ſa retrogradation dépend donc de la grandeur de cet arc, & de la viteſſe apparente dont il eſt parcouru.

Il eſt manifeſte que ce qu'on a dit de Saturne s'applique de ſoi-même aux autres Planetes ſuperieures, & qu'il ſuit des mêmes principes que Jupiter & Mars paroiſſent retrogades auſſi-bien que lui, lorſqu'ils ſont dans les mêmes circonſtances, qu ils ſont tous trois retrogrades pendant moins de 6 mois, & que la viteſſe retrograde de Saturne eſt moins petite par rapport à ſa directe que celle de Jupiter, & celle de Jupiter moins petite que celle de Mars. Quant à la grandeur de leurs arcs de retrogradation, comme elle dépend de deux principes qui ſe combattent, & que Jupiter, par ex. a un plus grand arc de retrogradation que Saturne parcequ'il eſt plus proche de la Terre, & un plus petit parceque ſa révolution ſe fait en moins de temps, on n'en peut rien déterminer par ce qui a été dit, mais on ſait par le calcul aſtronomique que l'arc de Saturne eſt plus petit que celui de Jupiter, & celui de Jupiter plus petit que celui de Mars. Et pour la durée de la retrogradation, il y entre, outre la grandeur de l'arc, la viteſſe apparente. Or cette viteſſe eſt compoſée en partie de la viteſſe réelle, qui eſt plus grande dans les Planetes plus proches du Soleil, & cela fait encore un aſſemblage de differents principes qui ſe combinent. On trouve par l'Aſtronomie que la durée de la retrogradation de Mars ne peut aller qu'à prés de 3 mois, celle de Jupiter à 4, celle de Saturne à prés de $4\frac{1}{2}$.

Si l'on veut étendre cette Theorie aux Planetes inferieures, on n'a qu'à s'imaginer la Terre immobile qui voit Venus tourner ſous elle. On fera ſur cette fixion les mêmes raiſonnements, & on en tirera les mêmes

consequences que quand on avoit supposé Saturne immobile sous lequel la Terre tournoit, aprés quoi reprenant la realité & rendant à la Terre son mouvement d'un an, on trouvera que Venus & Mercure doivent paroistre retrogrades toutes les fois qu'ils passent entre la Terre & le Soleil, & quelque temps avant & aprés ce passage, que leur vitesse retrograde est toûjours moindre que leur vitesse directe, que la vitesse retrograde de Mercure est plus grande par rapport à la directe que celle de Venus, que leur arc de retrogradation est d'autant plus grand que leur Orbe est plus grand par rapport à celui de la Terre, & leur révolution plus viste par rapport à la sienne, &c. L'arc de la retrogradation de Venus est presque toûjours plus grand que celui de Mercure. La retrogradation de Venus est environ de 40 jours, & celle de Mercure de 18.

Ces irregularités apparentes des mouvements des Planetes vûs de la Terre supposent qu'ils soient en eux-mêmes parfaitement reguliers, ou, ce qui est la même chose, circulaires, & uniformes; cependant ils ne sont ni l'un ni l'autre, ils sont Elliptiques, & ont une vitesse variable qui diminuë réellement à mesure que la Planete s'éloigne du Soleil *. Parce qu'ils sont Elliptiques, une Planete, quoique toûjours dans son Perigée, est inégalement éloignée de la Terre en differentes révolutions, car ce Perigée sera inégalement éloigné du Perihelie, & peut-être même sera l'Aphelie *. En même temps la vitesse réelle du Perigée varie, & par consequent l'apparente.

* V. l'Hist. de 1707. p. 97. & suiv.

* V. l'Hist. de 1706. p. 100.

On peut juger par tout ce qui a été dit combien les mouvemens des Planetes qui vûs du Soleil seroient Elliptiques, doivent avoir de dessus la Terre une apparence differente, & même bisarre. En général, il faut pour representer les retrogradations que ce soit une Courbe qui s'approchant toûjours de la Terre vienne à avoir une Tangente dirigée à la Terre, sur laquelle la Planete étant arrivée elle paroistra stationnaire, qu'aprés cela

la Courbe deſcende encore vers la Terre, & y ait de petits arcs correſpondants à d'aſſés grandes durées, qu'enſuite elle remonte, qu'elle ait une ſeconde Tangente dirigée à la Terre, ſe coupe elle-même & continuë de remonter juſqu'à un certain point, ce qui repreſentera le mouvement direct. Cette Courbe reſſemble beaucoup à celle que les Geometres ont appellée *la Fueille*. M. Caſſini l'a appliquée à toutes les Planetes, en donnant à ſes differentes parties les differentes proportions neceſſaires pour repreſenter le mouvement apparent de chaque Planete en particulier. Il a ſuivi & tracé les contours de la Courbe pour pluſieurs années du mouvement de chaque Planete, & par-là on peut voir à tel jour que l'on veut des années qu'il donne le lieu de la Planete dans le Zodiaque, ſi elle eſt ou directe ou ſtationnaire ou retrograde, & quelle eſt ſa viteſſe par rapport aux autres parties de ſon cours. Au lieu qu'on n'avoit eu juſqu'a preſent des Ephemerides qu'en nombres & en Tables, on en a preſentement en figures, & elles ont l'avantage que les Images plus ſenſibles ont toûjours auprés de nous ſur celles qui le ſont moins.

SUR LES TACHES
DU SOLEIL.

LE 6 Janvier à Midi, qui eſt l'heure où l'on obſerve toûjours, il parut ſur le diſque du Soleil deux Taches, qui étoient trop proches pour n'être pas parties d'une même. M[rs] de la Hire s'attacherent à obſerver le mouvement ou la poſition apparente de la plus groſſe, qui étoit auſſi la plus Occidentale. Elle avoit déja paſſé le milieu du diſque, & étoit à peu prés au tiers de la partie occidentale, où elle avoit à l'égard du centre apparent du Soleil une declinaiſon Meridionale de 3′ 35″. Aprés le 10, elle paſſa derriere le Soleil, ſelon l'hipotheſe

these de sa révolution en 27 jours $\frac{1}{2}$. La declinaison de la Tache étoit alors de 4′ 10″ du même côté.

Selon la même hipothese de la révolution du Soleil, la Tache reparut le 26 presque au bord Oriental, mais avec une declinaison Septentrionale de 5″ à l'égard du centre apparent. Cette déclinaison fut le 28 de 40″, & le 30 elle devint Meridionale & de 10″, le mouvement de la Tache d'Orient en Occident sur le disque étant toûjours tel qu'il devoit être par l'hipothese des 27 jours $\frac{1}{2}$.

Le 3 Février, elle avoit passé le milieu du disque, & étoit dans la partie occidentale, avec une déclinaison meridionale de 3′ 40″. Mais le même jour & à la même heure il parut sur le Soleil une nouvelle Tache dans la partie orientale, avec la même position à peu prés que si elle en eût déja parcouru les $\frac{6}{7}$, & avec une déclinaison septentrionale de 25″. L'ancienne Tache & la nouvelle, qui paroissoient en même temps, étoient donc fort differentes, & fort séparées, & voilà encore ce phenomene rare, dont nous avons parlé dans les Hist. de 1705 * & de 1707 *. *p. 125. *p. 111.

Le 5 on ne voyoit plus la nouvelle Tache, quoiqu'elle dût être encore vers le milieu du disque, l'ancienne continuoit son chemin vers l'Occident, avec la même déclinaison que le 3, car vers le milieu des Ellipses que les Taches décrivent la déclinaison doit pendant un temps être sensiblement la même. Aprés le 5 le Ciel ne permit plus d'observer.

Le 25 Aoust, on aperçût plusieurs Taches separées en deux amas. La plus grosse de toutes & la plus Orientales étoit dans la partie occidentale du disque, & à plus de la moitié de cette partie; avec une déclinaison meridionale de 1′ 30″. Quoiqu'elle fût si avancée sur le disque, il est certain qu'on n'y avoit rien vû les jours précedents. Le 27 on la vit encore, plus proche du bord occidental, comme elle devoit être, avec une déclinaison meridionale de 2′ 15″.

Le 12 Novembre, on aperçût une Tache assés grosse, & toute seule. Elle avoit dejà un peu passé le milieu du disque, & avoit une déclinaison meridionale de 1′ 45″. On la vit tous les jours jusqu'au 16 qu'elle étoit fort avancée dans la partie occidentale du disque. Elle avoit alors une déclinaison meridionale de 2′ 50″. Le 18 on ne l'a vit plus. Elle pouvoit avoir passé derriere le Soleil.

V. les M. p. 62.

NOus renvoyons entierement aux Memoires

L'Ecrit de M. Cassini le fils sur les Observations faites à Nuremberg des Eclipses de 1708.

V. les M. p. 91. 92. & 93.

Les Ecrits de Mrs de la Hire & Cassini le fils sur l'Eclipse solaire du 11 Mars 1709.



OPTIQUE.

SUR QUELQUES FAITS PARTICULIERS D'OPTIQUE.

V. les M. p. 95.

SI l'Optique n'étoit que Geometrique, il y auroit lieu d'être surpris que l'on se partageât sur l'explication de ses phenomenes, mais ce qui ôte tout sujet d'étonnement, c'est qu'il y entre beaucoup de Phisique, qui y porte son incertitude naturelle.

* p. 12. & suiv.

On a vû dans l'Histoire de 1704* 1°. que si on plonge un Chat dans l'eau, & que l'on tourne sa tête de sorte que ses yeux soient directement exposés à une grande lumiere, leur prunelle s'ouvre beaucoup, quoique naturellement elle se resserre au grand jour, 2°. que l'on aper-

çoit diſtinctement le fond des yeux de cet Animal, qu'il eſt bien certain qu'on ne verroit pas à l'air. Ces deux faits ont été expliqués, mais M. de la Hire en donne ici d'autres explications.

1°. Lorſque le Chat eſt plongé, les rayons qui entrent dans ſon œil tombent perpendiculaires ſur l'eau, parceque pour mieux voir cet œil on tient la face de l'Animal parallele à la ſurface de l'eau. Cela poſé, M. de la Hire démontre que ces rayons perpendiculaires à l'eau n'y ſouffrant point de réfraction, & n'en ſouffrant qu'aſſés peu quand ils paſſent de ce milieu dans les humeurs de l'œil, à cauſe du peu de difference de ces humeurs & de l'eau, ils ne pourroient ſe reünir que bien loin au-delà de la Retine, & que par conſequent ils y tombent ſeparés, & y occupent un plus grand eſpace qu'ils ne devroient. Delà il conclut que ces rayons agiſſant plus foiblement ſur la Retine, que ſi l'œil étoit expoſé à l'air, ils ne doivent pas cauſer de retreciſſement à l'Iris. Il remarque auſſi que le Chat plongé dans l'eau étant fort inquiet, & fort attentif à tout ce qui ſe paſſe autour de lui, cette attention & cette crainte tiennent ſa prunelle plus ouverte, car M. de la Hire ſuppoſe que le mouvement de l'Iris qui eſt preſque toûjours neceſſaire, & n'a rapport qu'au plus ou moins de clarté, eſt en partie volontaire dans certaines occaſions. S'il l'eſt, on pourroit peut-être ſe contenter de cette ſeule cauſe du phenomene.

2°. M. de la Hire démontre encore que les refractions qui ſe font dans l'eau élevent le fond de lœil du Chat, & rapprochent cet objet des yeux du ſpectateur. Si l'on joint à cela que la prunelle de l'Animal eſt plus ouverte, & par conſéquent le fond de ſon œil plus éclairé, il ne ſera pas étonnant qu'on l'apperçoive. Encore une raiſon, que M. de la Hire ajoûte. Un objet eſt d'autant mieux vû, que dans le temps qu'on le regarde il vient à l'œil moins de lumiere étrangere, & qui ne ſert point à le faire voir. Quand on regarde à l'air l'œil d'un Chat de

maniere à tâcher d'en découvrir le fond, l'axe de la vision du Spectateur se porte vers ce fond, & s'il vient en même temps des rayons étrangers paralleles à cet axe, ils troublent d'autant la vision. Or il en vient, parceque la Cornée du Chat étant convexe elle reflechit à l'œil du Spectateur des rayons sous toutes sortes d'angles, & ceux qui sont paralleles à l'axe de la vision qui se dirige au fond de l'œil du Chat, la troublent, puisqu'ils viennent d'un autre objet. Mais quand le Chat est plongé dans la situation que nous avons dit, la surface de l'eau qui est plane ne pourroit envoyer à l'œil du Spectateur des rayons étrangers paralleles à l'axe de la vision que ceux qu'elle auroit reçûs perpendiculairement, parce que l'axe de la vision lui est alors perpendiculaire. Or la tête du Spectateur empêche qu'elle ne reçoive des rayons perpendiculaires, & par consequent le fond de l'œil du Chat en peut être mieux aperçû.

Nous ne parlerons ici ni de la structure du muscle de l'Iris, ni du principal organe de la vision. M. de la Hire tient pour la Retine contre la Choroïde; mais ces sortes de questions ne peuvent devenir interessantes sans un certain détail, qui fasse voir la grandeur & l'importance de ce qui paroissoit petit & leger.





ACOUSTIQUE.

SUR LES SONS DES CILINDRES SOLIDES.

QUand on voit des Cordes d'Inſtrument pincées ou frapées fremir dans toute leur étenduë, & qu'on entend que les tons qu'elles donnent ſuivent de certaines proportions de leurs longueurs, que par ex. elles donnent l'Octave ſi ces longueurs ſont comme 1 à 2, la Quinte, ſi elles ſont comme 2 à 3 &c, il eſt fort naturel de croire que les tons dépendent des fremiſſements ou vibrations que font les cordes entieres dans toute leur longueur, & en effet la pluſpart des Muſiciens, & même des Phiſiciens ſont tombés dans cette penſée. Cependant M. Carré aprés avoir fort étudié cette matiere eſt perſuadé que ce qui produit les ſons immediatement ſont les vibrations particulieres de toutes les petites parties de la corde, ou plus generalement du corps ſonore, miſes en reſſort les unes aprés les autres par la premiere percuſſion, & que les vibrations *totales* ne ſervent qu'à augmenter la force du ſon, ou ſa durée. V. les M. p. 47.

Pour s'aſſurer de cette opinion, il a examiné des corps ſonores incapables de vibrations totales, comme des Cilindres de bois, & il les a pris de bois de Meriſier parce qu'il a plus de ſon. Il leur a trouvé des tons differents ſelon leurs differentes grandeurs, mais dans des proportions bien differentes de celles des Cordes. Afin que deux Cilindres de bois pleins & ſolides ſoient à l'Octave, il faut que leurs ſolidités ſoient comme 1 & 8, au lieu que es longueurs de deux Cordes doivent être comme 1 & 2,

deux Cilindres qui donnent la Quinte ſont comme 8 & 27, & deux Cordes comme 2 & 3, & en général afin que deux Cilindres faſſent un certain accord déterminé, il faut que leurs ſolidités ſoient comme les Cubes des longueurs des Cordes qui feroient ce même accord. Ainſi l'on voit tout d'un coup que ſi deux Cordes qui ſont comme 3 & 4 font la Quarte, deux Cilindres qui feront comme 27 & 64 la feront auſſi.

Mais ce qui eſt bien à remarquer, il ne ſuffit pas que les ſolidités de ces Cilindres qui font l'Octave, la Quinte, la Quarte &c. ſoient comme 1 & 8, 8 & 27, 27 & 64 &c. des Cilindres de differentes proportions, c'eſt-à-dire, dont la hauteur & le rayon de la baſe auront differents rapports, peuvent avoir leurs ſolidités, par ex. comme 1 & 8, & tous ces Cilindres-là pris deux à deux ne feront pas l'Octave, il n'y aura que les deux dont les hauteurs & les rayons de la baſe auront le même rapport de 1 à 2, & qui par conſequent ſeront *ſemblables*, puiſque leurs hauteurs & leurs rayons ſeront en même proportion. Il en va de même des Cilindres qui font les autres accords. On ſuppoſe ici ce qui eſt connu de tout le monde, que les ſolidités des Cilindres ſont comme les produits de leurs hauteurs par le quarré de leurs rayons.

Cette experience conduit à une Theorie aſſés agreable, & qui confirme bien la penſée où eſt M. Carré, que les vibrations des petites parties du corps ſonore ſont la veritable cauſe du ſon. Car cela ſuppoſé, il eſt neceſſaire qu'un Cilindre frappé fremiſſe non ſeulement ſelon toute ſa longueur, mais encore ſelon tous les cercles qui le compoſent, & qu'il ait des vibrarions tant *circulaires* que *longitudinales*, en un mot qu'un corps ſolide en ait ſelon ſes trois dimenſions. Si la nature de l'Octave eſt telle qu'il ſe doive faire deux vibrations d'un côté tandis qu'il ne s'en fait qu'une de l'autre, il faut, afin que deux Cilindres faſſent cet accord, que l'un faſſe deux vibrations tant longitudinales que circulaires tandis que l'autre n'en fera qu'une de chaque eſpece, & ſi un Cilindre

moins long de moitié qu'un autre employe la moitié moins de temps à faire une vibration longitudinale, il doit aussi avoir une circonference, ou ce qui revient au même, un rayon la moitié moindre, pour mettre la moitié moins de temps à une vibration circulaire, & par consequent il faut que les deux rayons aussi-bien que les longueurs ou hauteurs soient dans le même rapport de 1 à 2. C'est absolument la même chose pour les autres accords.

Par-là il est visible que deux Cilindres qui auront la même solidité, mais differents rapports de leur hauteur à leur rayon, feront differents accords avec un même Cilindre, & c'est aussi ce que M. Carré a trouvé par un grand nombre d'experiences dont il rapporte le détail.

Les Cordes doivent être comprises dans la Theorie générale des Cilindres, puisqu'elles en sont elles-mêmes, mais ce sont des Cilindres dont le rayon est presque infiniment petit par rapport à la hauteur ou longueur, & par consequent la base disparoist dans les effets sensibles, & il n'est plus question que de la longueur qui détermine les accords. On peut croire cependant qu'un accord de deux Cordes seroit encore plus juste & plus parfait, si leurs bases étoient comme dans deux Cilindres, & au lieu que pour déterminer les accords des Cordes differentes en longueur on suppose toûjours leurs grosseurs égales, on feroit mieux de les supposer inégales selon la proportion marquée.

Tout ceci n'est encore qu'une premiere vûë que M. Carré voudroit suivre, & qui le meneroit sans doute à de nouvelles découvertes par une grande quantité d'experiences differemment tournées. Il a déja trouvé que les Parallelepipedes pour faire des accords doivent être semblables entre eux comme les Cilindres, & semblables selon les mêmes rapports, ce qui confirme fort le principe général qui doit également porter sur les uns & sur les autres, & il a appris en même temps une chose qui s'y accommode parfaitement, c'est qu'un Cilindre

de même longueur, mais d'une plus grande ſolidité qu'un Parallelepipede peut néanmoins rendre un ſon plus aigu, ſi ſa ſolidité ne ſurpaſſe qu'à un certain point celle du Parallelepipede. Cela vient de ce que les vibrations circulaires du Cilindre ſe font en moins de temps que les vibrations *quarrées* du Parallelepipede ; car la figure circulaire étant parfaitement uniforme eſt plus favorable à la tranſmiſſion du fremiſſement d'une partie à l'autre, & de plus ce fremiſſement eſt lui-même une ondulation circulaire, dont une partie ſe perd ou ſe rallentit dans les angles d'un parallelogramme.

Il ſeroit curieux de voir quels changemens de tons répondent aux changemens de dimenſions, ou des Cilindres, ou des Parallelepipedes, ou même de quelques figures comme les Coniques, & s'il y a dans ces variations quelque ſuite reguliere. Il faudroit auſſi éprouver des Cilindres de métal, & de differents métaux, des Tuyaux creux auſſi-bien que des Cilindres ſolides. M. Carré a déja fait quelques-unes de ces experiences, & reſout par avance quelques Problêmes pour faciliter les autres, ſi on a envie de les faire. Mais tout cela demande du temps. Les Siſtêmes ne ſont plus des jeux d'eſprit, où la liberté d'imaginer tout ce qu'on vouloit eût rendu la lenteur inexcuſable.

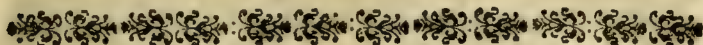
OBSERVATION

D'ACOUSTIQUE.

A L'occaſion du Memoire de M. Carré, M. de la Hire fit remarquer que quand on frappe un Cilindre de bois ſucceſſivement dans toutes ſes parties ſelon ſa longueur, il y a toûjours vers ſes deux bouts deux endroits où le ſon eſt conſiderablement amorti, & preſque éteint. Il n'importe de quelles dimenſions ſoit le Cilindre. Ce ſont comme deux foyers, non de reünion,

&

& d'augmentation de forces, mais au contraire de *dissipation* & d'affoibliſſement.



MECHANIQUE.

SUR LA RESISTANCE DES MILIEUX AU MOUVEMENT.

M. Varignon traitant en 1708 de la Réſiſtance des Milieux aux mouvements primitivement variés, n'avoit encore conſideré que ce qui doit arriver dans la premiere des trois hipotheſes les plus vrai-ſemblables qu'on peut faire ſur cette Réſiſtance *, & n'avoit pas même entierement épuiſé cette premiere hipotheſe. Il en donne ici une eſpece de petite ſuite.

V. les M. p. 69. 193. 267.

* V. l'Hiſt. de 1707. p. 139. & ſuiv. & celle de 1708. p. 123. & ſuiv.

Galilée, & pluſieurs autres aprés lui, ont trouvé par experience que dans des chutes de Corps peſants faites des plus grandes hauteurs qu'il a été poſſible, les viteſſes acquiſes ſuivoient aſſés exactement la raiſon des temps. Cependant l'Air réſiſtoit à ces Corps, & par conſequent les viteſſes ainſi reglées ne ſont pas les viteſſes primitives que la réſiſtance du milieu diminuë, mais ce ſont au contraire celles qui reſtent des primitives diminuées. M. Varignon dans tous ſes Memoires de 1708 les a priſes pour primitives, & il a cherché ſur ce pié-là quelle Courbe devoit décrire un Corps jetté obliquement à l'Horiſon. Maintenant il corrige cette erreur volontaire, il ne prend plus ces viteſſes que pour celles qui reſtent au Corps malgré la réſiſtance du milieu, & par conſequent en cherchant la Courbe de projection d'un Corps jetté obliquement, il ne conſidere plus l'effet de la réſiſtance du mi-

lieu à l'égard de ces viteſſes verticales imprimées par la peſanteur, mais ſeulement à l'égard de la viteſſe oblique de projection, imprimée par une force étrangere. La premiere hipotheſe ſur la Réſiſtance ſubſiſte toûjours. Il eſt évident que cette Courbe formée par deux mouvements dont il n'y en a qu'un que la réſiſtance du milieu altere, eſt differente de celle où ils en ſont alterés tous deux, mais elle lui reſſemble en d'autres choſes, par ex. elle a par la même raiſon une amplitude ou étenduë horiſontale finie avec un cours infini, & par conſequent une Aſimptote. Nous n'avons rien de nouveau à dire ſur cette nouvelle Courbe, le calcul eſt different, mais l'eſprit eſt le même.

Si les viteſſes acquiſes dans l'air malgré ſa réſiſtance ſuivent la raiſon des temps, il étoit naturel de chercher quelles étoient les viteſſes primitives, dont celles-là étoient les reſtes. M. Varignon trouve fort aiſément par ſes principes, qu'elles ſuivroient une ſomme faite des temps & de leurs quarrés, de ſorte que la viteſſe de la 1re Minute ſeroit 2, celle de la 2de ſeroit 6, celle de la 3me 12, celle de la 4me 20 &c. c'eſt-à-dire que ces viteſſes croîtroient comme la Suite des Nombres triangulaires, 1, 3, 6, 10 &c. Il y a plus; la Peſanteur, que l'on conçoit ordinairement comme conſtante, ne le ſeroit plus, & croîtroit juſqu'à devenir infinie au bout d'un temps infini. Comme c'eſt elle qui imprimeroit les viteſſes qu'on a déterminées, il eſt aiſé de remonter juſqu'à elle par leur moyen, en ſuivant les Regles générales de M. Varignon. Il les applique par occaſion à un Problême propoſé dans le Journal de Trevoux, qu'elles réſolvent dans le moment.

La premiere des trois hipotheſes les plus apparentes qu'on puiſſe faire ſur la réſiſtance des Milieux étant enfin entierement expediée, M. Varignon paſſe à la ſeconde; c'eſt celle où la réſiſtance ſuit les quarrés de la viteſſe. On ſuppoſe toûjours le Siſtême de Galilée pour la chute des Corps peſants. Si l'on ſuppoſe d'ailleurs, comme dans

l'Hist. de 1708*, que de la vitesse du 1er instant la résistance en retranche la 10me partie, on trouvera en suivant dans cette seconde hipothese de la résistance le même raisonnement qui a été fait dans la premiere, que la vitesse primitive du 1er instant, qui auroit été 1 ou $\frac{10}{10}$ ayant perdu $\frac{1}{10}$, la vitesse primitive du 2d qui seroit $\frac{9}{10}$ plus 1, ou $\frac{19}{10}$, perdroit une partie qui seroit à $\frac{1}{10}$, comme le quarré de la vitesse $\frac{19}{10}$ est au quarré de la vitesse $\frac{10}{10}$, ou 361 à 100. Cette partie seroit donc $\frac{361}{1000}$, qui étant retranchée de la vitesse primitive du 2d instant $\frac{19}{10}$ ou $\frac{1900}{1000}$ la réduiroit à n'être plus que $\frac{1539}{1000}$, de sorte que les vitesses des 2 premiers instants qui sans la résistance auroient été 1000 & 2000, ne seroient plus que 900 & 1539. Et si l'on veut leur comparer les vitesses 90 & 171, ou 900 & 1710 qui leur répondent dans la premiere hipothese de la résistance, on verra de combien cette seconde diminuë davantage la vitesse. * p. 124.

Si dans la premiere hipothese, où la même vitesse du Corps pesant qui tombe diminuë moins, elle ne peut cependant devenir que finie en un temps infini, & qu'arriver à celle qu'on nomme *terminale*, à plus forte raison ne deviendra-t-elle aussi que finie dans l'hipothese presente, & même il est évident que la terminale y doit être moindre. Pour la trouver, il ne faut que faire ici le même raisonnement qui a été fait dans l'Hist. de 1708*, en observant seulement que la résistance du Milieu croist par rapport à la Pesanteur en quelque instant que ce soit, non plus comme la vitesse de cet instant croist par rapport à la vitesse terminale, mais comme le quarré de cette vitesse croist par rapport au quarré de la terminale. Le changement d'hipothese rend la necessité de ce changement évidente. Et pour se servir du même Exemple qu'on a apporté, la vitesse terminale qui y étoit de prés de 21 Lieuës en une seconde, ne sera plus que de 480 Toises, qui ne sont pas la 96me partie de 21 Lieuës. * p. 126. & 127.

Quand M. Varignon vient à chercher par sa Theorie générale quelle doit être la Courbe qui dans l'hipothese

presente representera par ses Ordonnées les vitesses croissantes de chaque instant, & par les sommes de ses Ordonnées ou ses espaces curvilignes, les espaces parcourus en ligne droite par le Corps qui tombe, il trouve aussi-tôt qu'elle doit être telle que son Axe étant divisé en parties infiniment petites égales qui representeront des instants égaux, l'infiniment petit de cet Axe, ou d'une Abscisse quelconque, sera à l'infiniment petit de l'Ordonnée correspondante, comme le quarré de la vitesse terminale est au quarré de cette même vitesse moins le quarré de la vitesse de l'instant quelconque, qu'on a choisi.

Dans cette proportion, qui fait l'Equation de la Courbe, il est visible qu'il y a deux grandeurs constantes, l'infiniment petit de l'Abscisse, & le quarré de la vitesse terminale, & tout le jeu de la variation n'est qu'entre les deux autres grandeurs. Le quarré de la vitesse terminale moins celui d'une vitesse quelconque, est une grandeur qui diminuë toûjours à compter depuis l'origine de la Courbe, parce que la vitesse croist toûjours, & par consequent les differences des Ordonnées diminuent toûjours aussi, tandis que les Ordonnées croissent, ce qui prouve par les principes de la nouvelle Geometrie que la Courbe est contraire du côté de son Axe, & tend à lui devenir parallele. Il est clair qu'une droite parallele à cet Axe en sera aussi l'Asimptote, puisqu'il y a une Ordonnée finie representant la vitesse terminale à laquelle la Courbe ne peut arriver qu'aprés un cours infini. De ce que la vitesse est nulle à l'origine de la Courbe, il s'ensuit évidemment que les deux infiniment petits y sont égaux, & par consequent * la Tangente en ce point où la Courbe y coupe l'Axe sous un angle de 45 degrés. Et de ce que la vitesse du dernier point de la Courbe infiniment éloigné est la même que la terminale, il s'ensuit que l'infiniment petit de la derniere Ordonnée est nul par rapport à celui de l'Abscisse, & par consequent que la Courbe est alors parallele à son Axe,

* V. L'Hist. de 1706. p. 51. & 52.

Toutes ces conſequences s'offrent d'abord aux yeux d'un Geometre, même mediocre, mais il eſt moins facile de voir quels ſont les eſpaces compris par cette Courbe, & qui doivent repreſenter ceux que le Corps parcourra en tombant. M. Varignon trouve que ces eſpaces curvilignes ſont comme les Logarithmes negatifs de la Racine du quarré de la viteſſe terminale moins celui de la viteſſe correſpondante. Ces idées ne ſont pas ſi claires pour tout le monde, qu'il doive être inutile de les déveloper ici avec quelque étenduë.

Les Logarithmes en géneral ſont une ſuite de Grandeurs telles que la 1re & la 2de, la 2de & la 3me &c. repreſentent par leurs rapports arithmetiques les rapports geometriques de la 1re & de la 2de, de la 2de & de la 3me &c. d'une autre ſuite de Grandeurs, que l'on dit alors qui ont les premieres pour Logarithmes. La maniere dont des rapports arithmetiques repreſentent des rapports geometriques, conſiſte en ce que les arithmetiques ſont ou conſtants, ou croiſſants, ou décroiſſants, lorſque les geometriques le ſont. Ainſi tous les termes d'une progreſſion geometrique croiſſante ayant leur rapport geometrique conſtant, ils ont pour Logarithmes les Nombres naturels 1, 2, 3 &c. dont le rapport arithmetique eſt toûjours le même. Les Nombres naturels eux-mêmes * conſiderés ſelon leur rapport geometrique qui eſt toûjours décroiſſant, ont pour Logarithmes des nombres dont le rapport arithmetique l'eſt toûjours auſſi. Et quand le rapport geometrique d'une ſuite de Grandeurs ſeroit tantôt conſtant, tantôt croiſſant ou décroiſſant, cela n'empêcheroit pas qu'elles n'euſſent leurs Logarithmes, dont le rapport arithmetique varieroit de la même maniere. Il n'y a point de ſuite de Grandeurs, à laquelle on ne puiſſe imaginer des Logarithmes.

* V. l'Hiſt. de 1709. p. 87.

Une proprieté des Logarithmes connuë de tout le monde & qui ſuit immediatement de la nature des proportions arithmetique & geometrique, c'eſt que l'addition & la ſouſtraction ſont pour eux le même effet, que

la multiplication & la diviſion pour les Grandeurs, dont ils ſont Logarithmes. Parceque l'unité eſt une Grandeur qui en multipliant une autre Grandeur ne l'augmente point, & en la diviſant ne la diminuë point, il faut que ſon Logarithme ſoit une Grandeur qui ajoûtée à une autre ou retranchée ne l'augmente, ni ne la diminuë, or il n'y a que Zero qui ſoit de cette eſpece, & par conſequent o eſt toûjours le Logarithme de 1. Si l'on conçoit au-deſſous de 1 des fractions quelconques toûjours décroiſſantes, on verra que puiſque ces fractions ſont telles qu'en multipliant un nombre entier elles le diminuënt, & qu'en le diviſant elles l'augmentent, il faut que leurs Logarithmes ſoient des nombres qui ajoûtés à un autre le diminuënt & retranchés l'augmentent, & comme il n'y n'y a que des nombres negatifs qui puiſſent faire cet effet, ces Logarithmes le ſeront, au lieu que ceux des Grandeurs au-deſſus de 1 ſont poſitifs. Des Logarithmes negatifs ſont donc des Logarithmes de Grandeurs moindres que 1, ou que telle grandeur qu'on aura priſe arbitrairement pour l'unité. Plus une fraction eſt petite, plus elle diminuë le nombre qu'elle multiplie, & augmente celui qu'elle diviſe, & par conſéquent plus elle eſt petite, plus ſon Logarithme eſt grand, de ſorte que ſi elle eſt infiniment petite ou Zero, ſon Logarithme ſera infini. Pour concevoir donc à la fois toutes les ſuites de Grandeurs poſſibles, & tous leurs Logarithmes, il faut s'imaginer l'unité qui a d'un côté des Grandeurs croiſſantes juſqu'à l'infiniment grand, & de l'autre des Grandeurs décroiſſantes juſqu'a l'infiniment petit; Zero eſt le Logarithme de l'unité, au-deſſus duquel ſont des Logarithmes poſitifs toûjours croiſſants juſqu'a l'infini, & au-deſſous des Logarithmes negatifs, toûjours croiſſants pareillement juſqu'à l'infini, de ſorte que la premiere ſuite dont on conſidere les rapports geometriques eſt continuë, & toûjours croiſſante depuis l'infiniment petit juſqu'à l'infiniment grand, & la ſeconde, qui eſt la ſuite arithmetique, ou celle des Logarithmes, eſt, pour ainſi dire, briſée en ſon milieu.

Cela étant entendu ; on peut prendre pour l'unité la viteſſe terminale, & ſon quarré toûjours diminué de celui de la viteſſe de chaque inſtant, ou la Racine de ce quarré toûjours ainſi diminuée, formera une ſuite de Grandeurs toûjours moindres que l'unité. Les Logarithmes de ces Grandeurs ſeront donc negatifs, & ce ſont eux qui repreſentent les differents eſpaces parcourus dans les temps correſpondants par le Corps qui tombe. A l'origine de la Courbe, & de la chute du Corps la viteſſe étant nulle, la premiere Grandeur de la ſuite que nous conſiderons ici eſt 1, dont le Logarithme eſt o, & par conſequent l'eſpace parcouru par le Corps eſt nul, aprés cela les Grandeurs de la ſuite toûjours moindres que 1 ſont toûjours auſſi décroiſſantes, par conſequent leurs Logarithmes negatifs croiſſent, & à la fin le Logarithme de la derniere, qui eſt nulle, eſt infini, c'eſt à dire que l'eſpace parcouru par le Corps croiſt toûjours, & dans un temps infini devient infiniment grand.

Si l'on veut avoir des Logarithmes en lignes, il faut ſe ſervir ou d'une Logarithmique, ou d'une Hiperbole. La Logarithmique n'a ni origine, qui ſoit naturellement déterminée, ni fin, & les infiniment petits de ſes Abſciſſes étant ſuppoſés égaux, toutes ſes Ordonnées infiniment proches tirées ſur ſon Axe qui eſt auſſi ſon Aſimptote, & terminées à ſa convexité, ſont en progreſſion geometrique, & par conſequent les Abſciſſes correſpondantes ſont leurs Logarithmes. Si l'on prend arbitrairement une Ordonnée quelconque pour l'unité, ſon Abſciſſe ſera Zero, parce que l'on fixe arbitrairement à ce point-là une origine de la Courbe, & toutes les Ordonnées croiſſantes à l'infini qui ſeront d'un côté de cette premiere, & les Ordonnées décroiſſantes à l'infini qui ſeront de l'autre côté, auront les unes & les autres des Logarithmes toûjours croiſſants, mais les unes les auront poſitifs, & les autres negatifs, & le dernier des negatifs qui répondra à la derniere Ordonnée infiniment petite ſera infini, auſſi-bien que le dernier des poſitifs. Il eſt vi-

ſible que des Ordonnées quelconques priſes dans des intervalles inégaux, & qui par conſequent ne ſeront point entre elles en progreſſion geometrique, n'en auront pas moins pour Logarithmes leurs Abſciſſes correſpondantes, d'où il ſuit qu'un Logarithmique fournira toûjours les Logarithmes de telles lignes qu'on voudra, & quelque rapport qu'elles ayent entre elles, car elles ſeront quelques-unes de ſes Ordonnées. Il en va de même de l'Hiperbole. Une des Aſimptotes d'une Hiperbole équilatere étant priſe pour Axe, dont l'origine eſt au point de concours des deux Aſimptotes, & des lignes paralleles à l'autre Aſimptote étant priſes pour Ordonnées, on prend pour l'unité l'Abſciſſe de l'Ordonnée qui ſe termine au ſommet de l'Hiperbole, & ſi l'on conçoit enſuite que les Abſciſſes plus grandes que l'unité, & infiniment peu differentes chacune de celle qui la ſuit, croiſſent ſelon leur progreſſion geometrique, il eſt démontré que les eſpaces compris entre la difference d'une Abſciſſe quelconque, le petit Arc Hiperbolique correſpondant, & les deux Ordonnées qui s'y terminent, ſeront tous égaux entre eux, de ſorte que les ſommes de ces eſpaces croiſtront toûjours en progreſſion arithmetique, & qu'elles ſeront les Logarithmes des Abſciſſes correſpondantes. L'eſpace aſimptotique étant fini, il eſt le Logarithme d'une Abſciſſe qui eſt alors infinie, puiſque c'eſt l'Aſimptote même étenduë à l'infini. Si de l'autre côté de l'Ordonnée qui ſe termine au ſommet de l'Hiperbole, on prend des Abſciſſes moindres que celle qui eſt 1, & toûjours décroiſſantes juſqu'au point de concours des Aſimptotes, ce qu'on fera en les prenant toûjours égales à 1, moins une Grandeur qui croiſtra toûjours juſqu'à devenir égale à 1, & ſi ces Abſciſſes décroiſſent en progreſſion geometrique, les eſpaces hiperboliques infiniment petits qui répondront à leurs differences ſeront encore égaux entre eux, d'où il ſuit que les ſommes croiſſantes des eſpaces ſeront les Logarithmes des Abſciſſes décroiſſantes, juſqu'à ce qu'enfin l'eſpace devenu aſimptotique & infini ſoit

ſoit le Logarithme de la derniere Abſciſſe devenuë Zero. Ainſi celle qui étoit 1 ne pourra avoir aucun eſpace pour Logarithme, ou, ce qui eſt la même choſe, elle aura Zero, & d'un côté de ce Zero ſeront tous les Logarithmes poſitifs, & de l'autre tous les negatifs.

M. Varignon trouve donc par une Logarithmique, ou par une Hiperbole équilatere les Logarithmes qui doivent repreſenter les eſpaces parcourus par le Corps tombant, & comme ce rapport des eſpaces vient eſſentiellement de l'hipoteſe qu'on fait ici ſur la Réſiſtance, l'une ou l'autre de ces Courbes entre neceſſairement auſſi dans la conſtruction de celle qui repreſente les viteſſes que la réſiſtance laiſſe au Corps dans cette hipoteſe. C'étoient dans la premiere hipotheſe la Logarithmique ou l'Hiperbole mêmes qui ſervoient immediatement à exprimer ces viteſſes. Les differents calculs que demande l'une ou l'autre de ces deux Courbes, les differents tours qu'il faut prendre pour les employer, les comparaiſons qu'on en peut faire, les conſequences où M. Newton eſt arrivé ſur cette même matiere par d'autres methodes, & que M. Varignon veut retrouver par la ſienne, donnent beaucoup ici à la Geometrie dequoi s'exercer. De tout cela nous n'en apporterons qu'un ſeul exemple, choiſi ſur un fort grand nombre.

M. Newton a trouvé que dans l'hipotheſe preſente la force de la peſanteur toûjours diminuée par la réſiſtance du Milieu, décroiſt en progreſſion geometrique, les temps étant pris en progreſſion arithmetique, ou, ce qui eſt ici la même choſe, les eſpaces parcourus, puiſqu'ils peuvent être repreſentés par des Logarithmes, qui ſuivent cette progreſſion. Ce que nous avons dit ſur les Logarithmes hiperboliques des Abciſſes moindres que 1, produit naturellement cette verité. Car ces Logarithmes étant en progreſſion arithmetique, les Abciſſes correſpondantes ſont neceſſairement en progreſſion geometrique. La peſanteur peut être repreſentée par l'Abſciſſe qui eſt 1, & la grandeur toûjours croiſſante qu'il en faut

retrancher, sera ce que la résistance du milieu retranche toûjours de la force, ou de l'effet de la pesanteur. Or les Abscisses correspondantes aux Logarithmes supposés ne sont que l'unité toûjours ainsi diminuée de plus en plus, jusqu'à devenir enfin Zero, donc les temps ou les espaces parcourus étant pris en progression arithmetique, la force ou l'effet de la pesanteur décroist toûjours en progression geometrique, jusqu'à ce qu'au bout d'un temps infini, ou d'un espace infini parcouru, cette force ou plûtôt son effet soit entierement détruit par la résistance du Milieu, aprés quoi, comme nous l'avons dit dans l'Hist. de 1708 *, s'il étoit possible que le Corps continuât à tomber, il n'auroit plus qu'un mouvement uniforme.

* p. 126.

Il n'a été question jusqu'ici que d'un Corps mû par sa seule pesanteur, mais il pourroit avoir été jetté de haut en bas avec une certaine vitesse initiale constante, à laquelle s'ajoûteroit toûjours la vitesse variable que la pesanteur produiroit. Ce que nous avons dit sur ce cas-là dans la premiere hipothese de la Résistance, s'applique ici de soi-même, les changements necessaires à cause du changement d'hipothese, y étant apportés. Ici la Courbe des deux cas sera la même, comme elle l'étoit là, mais au lieu de commencer par une Ordonnée égale à Zero, ce qui arrive quand le Corps n'est mû que par sa pesanteur, elle commencera par une Ordonnée finie qui representera la vitesse initiale. Cette vitesse sera encore ici comme là, ou plus petite que la terminale, ou égale, ou plus grande, & dans ces trois cas les effets seront les mêmes de chaque côté; la vitesse du 1er cas sera toûjours accelerée, celle du 2d toûjours uniforme, celle du 3me toûjours retardée, & les mêmes changements arriveront aux differentes Courbes des deux hipotheses.

Dans l'hipothese presente des Logarithmes representeront les espaces parcourus, lorsqu'il y a une vitesse initiale, comme ils les representoient lorsqu'il n'y en avoit point, mais ce seront des Logarithmes d'autres Gran-

deurs. M. Varignon les trouve & par la Logarithmique, & par l'Hiperbole, & montre une grande abondance de tours geometriques.

Les mouvements retardés primitivement selon le Sistême de Galilée par l'action de la pesanteur, & de plus retardés encore par la résistance supposée du Milieu, suivant les accelerés. On considere le mouvement d'un Corps jetté de bas en haut, aprés que l'on a consideré sa chute de haut en bas. On a vû dans la premiere hipothese de la Résistance * que la même Courbe, mais prise de deux sens contraires, representoit les vitesses du mouvement acceleré, & du retardé, mais dans la presente hipothese ce sont deux Courbes differentes. M. Varignon trouve en un moment par sa Formule générale que dans la Courbe qui represente ici les vitesses du mouvement retardé, l'infiniment petit de l'Abscisse supposé constant est à l'infiniment petit d'une Ordonnée quelconque, comme le quarré de la vitesse initiale avec laquelle on fait la projection de bas en haut, est à ce même quarré plus celui de la vitesse representée par l'Ordonnée quelconque qu'on a choisie. Les vitesses sont necessairement ici des Grandeurs toûjours décroissantes, & par consequent aussi les sommes faites de leurs quarrés & de celui de la vitesse initiale qui est constante & déterminée. Donc par la proportion fondamentale qui fait l'Equation de la Courbe, les infiniment petits des Ordonnées sont décroissants aussi-bien que les Ordonnées, ce qui rend la Courbe convexe du côté de son Axe. La vitesse variable & décroissante du Corps étant nulle au dernier instant de son mouvement, les deux Grandeurs finies de la proportion sont égales, & par consequent aussi les deux infiniment petits, d'où il suit que la Courbe finit en coupant son Axe sous un angle de 45 degrés. Et comme à l'origine du mouvement la vitesse variable est égale à l'initiale, il s'ensuit évidemment que l'infiniment petit de l'Abscisse n'est alors que la moitié de celui de l'Ordonnée, ce qui donne un angle plus grand que

* V. l'Hist. de 1708. p. 130. & 131.

45 degrés, dont la Courbe à son origine est inclinée à son Axe. On voit par-là combien elle est differente de celle du mouvement acceleré, décrite ci-dessus *.

* p. 100. M. Varignon détermine assés facilement, & par le moyen soit d'une Logarithmique, soit d'une Hiperbole équilatere, les espaces curvilignes quelconques compris par cette Courbe, & heureusement leurs rapports se reduisent ensuite à des rapports de simples lignes droites. Par-là se déterminent les rapports des espaces parcourus en ligne droite de bas en haut par le Corps en des temps quelconques, aprés quoi on les compare à ceux que le Corps auroit parcourus, soit que son mouvement eût été uniforme, & que sa pesanteur ne l'eût pas retardé, soit qu'il n'eût été retardé que par sa pesanteur seule & n'eût trouvé aucune résistance de la part du Milieu, soit même qu'il fût tombé de haut en bas. On compare aussi les durées de differents mouvements; par ex. la durée du mouvement du Corps jetté de bas en haut dans un Milieu qui résiste en raison des quarrés des vitesses, est plus courte qu'elle n'auroit été dans un Milieu sans résistance, en même proportion qu'un Cercle est plus petit que son quarré circonscrit, ce que M. Hugens avoit déja avancé, mais sans preuve.

M. Varignon, qui ne veut rien laisser à desirer sur cette matiere, y rassemble, outre plusieurs Propositions nouvelles qui naissent sous ses pas, toutes celles que M.rs Huguens & Newton avoient déja ou simplement avancées, ou prouvées par d'autres methodes, & quelquefois d'une maniere assés épineuse.

De ce grand nombre de Propositions démontrées par M. Varignon, nous n'en détacherons ici que deux plus remarquables, & plus intelligibles, & d'ailleurs nouvelles.

1. La pesanteur constante qui s'oppose au mouvement du Corps jetté de bas en haut, & la résistance variable du Milieu, toûjours décroissante selon les quarrés des vitesses, font une somme toûjours décroissante, & c'est-là

tout ce que le Corps trouve d'opposition à son mouvement. Si l'on divise en parties égales tout l'espace parcouru par le Corps depuis qu'il a commencé à se mouvoir, cette somme prise à la fin de chaque division décroist en progression geometrique.

2. A chaque instant du mouvement, la pesanteur du Corps, sa vitesse, & la résistance que lui fait le Milieu, sont trois Grandeurs en progression geometrique. En effet, la pesanteur étant prise pour 1, il saute aux yeux que 1, la vitesse, & le quarré de la vitesse font une proportion geometrique continuë. Et à la fin du mouvement où la vitesse est Zero, cette proportion subsiste encore, car comme la pesanteur où 1 est à la vitesse devenuë Zero ou un infiniment petit du 1[er] genre, ainsi cet infiniment petit est à son quarré, qui est un infiniment petit du 2[d] genre.

Aprés tout ce qui a été dit dans les Hist. de 1707 & de 1708, on voit assés que quand M. Varignon a une fois la Courbe qui dans l'hipothese presente de la Résistance exprime par ses Ordonnées les vitesses d'un Corps mû soit de haut en bas, soit de bas en haut, il lui est fort aisé de trouver celle qui par ses Ordonnées exprimera les vitesses correspondantes que le Milieu a détruites à la fin de chaque temps, ou les résistances *totales*.

SUR UN PROBLEME DE STATIQUE.

SI une Corde d'une longueur indéterminée attachée par une de ses extrémités à un clou, passe librement sur une Poulie fixe & porte à son autre extrémité un poids, il est clair que si l'on suppose cette corde absolument sans pesanteur, sa partie comprise entre le clou & la poulie sera tenduë en ligne droite. Mais si l'on attache à cette même partie un second poids, comme il la V. les M. p. 351.

tirera en embas, il l'allongera en faisant passer de nouvelle corde sur la Poulie, & il lui fera faire un angle à l'endroit où il sera attaché, de sorte que cette partie sera comme brisée en deux. Si ce second poids étoit infiniment petit par rapport au premier, il ne changeroit rien à la premiere position de la corde, mais s'il étoit infiniment grand, il tireroit la corde & en allongeroit la partie comprise entre le clou & la poulie, jusqu'à ce qu'il fût mis dans la ligne verticale tirée par le clou, qui seroit son point de suspension. Dans tous les cas moyens entre ces deux, il allongera d'autant plus la partie supposée de la corde, il descendra d'autant plus bas, & approchera d'autant plus de la verticale tirée par le clou, qu'il sera plus grand par rapport au premier. Le rapport des deux poids étant donné, aussi-bien que le point où l'on attache le second à la corde, on demande jusqu'à quel point il descendra, ou, ce qui revient au même, à quel point il sera en équilibre avec le premier? C'est un Problême de Statique proposé à M. Varignon, & qu'il a résolu trés-facilement par les principes de sa *Nouvelle Mechanique* imprimée en 1687.

Nous avons déja expliqué selon ces mêmes principes dans l'Hist. de 1702*, & comment deux Puissances differentes qui agissent pour mouvoir un même Corps ne peuvent le mouvoir que selon une troisiéme direction composée & résultante de leurs deux directions particulieres, & comment elles demeureroient en équilibre, c'est à dire, sans aucun effet de leurs actions, si l'on présentoit à ce Corps dans la ligne de leur direction composée, un obstacle invincible, un point fixe & inébranlable. C'est-là ce qui fait l'équilibre du Levier, du Plan incliné, &c. mais l'équilibre arrive encore sans qu'il se presente un obstacle de cette nature au mouvement du Corps; par ex. quand deux Puissances soûtiennent un Corps pesant suspendu à deux Cordes. C'est cet équilibre dont nous avons besoin presentement.

* p. 108. & 109.

Un Corps pesant ne peut être soûtenu en l'air à moins

qu'on ne lui donne autant de force pour monter, qu'il en a naturellement pour descendre, & deux Puissances qui le tiendront suspendu chacune à une corde ne lui peuvent imprimer cette force pour monter, si leurs deux directions ne concourent à lui en donner une directement opposée à celle que la pesanteur lui donneroit, & en même temps si l'impression composée qu'il reçoit des deux actions qu'elles exercent sur lui n'est égale à celle de cette même pesanteur. Pour le 1[er] point, il faut, puisque la direction de la pesanteur est verticale de haut en bas, que les deux Puissances s'accordent à donner au Corps une direction verticale de bas en haut. Cette verticale sera necessairement posée entre les deux directions simples des deux Puissances, & elle sera la Diagonale d'un Parallelogramme qu'on feroit des lignes de ces deux directions simples, ausquelles nous ne donnons point encore de longueur déterminée. Quant au 2[d] point, si l'on détermine à ces deux lignes des directions simples une longueur telle que chacune represente la Puissance dont elle est direction, ou, ce qui est la même chose, qu'elles ayent par leurs longueurs le même rapport que les puissances ont par leurs forces, & si de ces deux lignes on fait un Parallelogramme, dont la Diagonale sera, comme nous venons de le dire, la direction verticale du Corps pesant, il est constant que cette Diagonale representera l'impression composée que font les deux Puissances sur le Corps. Si en même temps la longueur de cette Diagonale a le même rapport aux deux côtés du Parallelogramme, que la pesanteur du Corps aux deux Puissances, l'impression des deux puissances sur le corps sera égale à celle de sa pesanteur, & par consequent il y aura équilibre.

Deux Puissances étant déterminées avec leurs directions, elles ne peuvent donc soûtenir qu'un Corps d'une certaine pesanteur; tout autre Corps, elles le feroient monter, ou le laisseroient descendre. Réciproquement un Corps pesant étant déterminé avec deux Puissances qui

doivent le soûtenir, elles ne peuvent le soûtenir que sous certaines directions.

Dans le Problême proposé, le second poids doit être soûtenu par le premier, & par le Clou. Le Clou étant supposé immobile & inébranlable, il n'a point de force déterminée, & il soûtiendra toûjours la partie quelconque du second poids, que le premier ne soûtiendra pas. Ainsi l'on sait seulement qu'il se fera un Parallelogramme, dont la Diagonale prise sur une verticale, & un des Côtés pris sur la direction inconnuë sous laquelle le premier poids tirera le second, auront le même rapport que le second poids & le premier.

Par le moyen de ce seul rapport donné, M. Varignon construit une Courbe, sur laquelle il faut necessairement que se trouve le point où le second poids est suspendu à la Corde, quelque place que ce poids prenne, car cette Courbe est le *Lieu* de tous les Parallelogrammes possibles formés sous le rapport déterminé. D'un autre côté, le point où le second poids est suspendu à la corde, ou, ce qui est la même chose, sa distance du Clou étant déterminée, il faut necessairement aussi, & quelque place que le poids prenne, que ce point se trouve sur la circonference d'un Cercle décrit du Clou comme centre, & qui aura cette distance pour rayon. Delà il suit évidemment que l'intersection de la Courbe & du Cercle déterminera la place que prendra le second poids. Trouver aprés cela l'équation algebrique de la Courbe, ou même ses proprietés, ce n'est plus, pour ainsi dire, qu'un jeu geometrique.

M. Des Billettes a donné la maniere dont se fait la Préparation des Cuirs,

M. Jaugeon, celle dont se font les Bas soit à l'Aiguille, soit au Métier.

Et M. de la Hire, tout ce qui apartient à la pratique de l'Art de la Peinture.

MACHINES

MACHINES OU INVENTIONS
APPROUVÉES PAR L'ACADEMIE
PENDANT L'ANNÉE 1709.

I.

UNe Machine inventée par M. Molard pour faire mouvoir avec une grande facilité les Aiguilles des Cadrans trés-éloignés de l'Horloge, ſans avoir beſoin de longues verges de fer, ni de Molettes, & de Pignons, dont la peſanteur demande un grand poids pour le mouvement des Roües. Cette Machine a paru ingenieuſe, quoique ce ne ſoit qu'une application d'un renvoy, dont on ſe ſert ordinairement pour les Sonnettes.

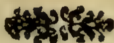
II.

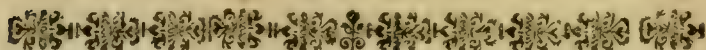
Le Paraſol ou Parapluye de M. Marius dont il a été parlé dans l'Hiſt. de 1705* & dans celle de 1707*, encore pefectionné.

* p. 138.
* p. 136.

III.

Une Methode de tirer la ſeconde & derniere Séance de la Lotterie de Lorraine. Elle a été trouvée ingenieuſe, & l'on a crû qu'elle devoit donner ſûrement un Lot à celui qui auroit pris 50 Billets de ſuite, ſans ce qui lui pouvoit venir de haſard.





ELOGE

DE M. DE TSCHIRNHAUS.

ERNFROY WALTER DE TSCHIRNHAUS Seigneur de Kiſlingſwald & de Stoltzenberg nâquit le 10 Avril 1651 à Liſlingſwald dans la Luſace ſuperieure, de Chriſtophle Tſchirnhaus & de N... de Sterling, tous deux d'une ancienne nobleſſe. Il y avoit plus de 400 ans que la maiſon de Tſchirnhaus qui étoit venuë de Moravie & de Boheme poſſedoit prés de la ville de Gorlits cette Seigneurie de Kiſlingſwald, où nâquit celui dont nous parlons.

Il eut pour les Sciences tous les Maiſtres que l'on donne aux gens de ſa condition, mais il répondit à leurs ſoins autrement que les gens de ſa condition n'ont coûtume d'y répondre. Dés qu'il ſût qu'il y avoit au monde une Geometrie, il la ſaiſit avec ardeur, & delà il paſſa rapidement aux autres parties des Mathematiques, qui en lui offrant mille nouveautés agréables, ſe diſputoient les unes aux autres ſa curioſité.

A l'âge de 17 ans ſon Pere l'envoya achever ſes études à Leyde, il y arriva dans le temps d'une maladie épidemique qui le mit en grand danger de ſa vie. Il eut bien-tôt malgré ſa jeuneſſe beaucoup de réputation parmi les Savants de Hollande. Mais la guerre ayant commencé en 1672 il devint homme de guerre, & montra qu'il ſavoit auſſi-bien faire ſon devoir que ſuivre ſon inclination. Cette inclination dominante pour les Lettres contribua même à lui faire prendre les armes, elle lui avoit fait lier une étroite amitié avec M. le Baron de Neuland qui avoit les mêmes goûts, & comme ce Baron étoit au ſervice des Etats, il engagea M. Tſchirnhaus à

y entrer aussi en qualité de Volontaire, afin qu'ils ne se separassent point l'un de l'autre. M. de Tschirnhaus servit 18 mois, aprés quoi il fut obligé de retourner en son Païs. Il en repartit quelque temps aprés pour voyager selon la coûtume de sa nation, qui croit avoir besoin du commerce des autres pour se polir, & qui en doit parvenir d'autant plus aisément à se rendre plus polie qu'elles. Il vit l'Angleterre, la France, l'Italie, la Sicile, Malte. Dans tous les Païs où il passa il s'attacha à voir les Savants & tout ce qui est un spectacle pour les Savants, curiosités de l'Histoire naturelle, ouvrages extraordinaires de l'art, manufactures singulieres. Ce grand nombre de differents faits bien observés ne sont pas dans un bon esprit de simples faits, & d'inutiles ornements de la memoire, ils deviennent les principes d'une infinité de vûës, où la plus fine Theorie denuée d'experience n'arriveroit jamais. Plus les yeux ont vû, plus la raison voit elle-même.

M. de Tschirnhaus retourna en Allemagne, & alla passer quelque temps à la Cour de l'Empereur Leopold, car le Philosophe peut aller jusques dans les Cours, ne fût-ce que pour y observer des mœurs & des façons de penser qu'il n'auroit pas trop devinées.

Au milieu de cette vie agitée, ou du moins assés mêlée de mouvement, les Siences, & sur-tout les Mathematiques occupoient toûjours M. de Tschirnhaus. Il avoit acquis avec art l'habitude de n'être pas aisément troublé, & s'étoit endurci aux distractions. Il vint à Paris pour la troisiéme fois en 1682; il y apportoit des découvertes qu'il vouloit proposer à l'Academie des Sciences, c'étoient les fameuses Caustiques qui ont retenu son nom, car on dit ordinairement les Caustiques de M. de Tschirnhaus comme la Spirale d'Archimede, la Conchoïde de Nicomede, la Cissoïde de Dioclés, les Développés de M. Huguens, & un Geometre ne doit pas être moins glorieux d'avoir donné son nom à une Courbe, ou à une espece entiere de Courbes, qu'un Prince

d'avoir donné le ſien à une Ville. M. de Tſchirnhaus, quoiqu'il n'eût encore que 31 ans, fut mis par le Roi au nombre de ces mêmes Academiciens qu'il étoit venu conſulter, & prendre en quelque ſorte pour ſes Juges.

Tout le monde ſait que les Cauſtiques ſont les Courbes formées par le concours des Rayons de lumiere qu'une autre Courbe quelconque a reflechis ou rompus. Elles ont une proprieté remarquable, c'eſt qu'elles ſont égales à des lignes droites connuës, quand les Courbes qui les produiſent ſont geometriques. Ainſi M. de Tſchirnhaus trouvoit que la Cauſtique formée dans un Quart de cercle par des rayons reflechis qui étoient venus d'abord paralleles à un diametre, étoit égale aux $\frac{3}{4}$ du diametre. Les rectifications des Courbes qui ne ſont pas encore aujourd'hui fort communes, l'étoient alors beaucoup moins, & de plus, c'eſt un grand merite à cette découverte d'avoir précedé l'invention du Calcul de l'Infini, qui l'auroit renduë plus facile. L'Academie la jugea digne d'être examinée en particulier par des Commiſſaires, qui furent M^rs Caſſini, Mariotte, & de la Hire. Ce dernier conteſta à M. de Tſchirnhaus une generation ou deſcription qu'il donnoit de la Cauſtique par reflexion du Quart de Cercle. M. de Tſchirnhaus qui ne montroit pas le fond de ſa methode, ne ſe rendit pas à M. de la Hire, qui de ſon côté perſiſta à tenir la generation dont il s'agiſſoit pour fort ſuſpecte. L'Auteur s'en tenoit ſi ſûr qu'il l'envoya au Journal de Leipſic, mais ſans démonſtration.

Il retourna en Hollande, où il acheva, & laiſſa entre les mains de ſes Amis un Traité intitulé *De Medicina Mentis & Corporis*. Il avoit commencé à compoſer dés l'âge de 18 ans, & même avec l'intention d'imprimer, preſque inſeparable du travail de la compoſition, dont elle eſt la premiere récompenſe. Il avoit fait en differents temps des Ouvrages, dont ſes amis & lui avoient été fort contents, mais par bonheur l'impreſſion n'en ayant pû être aſſés prompte, ils lui avoient tellement

déplû, quand il étoit venu à les revoir, qu'il avoit pris une ferme résolution de ne rien imprimer qu'il n'eût 30 ans, & de sacrifier tous les enfans de sa jeunesse, sacrifice d'autant plus rare qu'ils sont nés dans un temps où l'on aime avec plus d'ardeur & moins de connoissance. L'âge qu'il s'étoit prescrit étoit passé, quand son premier Ouvrage, qui a été aussi le seul, parut à Amsterdam en 1687, dédié au Roi, à qui il marquoit par-là sa reconnoissance d'être entré dans l'Academie. Le titre du livre est, pour ainsi dire, double de celui de *la Recherche de la Verité*, car celui-ci ne veut que rectifier ou guerir l'Esprit, & l'autre entreprend aussi le Corps. Avec une bonne Logique, & une bonne Medecine, les Hommes n'auroient plus besoin de rien.

Pour donner un exemple de la maniere de conduire son esprit dans les Sciences en allant toûjours du plus simple au plus composé, & en combinant ensemble les verités à mesure qu'elles naissent, M. de Tschirnhaus propose une génération universelle de Courbes par des Centres ou Foyers, dont le nombre croist toûjours, & fait croistre en même temps le degré dont est la Courbe. Il prétend tirer delà une methode générale pour les Tangentes, qu'il vante fort, & quantité d'autres Theorêmes ou Problêmes importants, & à cette occasion il insinuë qu'il ne croit pas s'être trompé sur la Caustique du Quart de Cercle. M. de la Hire a démontré depuis en 1694 dans son Traité des Epicycloides, que cette Caustique en étoit une, qu'à la verité elle étoit de la longueur déterminée par M. de Tschirnhaus, mais qu'elle ne pouvoit pas être décrite de la maniere qu'il avoit proposé. Il n'est pas étonnant que l'on fasse quelque faux pas dans des routes nouvelles, & que l'on s'ouvre soi-même. L'esprit original qui est ardent, vif & hardi, peut n'être pas toûjours assés mesuré, ni assés circonspect. On sent dans le Livre de M. de Tschirnhaus cette chaleur, & cette audace, qui appartiennent au genie de l'invention. Si l'Auteur n'avoit beaucoup fait, on croiroit vo-

lontiers qu'il promet trop, & qu'il éleve trop haut nos esperances.

Les préceptes de Theorie qu'il donne ne sont pas si singuliers, que de certains préceptes de Pratique, qu'il y ajoûte, ou plûtôt certains usages dont il s'étoit bien trouvé. Nous les rapporterons ici, parce que rien ne sauroit mieux representer le détail de sa vie particuliere, par rapport à l'étude. Il faisoit ses Experiences en Eté, & les mettoit en ordre, ou en tiroit ses consequences, ou enfin faisoit ses grandes recherches de Theorie pendant l'Hiver, qu'il trouvoit plus propre à la meditation. Sur la fin de l'Autonne, il donnoit quelques soins particuliers à sa santé, & faisoit une espece de revûë de ses forces corporelles, pour entrer dans cette saison destinée aux plus grands travaux de l'esprit. Il relisoit les compositions de l'hiver précedent, s'en rappelloit les idées, se faisoit renaistre l'envie de les continuer, & alors il commençoit à se retrancher le repas du soir, & à diminuer même un peu le disner de jour en jour. Au lieu de souper, ou il lisoit sur les matieres qu'il avoit dessein de traiter, ou il s'en entretenoit avec quelque ami savant. Il se couchoit à 9 heures, & se faisoit éveiller à 2 heures aprés minuit. Il se tenoit exactement pendant quelque temps dans la même situation où le reveil l'avoit trouvé, ce qui l'empêchoit d'oublier le songe qu'il faisoit en ce moment, & si, comme il pouvoit assés naturellement arriver, ce songe rouloit sur la matiere dont il étoit rempli, il en avoit plus de facilité à la continuer. Il travailloit dans le silence & le repos de la nuit. Il se rendormoit à 6 heures, mais seulement jusqu'à 7, & reprenoit son travail. Il dit qu'il n'a jamais fait de plus grands progrés dans les Sciences, qu'il n'a jamais senti son allûre plus vigoureuse, & plus rapide, que quand il a observé toutes ces pratiques avec le plus de regularité. On y pourra trouver un soin excessif de se ménager tous les avantages possibles, mais toutes les grandes passions vont à l'égard de leur objet jusqu'à une espece de superstition.

Il lui arrivoit ſouvent pendant la nuit de voir une grande quantité d'étincelles tres-brillantes, qui voltigeoient & joüoient en l'air. Quand il vouloit les regarder fixement, elles diſparoiſſoient, mais quand il les negligeoit, non-ſeulement elles duroient preſque autant que ſon application au travail, mais elles redoubloient d'éclat & de vivacité. Enſuite il parvint à les voir en plein jour, lorſqu'il eut acquis un certain degré de facilité dans la meditation. Il les voyoit ſur une muraille blanche, ou ſur un papier qu'il avoit placé à côté de lui. Ces étincelles, viſibles pour lui ſeul, étoient en même temps & un effet, & une repreſentation des eſprits de ſon cerveau, violemment agités.

Cette paſſion ardente pour l'étude doit aſſés naturellement donner l'idée d'un homme extrêmement avide de gloire, car enfin il n'y a point de grands travaux ſans de grands motifs, & les Savants ſont des ambitieux de Cabinet. Cependant M. de Tſchirnhaus ne l'étoit point, il n'aſpiroit point par toutes ſes veilles à cette immortalité qui nous touche tant, & nous appartient ſi peu, & il a dit à ſes amis que dés l'âge de 24 ans il croyoit s'être affranchi de l'amour des plaiſirs, des richeſſes, & même de la gloire. Il y a des hommes qui ont droit de rendre témoignage d'eux-mêmes. Il aimoit donc les Sciences de cet amour pur & deſintereſſé qui fait tant d'honneur, & à l'objet qui l'inſpire, & au cœur qui le reſſent; la maniere dont il s'exprime en quelques endroits ſur les raviſſements que cauſe la joüiſſance de la Verité, eſt ſi vive & ſi animée qu'il auroit été inexcuſable de ſe propoſer une autre récompenſe.

Le Traité *De Medicina Mentis & Corporis* contient auſſi ſes principes ſur la ſanté. Il n'étoit pas ſi ſequeſtré du monde par ſon goût pour les Sciences, qu'il ne fût quelquefois obligé de vivre avec les autres, & à leur maniere, & par conſequent de manger & de boire trop. Il propoſe plutôt des précautions pour prévenir les maux de ce genre de vie, que des remedes pour les guerir, ſi

ce n'eſt que la ſueur, dont il fait grand cas, & à laquelle il a toûjours recours, eſt en même temps une précaution & un remede. Du reſte il traite de Poiſon tout ce qui ne peut pas être aliment. Il veut que l'on écoute & que l'on ſuive ce goût ſimple, & exempt de toute reflexion, qui nous porte à certaines viandes, ou un dégoût pareil qui nous en éloigne; ce ſont des avis ſecrets de la Nature, ſi cependant la Nature a un ſoin de nous ſi exact, & auquel on puiſſe tant ſe fier. Il dit qu'étant dans l'obligation de manger beaucoup, il mangeoit du moins alternativement des choſes fort oppoſées, chaudes & froides, ſalées & douces, acides & ameres, & que ce mêlange qui paroiſſoit biſarre aux autres Convives, & qu'ils prenoient même pour un effet d'intemperance, ſervoit à corriger les excés des qualités les uns par les autres. On doit dire à ſon honneur que ces ſortes de ſingularités où le jettoit le ſoin de ſa ſanté, n'étoient pas ſi grandes que celles où l'amour de l'étude l'avoit conduit.

Aprés la publication de ſon Ouvrage, étant chez lui en Saxe, il commença à ſonger à l'execution d'un grand deſſein qu'il meditoit depuis long-temps. Il croyoit qu'à moins que l'on ne rendît l'Optique plus parfaite, nos progrés dans la Phiſique étoient arrêtés à peu prés au point où nous ſommes, & que pour mieux connoiſtre la Nature, il la faloit mieux voir. D'ailleurs, lui qui étoit l'inventeur des Cauſtiques, il prévoyoit bien que de plus grands & de meilleurs verres convexes expoſés au Soleil ſeroient de nouveaux fourneaux, qui donneroient une Chimie nouvelle. Mais dans toute la Saxe, il n'y avoit point de Verrerie propre à l'execution de ces grandes idées. Il obtint de l'Electeur ſon Maiſtre, Roi de Pologne, la permiſſion d'y en établir, & comme on s'aperçût bien-tôt de l'utilité que le Païs en recevoit, il y en établit juſqu'à trois. Delà ſortirent des nouveautés & de Dioptrique & de Phiſique preſque miraculeuſes. Nous les annonçâmes ſur la parole de M. Tſchirnhaus dans les Hiſt.

Hist. de 1699 * & de 1700 *. Quelques-unes étoient de nature à pouvoir trouver des incredules, car en perfectionnant la Dioptrique elles la renversoient, mais enfin le Miroir ardent que S. A. R. Mgr le Duc d'Orleans a acheté de M. de Tschirnhaus, est du moins un témoin irreprochable d'une grande partie de ce qu'il avoit avancé.

* p. 90. & suiv.
* p. 118, & suiv.

Ce Miroir est convexe des deux côtés, & est portion de deux sphéres dont chacune a 12 pieds de rayon. Il a 3 pieds Rhinlandiques de diametre, & pese 160 liv. ce qui est une grandeur énorme par rapport aux plus grands verres convexes qui ayent jamais été faits. Les bords en sont aussi parfaitement travaillés que le milieu, & ce qui le marque bien, c'est que son foyer est exactement rond. Ce Verre est une Enigme pour les habiles gens. A-t-il été travaillé dans des Bassins comme les Verres ordinaires de Lunettes? a-t-il été jetté en moule? On peut se partager sur cette question, les deux manieres ont de grandes difficultés, & rien ne fait mieux l'éloge de la mechanique dont M. de Tschirnhaus doit s'être servi. Il a dit, mais peut-être n'a-t-il pas voulu reveler son secret, qu'il l'avoit taillé dans des Bassins, & que la masse de verre, dont il l'avoit tiré, pesoit 700 liv. ce qui seroit encore une merveille dans la Verrerie. Il en avoit fait un autre de 4 pieds de diametre, mais il fut endommagé par quelque accident.

Il presenta un Miroir de cette espèce à l'Empereur Leopold, qui pour reconnoistre son present, & encore plus son merite, lui voulut donner le titre & les prérogatives de libre Baron, mais il les refusa avec tout le respect qui doit accompagner un semblable refus, & des graces de l'Empereur il n'accepta que le portrait de S. M. I. avec une chaine d'or. Pour rendre ce trait moins fabuleux, il est bon d'y en joindre un pareil qui le soûtiendra. Il refusa de même les fonctions de Conseiller d'Etat, dont le Roi Auguste le vouloit honorer. On peut soupçonner que qui ne recherche pas les honneurs, veut

s'épargner ou beaucoup de peine, ou la honte de ne pas réüssir, mais à qui les renvoye quand ils viennent s'offrir d'eux-mêmes, la malignité la plus ingenieuse n'a rien à lui dire.

Il revint à Paris pour la quatriéme fois en 1701, & fut assés assidu à l'Academie. Il y annonça plusieurs methodes qu'il avoit trouvées pour la Geometrie la plus sublime, mais il n'en donna pas les démonstrations, & il se contenta d'exciter une certaine curiosité inquiete, & peut-être des doutes, honorables à ses découvertes, en cas qu'elles fussent bien sûres. Nous avons donné dans l'Hist de 1701 * une liste de ses Propositions. Il prétendoit pouvoir se passer de la methode des Infiniment petits, & donna à l'Academie sur les Rayons des Dévelopées un échantillon de celle qu'il mettoit en la place. Rien ne prouve mieux la grande utilité des Infiniment petits, que l'honneur qu'on se fait de n'en avoir pas besoin en certaines occasions. En général, M. de Tschirnaus vouloit rendre la Geometrie plus aisée, persuadé que les veritables methodes sont faciles, que les plus ingenieuses ne sont point les vrayes dés qu'elles sont trop composées, & que la nature doit fournir quelque chose de plus simple. Tout cela est vrai, reste à déterminer le degré de simplicité, on croit presentement y être parvenu.

* p. 89. & 90.

Pendant ce séjour de Paris, M. de Tschirnhaus fit part à M. Homberg d'un secret qu'il avoit trouvé aussi surprenant que celui de tailler ses grands Verres, c'est de faire de la Porcelaine toute pareille à celle de la Chine, & qui par consequent épargneroit beaucoup d'argent à l'Europe. On a cru jusqu'ici que la Porcelaine étoit un don particulier dont la nature avoit favorisé les Chinois, & que la terre dont elle est faite n'étoit qu'en leur Païs. Cela n'est point ainsi, c'est un mêlange de quelques terres qui se trouvent communément par-tout ailleurs, mais qu'il faut s'amuser de mettre ensemble. Un premier Inventeur trouve ordinairement un secret par hasard,

& ſans le chercher, mais un ſecond qui cherche ce que le premier a trouvé, ne le peut guere trouver que par raiſonnement. M. de Tſchirnhaus avoit donné à M. Homberg ſa Porcelaine en échange de quelques autres ſecrets de Chimie qu'il en avoit reçûs, & il lui fit promettre que de ſon vivant il n'en feroit nul uſage.

Quand il fut retourné chés lui, il ſe trouva perpetuellement environné de chagrins domeſtiques, & ſa vie ne fut plus qu'une ſuite de malheurs. Comme la ſanté de l'Ame tient à celle de l'Eſprit, ſur laquelle il avoit tant medité, & qu'il y a moins de maux pour qui ſait raiſonner, ou des maux moins douloureux, il ſoûtint les ſiens avec conſtance, & fit voir ce qu'on ne voit preſque jamais en cette matiere, l'uſage de ſa Theorie, & l'application de ſes préceptes. Son humeur ne fut pas alterée, ni ſes études ſeulement interrompuës. Il ſe ſoumettoit à une Providence, à laquelle il eſt inutile de réſiſter, & infiniment avantageux de ſe ſoûmettre. Enfin aprés avoir paſſé 5 ans à combattre & à vaincre le chagrin, il tomba malade, peut-être parce qu'on ne peut le vaincre ſi long-temps, ſans en être fort affoibli. Il ne craignoit point la Fiévre, la Phtiſie, l'Hydropiſie, la Goutte, parce qu'il ſe tenoit ſûr d'en avoir les remedes, mais il avoit beaucoup de peur de la Pierre, qu'il ne s'aſſuroit pas de pouvoir prévenir, ou guérir ſi aiſément. Il avoit pourtant trouvé une préparation de petit Lait qu'il croyoit tres-bonne, & qu'il a donné dans une Edition Allemande de ſon Livre. Mais elle n'empêcha pas qu'au mois de Sept. 1708. il ne fut attaqué de grandes douleurs de gravelle, ſuivies d'une ſuppreſſion d'urine. Les Medecins qui ne le trouvoient pas aſſés obéïſſant, parce qu'il s'étoit rendu Medecin lui-même, l'abandonnerent bien-tôt. Il ſe traita comme il l'entendit, il ne perdit jamais, ni ſa fermeté, ni ſa réſignation à la Providence, ni l'uſage de ſa raiſon, & enfin il mourut le 11 Oct. ſuivant. Ses dernieres paroles furent *Triomphe, Victoire.* Apparemment il ſe regardoit comme vainqueur des maux de la vie hu-

maine. Son corps fut porté avec pompe à une de ses Terres, & le Roi Auguste en voulut faire les frais.

Il avoit destiné cet hiver même où il alloit entrer, à faire de grandes augmentations à son Livre. Il avoit donné une partie considerable de son patrimoine à son plaisir, c'est-à-dire, aux Lettres. Il propose dans son Ouvrage le plan d'une Societé de gens de condition & amateurs des Sciences, qui fourniroient à des Savans plus appliqués tout ce qui leur seroit necessaire & pour leurs Sciences & pour eux, & l'on sent bien avec quel plaisir il auroit porté les charges de cette Communauté. Il les portoit déja sans l'avoir formée. Il cherchoit des gens qui eussent des talents, soit pour les Sciences utiles, soit pour les Arts, il les tiroit des tenebres où ils habitent ordinairement, & étoit en même temps leur Compagnon, leur Directeur, & leur Bienfaicteur. Il s'est assés souvent chargé du soin & de la dépense de faire imprimer des Livres d'autrui, dont il esperoit de l'utilité pour le Public, entre autres le Cours de Chimie de M. Lémery qu'il avoit fait traduire en Allemand, & cela, sans se faire rendre, ou sans se rendre à lui-même dans des Prefaces l'honneur qui lui étoit dû, & qu'un autre n'auroit pas negligé. Dans des occasions plus importantes, si cependant elles ne le sont pas toutes également pour la vanité, il n'étoit pas moins éloigné de l'ostentation. Il faisoit du bien à ses ennemis avec chaleur, & sans qu'ils le sussent, ce qu'à peine le Christianisme ose exiger. Il n'étoit point philosophe par des connoissances rares, & homme vulgaire par ses passions & par ses foiblesses, la vraye philosophie avoit penetré jusqu'à son cœur, & y avoit établi cette délicieuse tranquillité, qui est le plus grand, & le moins recherché de tous les biens.

Sa place d'Académicien Associé Etranger a été remplie par M. Sloane, Secretaire de la Societé Royale d'Angleterre.

ELOGE
DE M. POUPART.

FRANÇOIS POUPART nâquit au Mans en d'un bon Bourgeois, allié aux meilleures familles de la Ville, qui n'avoit aucun emploi, & étoit chargé de beaucoup d'Enfants. Il ne s'occupoit que de leur éducation, il en mit un dans la Marine, qui s'y avança par son merite, jusqu'à devenir Capitaine de Vaisseau.

M. Poupart fit ses études chés les Peres de l'Oratoire du Mans. La Philosophie scolastique ne fit que lui apprendre qu'on pouvoit philosopher, & lui en inspirer l'envie. Il tomba bien-tôt sur les Ouvrages de Descartes qui lui donnerent une grande idée de la nature, & une aussi grande passion de l'étudier. Il passa quelques années chés son Pere dans cette seule occupation, encore incertain du parti qu'il prendroit; enfin il se determina pour la Medecine. Mais comme les secours tant spirituels, pour ainsi dire, que temporels lui manquoient au Mans, il vint à Paris où il est plus facile d'en trouver de toute espece. Il se chargea de l'éducation d'un Enfant pour subsister, mais ayant bien-tôt éprouvé que les soins de cet emploi lui enlevoient tout son temps, il y renonça, & aima mieux étudier que subsister, c'est à dire que pour être entierement à lui & à ses Livres, il se reduisit à un genre de vie fort incommode, & fort étroit. Nous ne rougissons point d'avoüer hautement la mauvaise fortune d'un de nos Confreres, ni de montrer au public le sac & le bâton d'un Diogene, quoique nous soyons dans un siécle où les Diogenes sont moins considerés que jamais, & où certainement ils ne recevroient pas de visites des Rois dans leur tonneau.

Il s'appliqua avec ardeur à la Phisique, & sur-tout à

l'Hiſtoire naturelle, qui aprés tout eſt peut-être la ſeule Phiſique à nôtre portée. Un goût particulier le portoit à étudier les Inſectes, eſpeces d'Animaux, ſi different de tous les autres, & ſi differents entr'eux, qu'ils font comprendre en général la diverſité infinie des Modeles ſur leſquels la Nature peut avoir fait des Animaux pour une infinité d'autres habitations. Il avoit & la patience ſouvent tres penible de les obſerver pendant tout le temps neceſſaire, & l'art de découvrir leur vie cachée, & l'adreſſe de faire, quand il étoit poſſible, la délicate anatomie de ces petits Corps. Il portoit ſes découvertes aux Conferences de feu M. l'Abbé Bourdelot, dont il étoit un des bons Acteurs, ou les faiſoit imprimer dans le Journal des Savans, témoin ſa Diſſertation ſur la Sangſuë, qui fut ſort approuvée des Phiſiciens, & leur fit connoiſtre à eux-mêmes un Animal, que tout le monde croyoit connoiſtre.

Pour ſe perfectionner dans l'Anatomie, il voulut exercer la Chirurgie dans l'Hôtel Dieu, & ſe preſenta à ceux dont il faloit qu'il ſubît l'examen. Ils l'interrogerent ſur des choſes difficiles, & par les réponſes qu'il leur fit ils le trouverent déja fort habile dans l'art de la Chirurgie, & le reçûrent avec éloge. Mais il les étonna beaucoup, quand il leur avoüa qu'il ne ſavoit ſeulement pas ſaigner & qu'il n'avoit ſur la Chirurgie qu'une ſimple ſpeculation. Ils ne ſe repentirent pas de l'avoir reçû, ils le jugerent bien propre à apprendre promptement & parfaitement cette pratique, qu'ils ne s'étoient pas apperçûs qui lui manquât, & ils l'inſtruiſirent avec l'affection que les Maîtres ont pour d'excellens Diſciples. Il paſſa trois ans dans ces fonctions, aprés quoi il ne s'attacha plus qu'à la Medecine, & comme il ne cherchoit pas à en borner l'étenduë, il embraſſa tout ce qui y avoit rapport, la Botanique, la Chimie. Il ſe fit recevoir Docteur en Medecine dans l'Univerſité de Rheims.

Son envie de ſavoir n'étoit pas renfermée dans les limites de cette profeſſion, quoique ſi vaſtes. Il ne ſeroit

pas extraordinaire que la Philosophie de Descartes l'eût engagé à prendre quelque teinture assés raisonnable de Geometrie, mais peut-être aura-t-on de la peine à croire qu'il étudiât jusqu'à l'Architecture. M. de la Hire qui la professe avoit remarqué qu'il étoit assidu à ses leçons, & ne le connoissant point d'ailleurs, il avoit crû que c'étoit un homme qui songeoit à avoir quelque fonction dans les Bâtimens, il n'avoit pas même jugé sur les apparences exterieures que ces fonctions ausquelles il pouvoit aspirer fussent fort relevées, mais il fut extrêmement surpris, lorsqu'au renouvellement de l'Academie en 1699, tous les Academiciens qui n'avoient point d'Eleves en ayant nommé, il le vit paroistre aux Assemblées en qualité d'Eleve de M. Mery, & d'Anatomiste.

La Compagnie étant alors remplie d'un tres-grand nombre d'Academiciens nouveaux, qui n'avoient pas des ouvrages prêts à produire dans les Assemblées, ou ne s'en tenoient pas assés sûrs pour les exposer dans un lieu assés redoutable, M. Poupart fut le premier d'eux tous qui se trouva en état de parler, & qui en eut la noble assurance. Il lût un Memoire sur les Insectes Hermaphrodites *, qui fut d'un heureux augure pour la capacité de ceux d'entre les nouveaux venus, que la plûpart des Academiciens ne connoissoient pas encore beaucoup.

* V. les M. de 1669. p. 145.

On a vû depuis dans les Volumes que l'Academie a donnés pour chaque année son Histoire du *Formica-leo* *, celle du *Formica-pulex* * ses observations sur les Moules *, & quantité d'autres observations moins importantes, ou peut-être seulement plus courtes, repanduës dans nos Histoires.

* V. les M. de 1704. p. 235.
* V. les M. de 1705. p. 124.
* V. les M. de 1706. p. 51.

Il tomba malade au mois d'Octobre dernier & mourut en peu de jours. On le croit Auteur d'un Livre intitulé *La Chirurgie complette*, qui n'est qu'une compilation commode de plusieurs autres Traités. Si cela est, on doit pardonner ce Livre au besoin qu'il avoit de le

faire, & lui savoir gré en même temps de ne s'être pas fait honneur d'une compilation. Il a résisté à un grand nombre d'exemples, qui l'y pouvoient inviter.

Sa place d'Eleve de M. Méry a été remplie par M. Engueard, Docteur en Medecine de la Faculté de Paris.



MEMOIRES



MEMOIRES DE MATHEMATIQUE ET DE PHYSIQUE.

TIREZ DES REGISTRES de l'Academie Royale des Sciences.

De l'Année M. DCCIX.

OBSERVATIONS

De la quantité de pluïe qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année derniere 1708, avec les changemens qui sont arrivés au Thermometre & au Barometre par rapport à la chaleur & aux saisons.

PAR M. DE LA HIRE.



S'IL n'y avoit que la simple curiosité de sçavoir la quantité d'eau de pluïe qui tombe chaque année sur la terre en ce païs-cy, il me semble qu'il seroit inutile que je continuasse à donner ce Memoire au commencement de chaque année, comme j'ai fait depuis long-tems, puisque l'experience nous a fait 1709 9 Janvier.

connoître qu'il n'y a que peu de difference d'une année à l'autre. Mais plusieurs particuliers ayant été excités par les Memoires que j'ai publiés, de faire de semblables observations en des lieux fort éloignés de ceux-cy, & situés differemment par rapport à la proximité de la mer ou dans des montagnes ; j'ai crû qu'ils seroient bien aises de trouver dans nos Memoires, de quoi comparer leurs observations avec les nôtres.

La Machine dont je me sers pour la mesure de la pluïe, & la maniere de s'en servir, est toûjours la même, & comme je l'ai décrite autrefois dans les premiers Memoires.

Voici les observations de la quantité de pluïe en hauteur qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année derniere 1708.

En Janvier.	$28^{l}\frac{1}{8}$.	May.	$30^{l}\frac{2}{8}$.	Septembre.	12^{l}.
Fevrier.	15.	Juin	$23\frac{1}{8}$.	Octobre.	15.
Mars.	$15\frac{7}{8}$.	Juillet.	32.	Novembre.	$6\frac{4}{8}$.
Avril.	$17\frac{2}{8}$.	Aoust.	$15\frac{1}{8}$.	Decembre.	$9\frac{2}{8}$.

Somme 219 lignes$\frac{1}{2}$ ou 18 pouces$\frac{1}{4}$.

Cette quantité d'eau n'est pas beaucoup éloignée des 19 pouces à quoi nous avons fixé les années moïennes, & comme M. Mariotte l'avoit déterminé autrefois par de semblables observations qu'il avoit fait faire à Dijon par un de ses amis.

La plus grande quantité d'eau qui soit tombée en un même jour, n'a été que de 10 lignes environ le 24 May & le 20 Octobre, & avec un vent presque Nord, ce qui est à remarquer ; car ce vent ne nous apporte pas ordinairement les plus grandes pluïes.

Le vent dominant de toute cette année a été le Sud, & il s'est tourné rarement vers le Nord, & souvent à l'Est & à l'Oüest. Il a fait de gros broüillards tant au commenmencement qu'à la fin de cette année.

Il est tombé 3 pouces de nege le 14 Fevrier, & environ autant le 14 Novembre, & un peu le 5 Decembre.

Pendant toute l'année il a fait plusieurs orages, mais assez foibles.

Mon Thermometre qui est à 48 parties de sa division dans l'état moïen de l'air, & au fond des Carrieres de l'Observatoire où il demeure toûjours au même état, & lequel est exposé dans un lieu ouvert, mais à l'abri du vent & du Soleil, a été au plus bas au commencement de l'année le 13 Fevrier à 27 parties $\frac{1}{2}$, & il commence seulement à geler dans la campagne quand il est à 32 parties, ce qui marque qu'il n'a pas fait grand froid dans ce tems-là; car avant ce jour-là & ensuite il étoit toûjours vers les 35 à 40 parties. A la fin de l'année dés le 29 Octobre il a gelé, le Thermometre étant à 29 parties, mais sans continuer, & tout le mois de Novembre a été assés doux par rapport à la saison. Le Thermometre est aussi descendu à 25 parties le 12 Decembre, & c'est le jour de la plus forte gelée de cette année, laquelle n'a pas été fort considerable, puisque ce Thermometre descend quelquefois jusqu'à 13 parties.

Les plus grandes chaleurs de cette année ont été le 15 & 16 Aoust comme à l'ordinaire, l'esprit de vin du Thermometre s'étant élevé dans son tuyau à 66 parties $\frac{1}{2}$ vers le lever du Soleil, qui est le tems où je fais toutes mes observations, & qui est le plus froid de la journée; & vers les 3 heures aprés midy, qui est le tems le plus chaud du jour, l'esprit de vin du Thermometre étoit élevé ces mêmes jours à 76 parties. Ainsi la chaleur & le froid de cette année ont été à peu prés au même degré par rapport à l'état moïen.

Pour mon Barometre qui est placé à la hauteur de la grande Salle de l'Observatoire, & à 20 toises environ audessus de la riviere, il a été au plus bas à 26 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$ le 10 Janvier, & avec un vent Sud-Est mediocre comme les jours précédens & suivans, & il a été au plus haut le 17 Novembre à 28 pouces 1 ligne & $\frac{5}{6}$ avec un vent Nord Nord-Est foible, & les jours aux environs vers le Sud. Ensorte que la difference du plus bas au plus haut

a été de 1 pouce 4 lignes½ à trés-peu prés. J'ai encore un autre Barometre dans lequel le mercure se soûtient à 3 lignes plus haut que dans celui qui me sert pour marquer tous les jours mes observations ordinaires, quoique ces deux Barometres fassent de la lumiere dans le vuide en agitant le mercure, ce qui est une marque qu'il n'y a point d'air ou trés-peu à ce qu'on croit ordinairement. Ainsi cette difference de hauteur ne pourroit venir que de la differente pesanteur des mercures.

J'ai observé la declinaison de l'aiguille aimantée le 27 Decembre de cette année, & je l'ai trouvée de 10 degrés 15 minutes à l'Oüest: Cette aiguille a 8 pouces de longueur, & c'est celle dont je me sers toûjours, en appliquant le côté de sa boëte contre le même endroit d'un gros pilier de pierre, qui est bien dressé & placé exactement dans le meridien au bout de la terrace basse de l'Observatoire vers le midy.



OBSERVATIONS

De la quantité d'eau de pluïe & des vents, par M. le Comte du Pontbriand dans son Château à deux lieuës à l'Oüest de S. Malo; communiquées à l'Academie par M. du Torar de l'Academie, & comparées avec celles que nous avons faites à Paris à l'Observatoire Royal pendant les années 1707 & 1708.

PAR M. DE LA HIRE.

QUANTITE' D'EAU DE PLUIE.

	En 1707. Au Pontbriand.	En 1707. A Paris.	En 1708. Au Pontbriand.	En 1708. A Paris	
JAnvier.	$9^{l}\frac{1}{2}$.	5^{l}.	35^{l}.	28.	
Fevrier.	$20\frac{1}{2}$.	10.	$18\frac{1}{2}$.	15.	1709. 9. Fevrier.
Mars.	22.	11.	$22\frac{1}{2}$.	16.	
Avril.	$7\frac{1}{2}$.	4.	$36\frac{1}{2}$.	$17\frac{1}{4}$.	
May.	$6\frac{1}{2}$.	$11\frac{1}{2}$.	$26\frac{1}{2}$.	$30\frac{1}{4}$.	
Juin.	$31\frac{3}{4}$.	17.	24.	$23\frac{1}{8}$.	
Juillet.	40.	38.	10.	32.	
Aoust.	38.	$34\frac{3}{4}$.	$6\frac{1}{2}$.	15.	
Septembre.	$20\frac{1}{2}$.	$9\frac{1}{4}$.	$43\frac{1}{2}$.	12.	
Octobre.	32.	41.	$35\frac{1}{2}$.	15.	
Novembre.	$10\frac{1}{2}$.	6.	11.	$6\frac{1}{2}$.	
Decembre.	$57\frac{1}{2}$.	$27\frac{3}{4}$.	$24\frac{1}{2}$.	$9\frac{1}{4}$.	

Somme au Pontbriand, $24^{po}\ 10^{l}\frac{1}{4}$. Somme au Pontbriand, $24^{po}\ 6^{l}$.

Somme à Paris, $17^{po}\ 11^{l}\frac{1}{2}$. Somme à Paris, $18^{po}\frac{1}{4}$.

Quelques observations semblables que M. le Comte du Pontbriand nous avoit déja communiquées, nous avoient fait connoître qu'il pleuvoit un peu plus vers

S. Malo qu'à Paris, ce qui nous eſt confirmé par les deux années que nous venons de comparer.

Sur les vents pendant l'année 1707.

En Janvier les vents ont été preſque toûjours plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand d'un quart du compas.

En Fevrier à peu prés de même.

En Mars tout au contraire des mois précédens.

En Avril comme en Janvier à peu prés.

En May les vents ont été differens en ces deux lieux.

En Juin aſſés ſemblables, mais quelquefois plus au Sud à Paris qu'au Pontbriant d'un quart du compas.

En Juillet vent de même à peu prés, avec de trés-grandes chaleurs le 21 à Paris comme au Pontbriand, le vent étant Sud-Eſt, Sud & Sud-Oüeſt.

En Aouſt aſſés ſouvent plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand.

En Septembre les vents un peu differens en ces deux lieux.

En Octobre quelquefois de même, & quelquefois opposés.

En Novembre ſouvent de même, mais à Paris quelquefois plus au Sud qu'au Pontbriand.

En Decembre ſouvent le même, quelquefois opposés, mais ſouvent à Paris plus au Sud qu'au Pontbriand.

Au Pontbriand la plus grande pluïe d'un même jour a été de 10^l le 3 Juillet avec vent Nord-Eſt : ce jour-là le vent étoit à Paris Sud-Oüeſt avec tonnerre, mais ſans pluïe. Dans tout le reſte de l'année les plus grandes pluïes d'un même jour n'ont monté qu'à 6^l au Pontbriand. Mais à Paris la pluïe a été de 16^l le 15 Juillet avec un vent fort vers le Sud : mais au Pontbriand il n'en eſt tombé que $5^l \frac{1}{2}$ avec le même vent ce jour-là. A Paris la plus grande pluïe a été de $21^l \frac{1}{2}$ le 12 Aouſt avec un vent foible vers l'Oüeſt, & au Pontbriand 5^l avec un vent Nord. En Octobre à Paris le 4 & 5 enſemble ont donné

24^{l} avec un vent vers l'Oüeſt, & au Pontbriand $6^{l}\frac{1}{2}$ avec un vent Nord-Oüeſt.

Sur les Vents en 1708.

En Janvier le vent plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand, & quelquefois de même.

En Fevrier ſouvent le même.

En Mars preſque toûjours le même.

En Avril le même, mais dans certains jours un peu differens.

En May au Pontbriand la nuit du 6 au 7 forte gelée qui brûla tous les arbres, mais à Paris aſſez beau tems: les vents differens.

En Juin les vents differens, & à Paris plus au Sud ordinairement.

En Juillet trés-peu d'obſervations au Pontbriand, ce qui ne donne rien à connoître pour la difference.

En Aouſt plus au Sud à Paris qu'au Pontbriand.

En Septembre comme en Aouſt.

En Octobre vents differens en ces deux lieux.

En Novembre un peu differens.

En Decembre de même.

On ne peut pas faire une comparaiſon bien juſte de tous ces vents, car M. de Pontbriand ne marque le rumb que les jours qu'il a plû.

Au Pontbriand la plus grande pluïe d'un même jour n'a été que de 9^{l}, le 20 & le 27 Octobre, le vent étant Sud-Eſt & Sud-Oüeſt; & de 8^{l} le 22 Avril avec un vent Sud-Eſt. Le 20 Octobre à Paris il a plu 10^{l} avec un vent fort de Nord. Pour le 27 à Paris, point de pluïe, vent de Nord. Le 22 Avril à Paris, point de pluïe, broüillard.

A Paris la plus grande pluïe d'un même jour a été de $11^{l}\frac{1}{2}$ le 24 May avec un vent Nord Nord-Oüeſt, & à Pontbriand $4^{l}\frac{1}{2}$ avec un vent Nord-Oüeſt. à Paris 9^{l} le 2 Juillet, vent Sud-Oüeſt; à Pontbriand point de pluïe. à Paris encore 10^{l} le 20 Octobre, comme on a marqué cy-deſſus.

OBSERVATIONS

De l'Eau qui est tombée à Lyon pendant l'année derniere 1708.

PAR M. DE LA HIRE.

1709. 13. Avril. LE Pere Fulchiron a observé exactement la quantité d'eau de pluïe & de neige fonduë, qui est tombée à Lyon à l'endroit de l'Observatoire des RR. PP. Jesuites, & de la même maniere que je l'observe ici, dont voici le résultat de chaque mois qu'il m'a communiqué.

En Janvier	2^{po}.	0^{l}	Juillet	1^{po}	$6^{l}\frac{3}{4}$.
Fevrier	3	$7\frac{1}{8}$.	Aoust	3	6
Mars	2	$3\frac{1}{6}$.	Septembre	7	$7\frac{1}{4}$.
Avril	3	$9\frac{1}{2}$.	Octobre	1	11
May	2	$2\frac{1}{8}$.	Novembre	0	10
Juin	4	$10\frac{3}{4}$.	Decembre	2	$1\frac{3}{4}$.

Somme de toute l'année 36^{pouces}, 9^{lignes}.

On voit par-là que la quantité d'eau de pluïe a été à Lyon du double de celle qu'elle a été à Paris ; & il n'y a pas apparence, que cela vienne des deux grandes rivieres qui y passent, lesquelles ne pourroient tout au plus qu'y former beaucoup de broüillards ; mais plûtôt des grandes montagnes qui n'en sont que peu éloignées, où il tombe toûjours beaucoup plus d'eau & de neige que dans les plaines.



SUR

SUR UN FOETUS HUMAIN MONSTRUEUX.

PAR M. LITTRE.

Monsieur Amand, habile Accoucheur, m'a donné un Fœtus mâle, bien nourri, de moïenne taille & à terme, qu'il avoit tiré mort du ventre de la mere. Ce fœtus y avoit péri par le détachement du placenta, arrivé au commencement du travail de l'accouchement, l'orifice interne de la matrice n'étant pas encore suffisamment dilaté. J'ai examiné son corps avec beaucoup de soin. Voici les observations que j'y ai faites. 1709. 12 Janvier.

Premiere Observation. Ce fœtus, quoique de moïenne taille, avoit le placenta d'une grandeur extraordinaire.

Seconde Observation. Une partie du placenta du côté du chorion étoit déchiré, & on y voïoit plusieurs de ses gros vaisseaux à nud & comme s'ils étoient dissequés.

Troisiéme Observation. Les membranes de l'arrier-faix, qui sont naturellement separées & détachées du fœtus, tenoient à celui-ci; car depuis le cartilage xiphoïde jusqu'aux os pubis, de la largeur de 2 pouces, elles étoient étroitement unies à la surface exterieure du peritoine, qui en cet endroit étoit entierement dénué des muscles, de la graisse & de la peau qui le recouvrent dans l'état naturel. Les inégalités, qu'il y a d'ordinaire à la surface exterieure du peritoine, avoient apparemment donné lieu à cette union.

Quatriéme Observation. Le cordon umbilical étoit de 2 tiers plus court que de coûtume, & il n'avoit qu'une artere de deux qu'on y remarque ordinairement. Cet artere partoit de l'iliaque droite, & sortoit du ventre par la partie moïenne de la region hypogastrique, au lieu de sor-

tir par la partie moïenne de la region umbilicale. Etant ſortie du ventre, elle ne ſe joignoit à la veine umbilicale, qu'aprés avoir fait 2 pouces de chemin; enſuite elle formoit avec cette veine le cordon umbilical, aprés quoi elle ſe terminoit à l'ordinaire dans le placenta par un nombre infini de rameaux & de capillaires.

La veine umbilicale étant parvenuë du placenta juſqu'au bout du cordon qui eſt du côté du ventre, abandonnoit l'artere du même nom, ſe portoit à la partie ſuperieure de l'aine gauche, & là elle entroit dans le ventre; puis elle montoit le long du côté gauche de cette cavité, couchée ſur le muſcle pſoas; enſuite elle traverſoit le diaphragme à côté du corps de la derniere vertebre du dos; & aprés avoir parcouru les parties inferieures & moïennes de la poitrine en y formant pluſieurs ovales, ſe terminoit enfin au milieu du tronc ſuperieur de la veine cave. Dans cette route la veine umbilicale recevoit les 2 iliaques, les lombaires, les 2 émulgentes, la veine de la glande renale gauche, & la diaphragmatique du même côté.

On peut faire quatre Réflexions ſur cette derniere Obſervation.

Premiere Réflexion. Que le cordon umbilical n'ayant pas ſa longueur ordinaire, ce défaut peut avoir donné occaſion à trois choſes. 1°. Au déchirement du placenta. 2°. A ſon détachement de la matrice. 3°. A la mort du fœtus. Car ce fœtus n'a pû s'étendre, s'allonger & faire de grands efforts dans la matrice pour concourir avec la mere à ſa ſortie, ſans fortement tirer & ébranler le placenta, & ſans le détacher enfin de la matrice.

Or le placenta n'a pû être détaché, le fœtus reſtant dans la matrice, & les membranes de l'arriere-faix ſubſiſtant encore en leur entier, qu'une mort prompte ne s'en ſoit enſuivie, puiſqu'un fœtus ne ſçauroit vivre dans la matrice ſans y recevoir continuellement de l'air de ſa mere. Or celui-ci, aprés le détachement du placenta, n'en pouvoit plus recevoir de la ſienne.

On demandera peut-être pourquoi le peu de longueur du cordon n'a pas causé le détachement du placenta avant le tems du travail pour l'accouchement.

Je réponds, 1°. Que les mouvemens, que le fœtus fait dans la matrice pendant le travail, sont beaucoup plus forts & plus fréquens, que ceux qu'il fait avant le travail.

2°. Que la matrice, le diaphragme & les muscles du ventre sont presque dans l'inaction à l'égard du fœtus avant le travail, & que toutes ces parties sont dans de violentes contractions durant le travail.

3°. Que le placenta de ce fœtus, étant d'une grandeur extraordinaire, comme je l'ai remarqué, son adherence à la matrice en étoit d'autant plus forte, & par consequent capable de résister nonobstant le défaut de longueur du cordon, aux mouvemens qui ont précedé le travail, mais non pas à ceux qu'il a faits pendant le travail.

Seconde Réflexion sur la troisiéme Observation. La veine umbilicale du même fœtus faisoit à l'égard des veines, qu'elle recevoit dans le ventre, la fonction du tronc inferieur de la veine cave, dans lequel elles aboutissent pour l'ordinaire.

Troisiéme Réflexion. Il paroît par la même Observation, qu'il n'est pas necessaire, que la veine umbilicale se termine dans la veine porte, & que son sang soit distribué dans le foye, avant que d'arriver au cœur; puisque dans ce fœtus, qui étoit bien nourri & à terme, & qui n'est mort dans le ventre de sa mere que par accident, la veine umbilicale aboutissoit au tronc superieur de la veine cave, & que par consequent son sang étoit porté au cœur, sans avoir passé par le foye.

Quatriéme & derniere Observation. Si ce fœtus avoit vêcu, il auroit dû avoir deux nombrils; parce que les vaisseaux, qui composoient le cordon umbelical, en se joignant ensemble, étoient separées & fort éloignées l'un de l'autre, l'artere sortant du ventre par le milieu de la re-

gion umbilicale, & la veine y entrant par la partie ſuperieure de l'aine gauche.

Cinquiéme Obſervation. L'inteſtin ileon, qui eſt le dernier des grêles, aboutiſſoit dans une poche charnuë, qui étoit de la grandeur & de la figure d'un petit œuf de poule. De l'extremité inferieure de cette poche, il partoit un tuyau de 3 lignes de longueur & de 2 de groſſeur, qui ſe terminoit par un trou rond, d'une ligne & demie de diametre, à la ſurface exterieure du ventre, un peu au-deſſus de l'endroit où devoit être la ſymphiſe des os pubis, & ce trou faiſoit la fonction d'anus, quoiqu'il fût placé à la partie anterieure du ventre.

Il ſuit de cette Obſervation, 1°. Qu'il n'y avoit dans ce fœtus rien qui tînt de la forme du cœcum, du colon, ni du rectum. 2°. Que ce fœtus auroit été difficilement à la ſelle, quelques molles qu'euſſent été les matieres fecales, à cauſe de la petiteſſe du conduit par où elles auroient dû paſſer pour ſortir du corps: car j'eus beaucoup de peine à y faire paſſer le méconium, qui étoit contenu dans l'ileon & dans la poche. Je n'en ſerois jamais même venu à bout, ſi je n'avois eu la précaution de le bien détremper avec de l'eau & d'en faire un corps liquide.

Sixiéme Obſervation. Les 2 reins étoient parfaitement ronds, & tout compoſés de grains comme une meure. Le rein gauche avoit 15 lignes de diametre, & chacun de ſes grains prés d'une ligne & demie. Le droit en avoit 9, & ſes grains environ une.

Septiéme Obſervation. La groſſeur des ureteres excedoit de beaucoup la naturelle. Ces conduits alloient en ſerpentant d'un bout à l'autre, & avoient chacun une eſpece de meſentere qui les contenoient dans cette diſpoſition.

L'uretere gauche étoit d'un tiers plus gros que le droit, & il ſe terminoit à la partie moïenne droite d'une veſſie de 7 lignes de longueur & de 4 de largeur, ſituée dans le baſſin de l'hypogaſtre du côté gauche.

Le cou de cette vessie étoit fort court, étroit, & s'ouvroit de niveau à la superficie exterieure du ventre, 3 lignes au-dessus de l'endroit où devoit être l'os pubis du même côté, par un trou rond, d'une ligne & demie de diametre, & qui faisoit la fonction de celui de l'uretere. Enfin ce cou me parut avoir un sphincter, parce que poussant de l'eau dans la cavité de cette vessie, elle n'en sortoit que lorsque je la poussois avec un peu de force.

L'uretere droit aboutissoit à la surface exterieure du ventre, 4 lignes au-dessus de l'endroit où devoit être l'os pubis du même côté, par un trou qui étoit de figure ovale, d'environ une ligne & demie de longueur, & d'une demie ligne de largeur.

J'ai poussé fort doucement de l'eau dans la cavité de cet uretere, elle en est sortie à mesure par ce trou; d'où j'infere que l'extremité inferieure de ce conduit n'avoit point de sphincter, & que l'urine filtrée par le rein droit du fœtus, se seroit continuellement écoulée par cette voye. Consequence qui me paroît d'autant plus vrai-semblable, que j'ai vû 2 Enfans vivans, dont les ureteres se terminoient de même à la surface exterieure du ventre, un peu au-dessus des os pubis, par l'embouchure desquels l'urine sortoit sans cesse goute à goute.

Huitiéme Observation. Les testicules étoient enfermés dans le ventre, l'un dans l'ile droite, & l'autre dans la gauche. Le vaisseau éjaculation du testicule droit se terminoit dans la cavité de l'uretere du même côté, à 3 lignes de son embouchure. L'éjaculatoire du testicule gauche aboutissoit dans la cavité de la petite vessie.

Il paroît par cette Observation, que ce fœtus n'auroit été nullement propre à la génération parce que la semence n'auroit pû être lancée dans le champ de la génération, la vessie & l'uretere droit, où se terminoient les vaisseaux éjaculatoires, n'étant pas continus à la verge, par laquelle seule se fait l'éjaculation. D'ailleurs la sémence se seroit trouvée confonduë avec l'urine, ce qui sans doute auroit fort alterée ses qualités.

Neuviéme Observation. Ce fœtus n'avoit ni postates ni vesicules seminaires. Il avoit une verge, mais point de scroton. La verge étoit longue de 9. lignes, & grosse de 4; sa figure & sa situation étoient naturelles : elle étoit dure, droite & telle qu'elle est dans le tems de l'érection, & composée du gland, de 2 corps caverneux & de l'uretere.

Le gland n'avoit ni prépuce ni trou. Il étoit solide de même que le reste de la verge.

Dixiéme Observation. Le foye étoit rond & oblong, gros, uni & continu en toutes ses parties, n'ayant ni scissure ni lobes. Cependant aprés avoir détaché & levé sa membrane, je trouvai au-dessous la vesicule du fiel & la glande renale droite, qui étoient contenuës dans des enfoncemens creusés dans ce viscere, de sorte qu'elles paroissoient ne former avec lui qu'un même corps.

Des 3 ligamens qui maintiennent le foye en sa situation naturelle, il lui en manquoit deux; sçavoir, celui qui l'attache au cartilage xiphoïde, & celui qui l'attache au nombril. Ce dernier ligament fait encore la fonction d'une veine qu'on appelle umbilicale, & qui dans ce fœtus ne se terminoit point au foye. Aussi faute de ces deux ligamens, ce viscere étoit si peu stable dans son assiette, qu'il suivoit tous les differens mouvemens du corps.

Onziéme Observation. Le diamettre de la veine cave inferieure étoit beaucoup plus petit que d'ordinaire, parceque cette veine n'étoit composée que des rameaux, qui reportent le sang de la glande renale droite, de la vesicule du fiel, du foye & de la partie droite du diaphragme; que le sang qui revenoit des extrémités inferieures & de plusieurs parties du ventre, étoit repris par la veine umbilicale, & versé dans le tronc superieur de la même veine cave. Du reste ce tronc inferieur n'avoit rien de particulier; car il traversoit le diaphragme par l'endroit ordinaire, & se terminoit dans l'oreille du cœur.

Douziéme Observation. Les 4 dernieres fausses côtes gauches étoient déprimées & enfoncées dans la cavité

dela poitrine du même côté ; & diminuant cettécavité par leur dépression & leur enfoncement, elles repoussoient dans la cavité droite la partie inferieure du cœur ; de sorte que sa situation, d'oblique qu'elle est naturellement, étoit devenuë verticale.

Treiziéme Observation. Le tronc superieur de la veine cave étoit environ la moitié plus gros que de coûtume, parcequ'outre le sang qu'il a accoûtumé de recevoir, il recevoit encore par la veine umbilicale, le sang des extremités inferieures, & celui de plusieurs parties du ventre.

Quatorziéme Observation. L'os sacron, le coccyx & les os innonimés contre l'ordinaire, étoient caves en dehors & convexes en dedans. La partie posterieure de l'os sacron étoit ouverte d'un bout à l'autre par son milieu de la largeur de 4 lignes. Les 2 os pubis, au lieu d'être joints ensemble, étoient separés l'un de l'autre par un intervalle de 2 pouces & demi. Enfin les cuisses par leur partie superieure principalement, étoient tournées en dehors, & fort écartées l'une de l'autre ; cependant le femur de chaque cuisse avoit sa figure naturelle. Ainsi le grand écartement des cuisses étoit causé par celui des os pubis, & peut-être ce même écartement des os pubis étoit-il aussi la cause des mauvaises conformations que j'ai remarquées dans la partie inferieure du ventre de ce fœtus.

Quinziéme & derniere Observation. Il y avoit sur la partie posterieure de l'os sacron, un sac membraneux, de la grosseur & de la figure d'un œuf de pigeon, attaché & intimement uni par un pedicule creux de 5 lignes de longueur & d'une demie ligne de largeur, au second nerf sacré du côté gauche. Ce sac étoit plein d'une liqueur fort claire, beaucoup plus legere que de l'eau commune, & d'une saveur un peu âcre.

Cette Observation semble favoriser l'opinion de ceux qui admettent un suc nerveux dans les nerfs, parceque la cavité du sac & celle du pedicule étant communes,

& celui-ci étant continu & intimement uni à un gros nerf de l'os ſacré, ils pouvoient l'un & l'autre en avoir reçû la liqueur, que j'ai trouvée dans leur cavité. Cela paroît d'autant plus vraiſemblable, que les partiſans du ſuc nerveux lui donnent à peu prés les mêmes qualités, que j'ai remarquées dans cette liqueur.

REMARQUES SUR UN FOETUS MONSTRUEUX.

PAR M. MERY.

1709. 6. Février.

J'Ay reçû depuis peu de M. Bertholomée Seyfar, Medecin Danois, le deſſein d'un Fœtus à terme, avec la deſcription de ſes parties principales, qu'il a envoyé à l'Academie Royale des Sciences de la part de Sa Majeſté Danoiſe. Tout le corps de ce fœtus, à l'exception de la tête, n'avoit rien d'extraordinaire. Sa tête même, quoiqu'informe, paroiſſoit plutôt monſtrueuſe par le défaut des parties qui lui manquoient, & par la ſituation bizarre de celles qu'on y remarquoit, que par aucun raport qu'elle eût avec celle de quelque animal. Voici l'extrait des particularités les plus remarquables que cet habile Anatomiſte a obſervées dans ce fœtus.

1°. Sa tête étoit plus petite qu'à l'ordinaire, & ſa face preſque toute recouverte de poils. Au milieu du front elle avoit une petite protuberance charnuë longue d'environ un pouce, & groſſe à peu prés comme une plume de Cigne, dont le centre étoit creux, ſa cavité n'avoit qu'environ demi pouce de profondeur, & pouvoit à peine admettre une ſoïe de porc. En la comprimant, on en fit ſortir quelques goutes de liqueur; ce qui donne lieu de croire quelle pouvoit avoir quelques petites glandes qui

qui se dégorgeoient dans sa cavité. Cette protubérance étoit retroussée en haut, au lieu de prendre en embas.

2°. Directement au-dessous de cette masse charnuë étoit placé un œil de figure triangulaire, revêtu de ses paupieres, garnies de leurs cils; mais les sourcils manquoient à la superieure. Ce fœtus n'avoit que ce seul œil, dont on distinguoit parfaitement bien la conjonctive, la cornée transparente & la prunelle. Par la dissection que l'on en fit, on remarqua qu'il avoit tous ses muscles; cependant quoique sa conformation ait paru parfaite, il est à croire neanmoins que cet Enfant n'auroit jamais pû voir, supposé qu'il eût vêcu, parce que son œil n'avoit point de nerf optique, ainsi il ne devoit point s'y trouver de retine; mais c'est ce qu'on n'a point recherché; car dans la prescription qu'on nous a envoyée on n'y fait aucune mention ni de ses membranes interieures, ni de ses humeurs.

3°. Ce fœtus n'avoit ni bouche, ni nez; delà vient, dit-on, qu'il ne pouvoit pas respirer, ce qui lui a causé la mort peu de temps aprés être sorti du sein de sa mere. Cette consequence me paroîtroit incertaine, parce qu'on a remarqué deux trous au-dessous des oreilles, penetrans à ce qu'on prétend, jusqu'a l'œsophage & à la trachée artere, par lesquels on a introduit de l'air avec un chalumeau; mais parce que le poûmon qu'on a plongé dans l'eau est tombé au fond, & qu'il auroit dû nager sur sa surface, si l'air soufflé aprés la mort avoit pû entrer par l'un ou l'autre de ces deux trous dans la trachée artere, il y a bien de l'apparence, les vesicules du poûmon ne s'étant point gonflées, que ces deux trous penetroient dans l'œsophage, ainsi il ne pouvoit pas respirer. Mais ces deux trous répondans dans l'œsophage; on ne peut pas dire absolument que cet Enfant n'a pû, n'ayant point de bouche, recevoir d'aliment par l'œsophage; car supposé qu'il fût vrai que le fœtus renfermé dans la matrice prît quelque nourriture par la bouche, ces deux trous pouvoient en faire l'office, puisqu'ils communiquoient dans l'œso-

phage. Cependant avec cet avantage ce fœtus n'auroit pas pû goûter, quand bien même il auroit eu une langue, dont on ne parle point dans la description, parce que les alimens auroient passé, sans toucher la langue, de l'œsophage dans l'estomach.

4°. Les oreilles occupoient la place du menton, mais comme elles n'avoient point de conduit exterieur, elles n'auroient de rien servi; d'ailleurs les nerfs auditifs ne penetrant point l'apophise pierrrese, où se trouve le labirinthe, qui fait la partie principale de l'organe de l'oüie, ç'auroit encore été une autre cause de surdité, quand même cette partie de l'oreille interne eût eu une structure parfaite; c'est ce qu'on n'a point aussi examiné.

5°. Comme j'ai déja dit que ce fœtus n'avoit point de nez, je ne dois pas oublier d'ajouter qu'il n'avoit point de nerfs olfactils, & que l'os éthimoïde étoit sans trous. Tous ces défauts font donc voir clairement qu'il auroit été privé de l'odorat.

Voilà les principales remarques extraordinaires que j'ai extraites de la description de M. Seyfar, avec les reflexions que j'y ai faites. Je passe maintenant à trois questions qu'il me propose dans la Lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire en particulier. 1°. Sçavoir, si le fœtus renfermé dans la matrice se nourrit par la bouche. 2°. Quelle sorte de liqueur il reçoit de sa mere par l'ombilic. 3°. Si le moconium est l'excrement de la premiere coction.

Pour répondre à la premiere question, je dis, 1°. Qu'il n'y a pas d'apparence que le fœtus renfermé dans la matrice, reçoive aucune sorte d'aliment par la bouche pendant la grossesse, parce que la nature n'a pas coûtume de prendre en même temps deux voies differentes pour arriver à une même fin.

2°. L'humeur glaireuse qui se trouve dans l'œsophage, l'estomach & les intestins grêles, & qui a fait juger à quelques Auteurs que le fœtus se nourrit par la bouche, ne le prouve nullement; car les glandes qui se dégorgent

continuellement dans la bouche, dans l'œſophage, dans le ventricule & dans ſes inteſtins, ſont des ſources plus que ſuffiſantes pour la fournir.

3°. Enfin ce qui ſemble décider cette queſtion, c'eſt qu'on a vû des fœtus à terme fort gras & bien nourris, dont la bouche & les narines étoient tout à fait fermées, ſans avoir aucun autre conduit extraordinaire qui communiquât dans le pharinx ou dans l'œſophage, par lequel l'aliment pût être porté dans l'eſtomach, & d'autres qui n'avoient point de tête. Or s'il étoit vrai que le fœtus eût neceſſairement beſoin de prendre quelque aliment par la bouche pour ſe nourrir, comme le prétendent ſes Auteurs, il eſt évident que tous ces fœtus n'auroient jamais pû venir à leur derniere perfection. Ils y ſont cependant arrivés. Il eſt donc clair que le fœtus reçoit ſeulement par l'ombilic l'aliment dont il ſe nourrit dans le ſein de ſa mere. D'ailleurs on ſçait certainement que les eaux dans leſquelles il eſt plongé, ne ſont autre choſe que ſes propres veines. Il n'y a donc pas lieu de croire qu'il puiſſe tirer de cet excrément quelque nourriture.

Mais cela étant, on me demande ſi le fœtus ne reçoit que du ſang ou du chile par l'ombilic. On trouvera la réponſe a cette ſeconde queſtion dans le Problême que je propoſai à l'Academie le 5e May de l'année derniere; il a été imprimé dans ſes Memoires. Il ne me reſte donc plus qu'à ſatisfaire à la troiſiéme queſtion de M. Seyfar; ſçavoir, ſi le *meconium* eſt l'excrement de la premiere coction. Voici ſur cela quelle eſt ma penſée.

Je viens de prouver que le fœtus ne ſe nourrit point par la bouche, le meconium ne peut donc pas être l'excrement de la premiere digeſtion; il faut donc neceſſairement que ce ſoit une matiere formée du mêlange des liqueurs differentes des glandes qui ſe vuident dans le canal qui s'étend depuis la bouche juſqu'à l'anus, & par conſequent l'un des excremens de la ſeconde coction, c'eſt-à-dire de la maſſe du ſang qu'il reçoit de ſa mere par l'ombilic. Comme on peut faire aiſément l'applica-

tion de ces conſequences aux fœtus des animaux, il ſeroit auſſi inutile qu'ennuyeux de m'étendre davantage ſur cette matiere, pour prouver qu'ils ſe nourriſſent dans la matrice comme fait le fœtus humain, c'eſt-à-dire, par le cordon ombilical.

COMPARAISON

Des Obſervations du Barometre faites à Paris & à Zuric, pendant les ſix premiers mois de l'année 1708.

PAR M. MARALDI.

MOnſieur Scheuchzer a envoyé à l'Academie un Memoire où ſont diverſes Obſervations qu'il a faites à Zuric pendant les ſix premiers mois de l'année 1708.

Ce ſont les Obſervations du Barometre, du Thermometre, des Vents, de la conſtitution de l'Air, de la quantité de Pluïe qui eſt tombée, & de l'augmentation & diminution du Limat, qui eſt une riviere qui paſſe à Zuric, faites à chaque jour du mois, & ſouvent deux fois le même jour. A toutes ces Obſervations il en ajoûte d'autres à la fin de chaque mois ſur les maladies qui ont regné pendant le mois.

Pour les Obſervations du Barometre il s'eſt ſervi de deux tuyaux, l'un droit, l'autre incliné, dans lequel le mouvement du mercure eſt le double plus ſenſible que dans le droit. Ces hauteurs ſont diviſées en pouces & en lignes du pied de Paris. Ces deux Barometres s'accordent ſouvent enſemble, mais quelquefois il y a une difference de 4 lignes. Dans la comparaiſon que nous avons fait de ces Obſervations avec les nôtres, nous nous ſommes ſervi du Barometre droit. Pour meſurer la pluïe, il

dit s'être servi de la methode de l'Academie, & de la mesure de Paris. C'est aussi la même mesure qu'il a emploïee pour connoître l'augmentation & la diminution de l'eau du Limat.

Le premier de Janvier le Barometre étoit à l'Observatoire à 27 pouc. 5 lign. le vent étant Sud. A Zuric avec le même vent le Barometre étoit à 26 pouc. 3 lign. de sorte que la difference entre l'Observatoire & Zuric étoit de 1 pouc. 2 lign. dont le mercure étoit plus élevé à l'Observatoire. La difference la plus ordinaire & moïenne est 1. p. 4 lign. Aprés le premier Janvier le Barometre augmenta de part & d'autre jusqu'au 3, & diminua jusqu'au 10, qu'il fut à Paris à 26 pouc. 10 lign $\frac{1}{2}$, à Zuric à 25 pouc. 11 lig. qui sont à peu prés les termes les plus bas où il arrive à Paris aussi bien qu'à Zuric, ainsi il avoit diminué environ de six lignes: le vent étoit dans cette intervale à Paris Sud ou Sud-Oüest; à Zuric il étoit en même-temps presque toûjours opposé, c'est-àdire, Nord ou Nord-Oüest. Le Barometre s'éleva dans la suite du mois. A Paris le 19 & le 20, il y eut des vents de Sud-Oüest tres-violens. M. Scheuchzer marque aussi que le 19 il faisoit un vent de Sud-Oüest grand, & il ajoûte que le 25 à 10 h du soir, il fit un fort grand vent qui renversa beaucoup de cheminées. Son Thermometre fut le 29 Janvier à 10 degrés, qui est le plus bas où il soit arrivé. Pendant le mois de Janvier il a plû à Zuric 18 lig. $\frac{1}{2}$, à Paris il a plû 34 lig. & davantage. La diminution du Limat a été de 9 pouces, & l'augmentation de deux.

Au commencement de Fevrier le Barometre s'étant trouvé fort bas à Paris & à Zuric, il s'éleva depuis le 6 jusqu'au 9 en trois jours d'un peu plus de 10 lignes à Paris, à Zuric de 8 lignes; il baissa ensuite jusqu'au 16, & s'éleva aprés jusqu'au 22, étant comme il avoit été le 9 Fevrier à Paris à 28 pouc. 1 lig. à Zuric à 26 pouc. 8 lig. qui sont à peu prés les hauteurs les plus grandes où il a coûtume de monter. Pendant le mois de Fevrier il a regné le plus souvent le même vent de Nord & de Nord-

Oüeſt à Paris & à Zuric, & il eſt tombé dans ces deux villes la même quantité de pluïe qui eſt de 19 lignes. La diminution de l'eau du Limat en hauteur a été de 9 pouces $\frac{1}{2}$ & l'augmentation d'un pouce & demi.

Il arriva à la hauteur du Barometre pluſieurs variations dans le mois de Mars, & ces variations arriverent les mêmes jours, & furent à peu près les mêmes à Paris & à Zuric. Il reſta élevé les deux premiers jours, & baiſſa le troiſiéme; il hauſſa les trois jours ſuivans, & baiſſa de nouveau juſqu'au 11. Aprés s'être élevé juſqu'au 16, il baiſſa pour la troiſiéme fois juſqu'au 22. Le vent étoit Nord à Paris & Nord-Oüeſt à Zuric. Il plût à Paris & à Zuric 17 lig. L'augmentation du Limat fut de 5 pouces égale à la diminution.

Le 10 d'Avril à Paris le Barometre étoit à 27 pouc. 2 lig. $\frac{1}{2}$ par un vent d'Oüeſt, à Zuric il étoit à 25 pouc. 11 lig. par un vent de Nord. Le Barometre s'éleva un peu le jour ſuivant dans ces deux villes, & il baiſſa de nouveau le 12 à Zuric & à Paris, où il continua de baiſſer encore le 13 par un vent de Sud violent. Il a plû en Avril 26 lignes à Paris, & 52 lignes $\frac{3}{4}$ à Zuric. Le Limat augmenta 24 pouces, & il ne diminua qu'un demi-pouce.

Les jours que le Barometre reſte plus élevé durant le mois de May à Paris & à Zuric, furent le 7, le 8, le 9 & le 28, & les jours qu'il baiſſa davantage furent le 16 & le 17. Les mêmes à Paris & à Zuric. Il plût à Paris dans le mois de May 27 lig. & $\frac{2}{13}$ à Zuric 21 lig. $\frac{1}{2}$. La diminution du Limat fut 4 pouces, & l'augmentation de 18.

Pendant le mois de Juillet le Barometre reſta le plus ſouvent à une grande hauteur, excepté le 4, le 27 & le 30, qu'il ſe trouva à Paris à 27 pouc. 5 lig. à Zuric à 26 p. 1 lig. Les jours qu'il reſta plus élevé furent le 14 & le 15, étant à Paris à 28 p. o. lig. à Zuric à 26 p. 5 lig. Il plût à Paris 25 lign. $\frac{1}{3}$, à Zuric 66 lign. $\frac{1}{2}$. L'augmentation du Limat de 21 pouce, la diminution de 7.

La plus grande hauteur où ſoit arrivé le Barometre les ſix premiers mois de cette année, a été à Paris le 9

& le 22 Fevrier à 28 pouces 1 ligne, & la plus petite hauteur où il ſoit deſcendu fut le 1 Fevrier, s'étant trouvé à 26 pouces 18 lignes. De ſorte que la variation de la plus grande à la plus petite hauteur a été de 1 pouce 3 lignes à Paris. A Zuric la plus grande hauteur a éte de 26 pouces 8 lignes le 9 & 22 Fevrier. La plus petite s'eſt trouvée de 25 pouces 11 lignes le 1 Fevrier. La difference eſt de 0. pouc. 9 lignes, plus petite de ſix lignes que celle qui eſt arrivée à Paris.

Comparaiſon des Obſervations du Barometre faites à Paris & à Zuric les ſix derniers mois de l'année 1708.

Dans le dernier Memoire que M. Scheuchzer a envoyé à l'Académie, il y a la continuation des Obſervations du Barometre, du Thermometre, des Vents de la Pluïe pour les ſix derniers mois de l'année 1708, & d'autres Obſervations ſemblables à celles qu'il avoit faites les ſix premiers mois.

Nous avons comparé ces nouvelles Obſervations avec celles que nous avons faites en même-temps à l'Obſervatoire de la maniere que nous avons fait les premieres, & voici ce qui réſulte de cette comparaiſon.

En Juillet le Barometre reſta preſque toûjours à une grande hauteur à Paris & à Zuric; il n'y eut que le 6 & le 7 qu'il ſe trouva à une hauteur moyenne, étant à Paris à 27 p. 7 lig. à Zuric à 26 p. 2 lig. $\frac{1}{2}$ & 3 lig. de ſorte que la difference étoit de 1 p. 4 lig. comme nous avons déja conclu par d'autres comparaiſons. Le vent qui a regné en même temps en ces deux villes, a preſque toûjours été different, & ſouvent oppoſé. Il n'a été le même que pendant quatre jours, qui ſont le 11, le 18 & 22, étant de part & d'autre Nord-Eſt, & le 16 étant Sud-Oüeſt. Le Thermometre fut plus élevé à Zuric le 23, à Paris

le 29. En Juillet il plût à Paris 28 lignes, à Zuric 48. Les eaux de la riviere du Limat qui passe à Zuric augmenterent de 10 pouces, & diminuerent de 16; ainsi M. Scheuchzer dit que l'augmentation des rivieres ne répond point à la quantité de pluïe, puisque le Limat est diminué plus qu'il n'est augmenté, quoiqu'il soit tombé une grande quantité de pluïe durant le mois de Juillet.

Au mois d'Aoust la variation qui arriva à la hauteur du Barometre fut de 4 lignes à Paris, & de 3 à Zuric. Les vents ont été la plûpart du temps fort differens en ces deux villes. Le jour que le Thermometre est monté plus haut a été le 15 à Paris le même qu'à Zuric. Il a plû à Paris 22 lig. $\frac{1}{3}$, à Zuric 35 lig. $\frac{1}{2}$. Les eaux du Limat augmenterent en hauteur de 3 pouces, & diminuerent de 22 pouces.

En Septembre le jour que le Barometre se trouva plus élevé fut le premier à Paris & à Zuric, & le jour qu'il descendit plus bas fut le 26 le même de part & d'autre. Le 10 il regna un vent de Sud-Est de part & d'autre, le 20 un vent de Sud-Oüest, le 21 un vent de Sud; dans les autres jours les vents furent differens. Il plût à Paris 12 lignes, à Zuric 34. Le Limat diminua de 12 pouces sans avoir augmenté.

En Octobre le Barometre resta plus élevé le 6 & le 7, le 18 & le 19 à Paris de même qu'à Zuric. Il regna pendant presque tout le mois de part & d'autre des vents de Nord, de Nord-Est ou Nord-Oüest, Il plût à Paris 14 lig. $\frac{2}{3}$, à Zuric 27 lig. $\frac{1}{2}$. La hauteur perpendiculaire des eaux & du Limat diminua de dix pouces sans avoir augmenté.

En Novembre les jours que le Barometre resta plus haut furent le 1 & le 19 les mêmes à Paris & à Zuric, & le jour qu'il descendit plus bas de part & d'autre fut le 23. Il n'a regné le même vent que le 24 & le 26. Le jour le plus froid fut le 25 le même à Paris & à Zuric. Il plût à Paris 5 lig. $\frac{1}{2}$, à Zuric 7. La diminution du Limat fut de 6 pouces sans avoir augmenté.

En

En Decembre le 14[e]. fut le jour que le Barometre ſe trouva plus bas de part & d'autre. Les jours que le Thermometre fut plus bas furent à Paris le 11. & le 14, à Zuric ce fut le 12. & le 29. Il ne s'eſt point rencontré de jour qu'il ait fait de part & d'autre le même vent. Il a plû à Paris 9 lig. $\frac{2}{3}$, à Zuric il a plû 21 lig. $\frac{1}{2}$. La diminution du Limat fut de 4 pouces ſans augmentation.

La ſomme totale de la pluïe qui eſt tombée à Paris, ſuivant nos obſervations, a été de 20. pouc. 1 lig. celle qui eſt tombée à Zuric eſt de 30 pouces; deſorte qu'il eſt tombé preſque un tiers de pluïe plus à Zuric qu'à Paris. M. Scheuchzer croit qu'il pleut davantage en Suiſſe qu'en France, à cauſe de la grande quantité des montagnes où les nuages portez par les vents ſe vont fondre pour l'ordinaire en pluïe & en neige. La grande quantité de rivieres qui ſortent de ces montagnes, font auſſi conjecturer que la pluïe y tombe en plus grande abondance. Il croit qu'il tombe auſſi plus de pluïe dans les païs qui ſont proche de la mer, que dans les terres. Il dit qu'à Upminſter en Angleterre, ſuivant les obſervations de M. Derham, il pleut 19 pouces d'eau, lorſqu'à Toconle dans le Lancaſtre il y tombe 39 pouces d'eau.

Dans les ſix premiers mois de l'année 1708. l'augmentation des eaux du Limat a été 71 pouc. $\frac{1}{2}$. Les ſix derniers elle a été de 13, & l'augmentation totale de 84 p. $\frac{1}{2}$. La diminution pendant les ſix premiers mois a été de 35 pouces, & de 67 les ſix derniers. La diminution totale de 102 pouc. plus grande de 16 pouc. que l'augmentation.

M. Scheuchzer dit que l'augmentation des eaux dans les rivieres de la Suiſſe vient principalement de la fonte des neiges qui ſe fait ſur les montagnes, ce qui paroît par pluſieurs torrens de ce païs-là, & en particulier par celles qu'il appelle Taminna, dont les eaux augmentent tous les ſoirs pendant l'Eſté, ſouvent à un pied de hauteur, quoiqu'il n'ait point plû durant le jour. Par la diminution des eaux du Limat plus grande que l'augmentation, M. Scheuchzer infere que ſon païs eſt plus froid que ce-

lui qui eſt le plus éloigné des Alpes, où l'Hyver regne la plus grande partie de l'année, n'y ayant en Suiſſe que deux mois d'Eſté, qui doit être plutôt appellé un Printemps.

SOLUTIONS ET ANALYSES

De quelques Problêmes appartenans aux nouvelles Méthodes.

PAR M. SAURIN.

IL ny a guere de Problêmes qui aïent plus mis en jour le mérite & l'utilité des nouvelles Méthodes, que ceux qui ſe rapportent à la Queſtion *des plus grandes & des plus petites Quantités.* Il s'en trouve pluſieurs de cette nature également curieux, & difficiles dans les Journaux des Sçavans de 1697, & dans les Actes de Lipſic de 1698. Les celebres Geometres qui en ont donné la Solution, ont ſupprimé l'Analyſe qui les y a conduits. Je me propoſe de donner une nouvelle Solution de quelques-uns, & l'Analyſe ſupprimée de quelques autres.

Je commence ici par un des Problêmes qui regardent *la plus vite deſcente.* Deux points étant donnez ſur une ligne droite inclinée à l'horizon, trouver la Ligne qu'un corps en tombant devroit d'écrire pour arriver d'un point à l'autre dans le plus court tems poſſible : c'eſt le premier Problême qui parut d'abord ſur cette Queſtion. Il fut propoſé par M. Jean Bernoulli, alors Profeſſeur de Mathématique à Groningue, & qui l'eſt préſentement à Bâle : on trouva que la Ligne demandée étoit la Cycloïde. M. Jacques Bernoulli mort depuis quelques années, crut encherir ſur la difficulté de ce premier Problême, par un ſecond qu'il propoſa à l'envi de ſon Frere. Il demanda de toutes les Cycloïdes celle par laquelle le corps en tombant arriveroit le plutôt à une verticale détermi-

née: c'eſt celui dont je vais donner une Solution nouvelle. J'exprime le Problême de cette ſorte.

Parmi une infinité de Cycloïdes * AGB, AFD. *décrite ſur la ligne horizontale* AM, *& ayant une même origine au point* A, *déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine* A, *& la verticale donnée* CD *eſt parcouru dans le plus court tems poſſible.* * FIG. I.

SOLUT. Je prends pour conſtante une Cycloïde quelconque *AGB*, & ſuppoſant que *AFD* une des variables eſt celle que l'on demande, je mene l'ordonnée *BL*, & la corde *AD* que je prolonge juſqu'en *B*, en ſorte qu'elle coupe deux arcs ſemblables *AFD*, *AGB*. *MSN* eſt le cercle Generateur de la Cycloïde priſe pour conſtante. Je nomme le diametre de ce cercle, a; *AL*, x; *BL*, y; & la donnée *AC*, b.

Cela poſé, on ſçait le Theorême démontré par M. Hughens, que le tems par un arc quelconque *AGB* de Cycloïde eſt comme l'arc correſpondant *MIS* du cercle Generateur, diviſé par la racine quarrée du diametre. Ici l'arc *MIS* eſt égal à $AL + ST$ ($x + \sqrt{ay - yy}$); on aura donc $\frac{x + \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{a}}$ pour l'expreſſion du tems par l'arc *AGB*; mais ce tems eſt au tems par l'arc ſemblable $AFD :: \sqrt{BL} . \sqrt{CD} :: \sqrt{AL}$ ($\sqrt{x}$). $\sqrt{AC}$ ($\sqrt{b}$); & parconſéquent le tems par l'arc *AFD* eſt égal à $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \times \frac{x + \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{x}}$; ce qui étant un *Minimum* par la ſuppoſition, doit être differentié, & ſa difference égalée à zero.

En laiſſant la quantité conſtante $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ qui diſparoît toûjours dans la ſuite, la differentiation donne $\frac{dx \times \sqrt{x}}{x} + dy \times \frac{a\sqrt{x} - 2y\sqrt{x}}{x \times 2\sqrt{ay - yy}} - dx \times \frac{x + \sqrt{ay - yy}}{x \times 2\sqrt{x}} = 0$; mettant à même dénominaiſon, ôtant enſuite le dénominateur commun, & effaçant ce qui ſe détruit, il vient $dx \times x\sqrt{ay - yy} + dy \times ax - 2yx - dx \times ay - yy = 0$. Si au lieu de dx on ſubſtituë ſa valeur $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{a - y}}$ donnée par la nature de la Cy

cloïde, on aura $dy \times \frac{\sqrt{y} \times x\sqrt{ay-yy}}{\sqrt{a-y}} (dy \times y : x) - dy \times \overline{ax - yx}$ $- dy \times \frac{\sqrt{y} \times \overline{ay-yy}}{\sqrt{a-y}} (-dy \times y\sqrt{ay-yy}) = o$; d'où l'on tire $ax - yx = y\sqrt{ay-yy}$, & en quarrant de part & d'autre $aaxx + xxyy = 2axxy = ay^3 - y^4$; ou $y^4 - ay^3 + xxyy - 2axxy + aaxx = o$. Cette Egalité se divise par $y - a = o$, & donne par conséquent $y = a$; ce qui fait voir que l'ordonnée BL est l'axe même MN du cercle Generateur , & que l'arc AGB est la demie Cycloïde entiere ; & comme il est semblable à l'arc AFD, ce dernier doit être aussi une demie Cycloïde entiere, & le Problême est résolu par la Cycloïde qui coupe à angles droits la verticale donnée.

La division par $y - a = o$ donne l'Equation à la Cissoïde, $y^3 + xxy - axx = o$. Il n'étoit pas necessaire de quarrer l'Egalité $ax - yx = y\sqrt{ay-yy}$; ou $ax - yx - y\sqrt{ay-yy} = o$, pour la diviser ; elle pouvoit être divisée d'abord par $\sqrt{a-y} = o$; l'on auroit eu de même $y = a$, & l'Equation à la Cissoïde sous les signes radicaux , $xx\sqrt{a-y} - y\sqrt{y} = o$.

Pour concevoir maintenant avec M. Jean Bernoulli le
* FIG. II. Problême plus generalement ; soit* la droite CD, non une verticale, mais en général une ligne droite donnée de position; faisant un angle quelconque avec l'horizontale AM ; on demande comme auparavant la Cycloïde dont l'arc AFD compris entre le point d'origine A, & la donnée de position CD sera parcouru dans un plus court tems que l'arc de toute autre Cycloïde compris de même entre la droite CD & le point A.

Je prends toûjours pour constante la Cycloïde AGB, & tout demeurant de même que dans la Figure précédente , je mene de plus BQ parallele à CD. La droite CD étant donnée de position, AC est donnée de grandeur ; l'angle AQB, égal par construction à l'angle ACB, est aussi donné ; & par conséquent la raison de BL à LQ est donnée ; soit cette raison celle de m à n. Nommant

encore MN, a; AC, b; AL, x; BL, y; on aura $LQ = \frac{ny}{m}$, & $AQ = AL + LQ = x + \frac{ny}{m} = \frac{mx + ny}{m}$; & si le tems par l'arc AFD est appellé, t; cette Analogie semblable à la précédente, $\frac{x + \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{a}}$ (tems par AGB). t (tems par AFD) :: $\sqrt{BL}$. $\sqrt{PD}$ :: $\sqrt{AB}$. $\sqrt{AD}$ :: $\sqrt{AQ}$ $\left(\frac{\sqrt{mx + ny}}{m}\right)$. $\sqrt{AC}$ $(\sqrt{b})$ :: $\sqrt{mx + ny}$. $\sqrt{bm}$, donnera $t = \frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{a}} \times \frac{x + \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{mx + ny}}$. En differentiant cette quantité ; Substituant la valeur de dx en dy; & faisant les réductions convenables, il viendra l'Egalité, $my + nx\sqrt{ay - yy} = nyy + amx - myx$, qui étant quarrée produira l'Egalité A, délivrée des signes radicaux;

$$A \ldots m^2y^4 - am^2y^3 + m^2xxyy - 2am^2xxy + aam^2xx = 0.$$
$$+ n^2y^4 \qquad\qquad + n^2xxyy - an^2xxy$$

Cette Egalité se divisant par $m^2y + n^2y - amm = 0$, donne $y = a \times \frac{m^2}{m^2 + n^2}$, dont voici la construction, qui est fort simple.

Soient * menées dans le cercle Generateur MSN la corde MS parallele à la donnée de position CD, & par le point S, TSB parallele à l'horizontale AM, & qui rencontre la Cycloïde AGB en quelque point B; je dis que l'ordonnée BL menée de ce point est la valeur de y, & que si l'on décrit un arc de Cycloïde AFD compris entre le point d'origine A, & la donnée de position CD, & semblable à l'arc AGB, cet arc AFD satisfera à la question. Car dans le cercle MSN, MS étant parallele par construction à la donnée de position CD, & MT étant aussi parallele à BL, on a, MT. TS :: m. n; & par la proprieté du cercle, MS^2 $(m^2 + n^2)$. MT^2 (m^2) :: MN (a). $MT = a \times \frac{m^2}{m^2 + n^2} = LI = y$.

* Fig. II. & III.

Il est évident que CD sera perpendiculaire au point D à l'arc AFD; car si du point B on mene BQ parallele à CD, elle sera aussi parallele à la corde correspondante MS du cercle Generateur, & par la nature de la Cy-

cloïde elle sera perpendiculaire à l'arc *AGB* au point *B*; donc aussi *CD* parallele à *BQ* sera perpendiculaire au point *D* à l'arc *AFD*, qui est semblable à l'arc *AGB* : ainsi dans ce cas comme dans le précédent de la verticale, la Cycloïde dont l'arc *AFD* tombe perpendiculairement sur la ligne donnée de position, est celle qui résout le Problême.

Il est fort aisé de déterminer le diametre du cercle Generateur de cette Cycloïde : on n'a qu'à faire *BQ* ou $MS . MN :: CD . \frac{MN \times CD}{MS}$ ce 4[e]. terme est le diametre du cercle requis.

La division de l'Egalité *A* . . par $m^2y + n^2y - amm = o$, laisse l Equation à la Cissoïde $y^3 + xxy - axx = o$, qui étoit venuë dans le cas de la verticale : & de même si l'on divise par m^2 l'Egalité *A* . . & qu'ensuite on fasse $-\frac{m}{n} = o$, on aura, $y^4 - ay^3 + xxyy - 2axxy + aaxx = o$, qui est l'Egalité trouvée dans le cas de la verticale, & qui divisée par $y - a = o$, devient l'Equation de la Cissoïde.

Les figures 2 & 3 representent la donnée de position *CD* faisant un angle aigu avec l'horizontale *AM* du côté du point d'origine *A*, & c'est à cette position que convient le calcul précédent : mais on peut donner à *CD* une position différente qu'il faut encore considerer. Soit

* Fig. IV. donc * la position de *CD* changée en celle de *C*Δ qui est en sens contraire ; c'est-à-dire, soit fait l'angle *MC*Δ égal à l'angle *ACD* des Fig. 2 & 3 : il est évident, ou du moins il est aisé de démontrer que de tous les arcs de Cycloïde compris entre le point d'origine *A*, & la donnée de position *C*Δ, il y en a un qui doit être parcouru dans le plus court tems.

Si pour déterminer cet arc on suit la même méthode que nous avons suivie, l'expression du tems par l'arc cherché, qui étoit $\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{a}} \times \frac{x + \sqrt{nn - yy}}{\sqrt{mx + ny}}$, sera $\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{a}} \times \frac{x + \sqrt{nn - yy}}{\sqrt{mx - ny}}$; où il n'y à d'autre difference que celle de $-ny$ dans le dénominateur, au lieu de $+ny$. Cette Fraction étant diffe-

rentiée, & réduite, donnera l'Egalité, $\overline{my - nx} \times \sqrt{\overline{ayy - yy}} + nyy + myx - amx = 0$, qui quoique differente dans quelques signes $+$, $-$, de l'Egalité $\overline{my + nx} \times \sqrt{\overline{ay - yy}} - nyy + myx - amx = 0$, donnée par l'autre position de CD, ne laisse pas, quand on la délivre des signes radicaux, de rendre la même Egalité A.. qu'on a trouvée ;

$$A \ldots \begin{matrix} m^2y^4 - am^2y^3 + m^2xxyy - 2am^2xxy + aam^2xx = 0. \\ +n^2y^4 \qquad\qquad\quad + n^2xxy - an^2xxy \qquad\qquad\qquad\qquad \end{matrix}$$

Ainsi l'on a pour y la même valeur $a \times \frac{m^2}{m^2+n^2}$, & la même construction, mais avec cette difference que la corde MS du cercle parallele à CD, étant de l'autre côté de l'axe MN à l'égard du point d'origine A, il faut aussi mener TSB de ce côté-là, & prendre y dans la demie Cycloïde qui est ici à droite; de sorte que dans cette Figure, ce n'est pas BL, mais son égale bl qui est y ; & ce n'est pas aussi $AF\Delta$ qui est l'arc du plus court tems, mais l'arc $A\varphi\delta$ qui est semblable à l'arc ANb. Il est clair que bq parallele à MS, parallele à la donnée de position $C\Delta$, est perpendiculaire au point b, a l'arc ANb, & par conséquent la donnée de position $C\Delta$ est aussi perpendiculaire à l'arc $A\varphi\delta$ au point δ. Il est donc generalement vrai dans toutes les positions de la droite CD ou $C\Delta$ que l'arc de Cycloïde qui la coupe perpendiculairement est celui qui satisfait au Problême.

Si dans le calcul on avoit pris bl, & non pas BL, en nommant toûjours Al, x ; bl, y ; &c. l'arc de cercle MNS qui mesure le tems par ANb, étant égal à $Al - ST$ $(x - \sqrt{ay - yy})$, l'expression de ce tems auroit été $\frac{x - \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{a}}$; & ce tems étant au tems par l'arc semblable $A\varphi\delta :: \sqrt{Aq}$ $\left(\frac{\sqrt{mx - ny}}{m}\right) . \sqrt{AC}$ $(\sqrt{b})$; on auroit eu pour l'expression du tems par $A\varphi\delta$, $\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{a}} \times \frac{x - \sqrt{ay - yy}}{\sqrt{mx - ny}}$. En differentiant cette Fraction, & prenant garde que dans cette demie Cycloïde le dy est négatif, on seroit encore venu à l'Egalité A déja trouvée, qui donne $y = a \times \frac{m^2}{m^2+n^2}$.

Pour voir clairement que l'arc de Cycloïde *AF*Δ n'eſt pas celui du plus court tems, il ne faut * que tirer la corde *AN* de la demie Cycloïde ; & par le point *H*, ou elle coupe la donnée de poſition *C*Δ, mener la verticale *KHR*. L'arc de Cycloïde qui paſſe par le point *H* étant une demie Cycloïde entiere qui coupe en ce point perpendiculairement la verticale *KH*, eſt celui du plus court tems pout arriver à cette verticale ; le tems par l'arc *AFR* eſt donc plus long ; mais le tems par l'arc *AFR*Δ eſt plus long encore ; cet arc n'eſt donc pas celui du plus court tems ; puiſque le tems par la demie Cycloïde qui rencontre au point *H* la donnée de poſition *C*Δ eſt beaucoup plus court.

* Fig. V.

J'avois deſſein de rêſoudre ce Problême élevé encore à un nouveau degré de generalité ; & embraſſant toutes les Courbes ſemblables, de tirer de mon Analyſe les conſtructions qu'en ont données les deux Meſſieurs Bernoulli ; mais renvoïant cela à un autre Memoire, je vais finir celui-ci par une Solution pour les Cycloïdes, generale pour toutes les poſitions de la droite *CD*, courte & ſans calcul.

Je prends * pour conſtante la Cycloïde *ANa*, dont la baſe *Aa* eſt égal à deux fois *AC* diſtance donnée entre le point d'origine *A*, & la donnée de poſition *CD* ; par le point *S* ou *CD* coupe le cercle Generateur, je mene *TSB* parallele à *AC*, & du point *B* je mene *BL* ordonnée à la Cycloïde, & *BQ* parallele à la donnée de poſition *CSD* ; enſuite je raiſonne ainſi ; La raiſon de *MT* à *TS* étant donnée dans le cercle *MNS* pris pour conſtant, les droites *MT*, *TS*, *CS*, & l'arc *CIS* ſont des grandeurs données ; & par conſéquent auſſi *BL*, *LQ*, *BQ*, & *AQ* qui leur ſont égales. Le tems par l'arc *AGB*, meſuré par l'arc de cercle *CIS* eſt donc auſſi donné ; donc auſſi le tems par *AFD* eſt donné, puiſque ces deux tems ſont entr'eux dans la raiſon des données, $\sqrt{AQ}$, $\sqrt{AC}$: ce tems le ſeul de tous qui ſoit un conſtant & dont la difference ſoit égale à zero, eſt donc le *Minimum* cherché, & l'arc

* Fig. VI.

AFD

AFD l'arc qu'il falloit trouver. Il eſt clair que lorſque *CS* devient verticale, elle tombe ſur *CN*; les trois points *S*, *B*, & *D*, ſe confondent tous trois avec le point *N*; on a *BL* (y) $=$ a, & la demie Cycloïde même *ABN* eſt la requiſe.

Quelque autre Cycloïde que l'on prenne pour conſtante, le même raiſonnement aura lieu; & je n'ai pris celle dont *AC* eſt la demie baſe que pour la facilité, & pour la remarque qui ſuit. Toutes choſes demeurant les mêmes; ſi l'on conçoit que la donnée de poſition *CSD* ſe meuve autour du point fixe *C* de *a* en *A*, elle prendra toutes les poſitions qu'elle peut recevoir. Je dis que la Courbe qui paſſe par tous les points *D* où la coupent dans chaque poſition les arcs du plus court tems eſt, une * Spirale *ADNdC*, dont le rayon *MD* eſt toûjours à *AC*, comme la corde *CS* à ſon arc *CIS*, ou toûjours à la corde *CS*, comme la demie circonference *CSN* du cercle Generateur à l'arc *CIS*; ce qui ſe voit clairement, puiſqu'on a par tout *AQ* (*CIS*). *AC* (*CSN*) : : *BQ* (*CS*). *CD*.

* Fig. VII.

OBSERVATION DU RETOUR DE L'ETOILE CHANGEANTE DE L'HYDRE.

Par M. Maraldi.

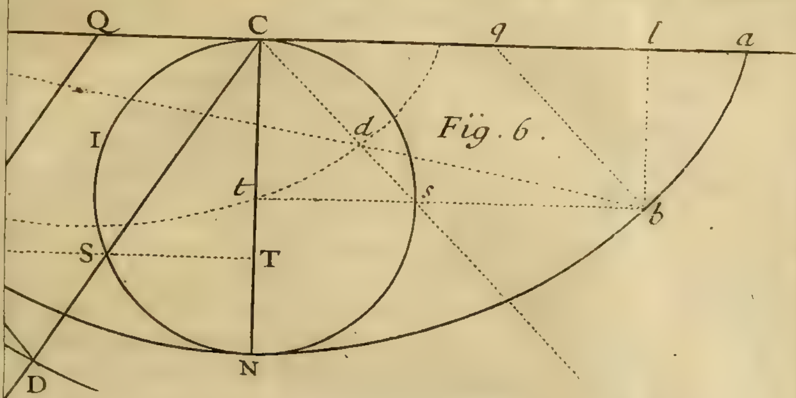
L'Etoile de l'Hydre dont nous avons découvert les changemens, ayant été inviſible pendant quelque temps, a paru de nouveau l'année derniere 1708. dans la même ſituation où elle étoit auparavant. 1709. 13. Février.

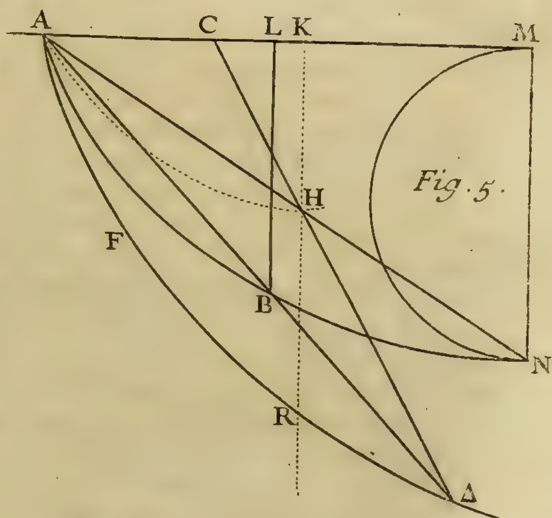
Nous avions ceſſé de la voir vers la fin de Février de l'année 1706. avec une Lunete de 12. pieds, par laquelle nous l'obſervions depuis le mois de Novembre précedent. Après le mois de Février de 1706. elle n'a pû être

apperçûë qu'au mois d'Avril de l'année 1708. quoiqu'on ait été ſouvent attentif à regarder la partie du Ciel où elle devoit ſe trouver. Nous commençâmes de la voir le 18. du même mois d'Avril lorſqu'elle étoit déja aſſez ſenſible, & plus grande que les Etoiles de la ſixiéme grandeur; ce qui nous fit juger qu'on l'auroit pû remarquer auparavant à la vûë ſimple, ſi le temps eût été favorable, ou qu'on y eût fait attention. Neanmoins il n'y avoit pas long-temps qu'elle pouvoit être viſible; car vers le milieu de Mars ayant conſideré cet endroit du Ciel, nous ne pûmes encore appercevoir l'Etoile, quoiqu'on diſtinguât fort bien toutes les autres qui lui ſont proches.

Le 24. Avril, ſix jours après que nous l'eûmes apperçûë, on reconnut qu'elle étoit un peu augmentée; mais elle étoit encore un peu plus petite que l'antepenultiéme de l'Hydre, qu'elle égala le 11. May. Le 16. & le 20. du même mois elle étoit encore augmentée, ayant paru plus belle que l'antepenultiéme de l'Hydre.

Le 5. Juin, après pluſieurs jours de temps couvert & de clair de Lune, nous reconnûmes qu'elle étoit un peu diminuée, & la trouvâmes à peu près égale à l'antepenultiéme de l'Hydre, comme elle l'avoit été au commencement de May lorſqu'elle augmentoit; d'où l'on peut conclure qu'elle eſt arrivée à ſa plus grande clarté entre le 11. May & le 5. Juin. Dans la ſuite elle continua à diminuer; mais à cauſe du crépuſcule du ſoir qui empêchoit de voir non ſeulement l'Etoile que nous obſervions, mais les autres Etoiles prochaines, nous la perdîmes à la vûë ſimple. On en continua neanmoins les obſervations juſqu'à la fin de Juin avec la Lunete, en la comparant à l'antepenultiéme de l'Hydre, qui eſt composée de deux Etoiles inégales, une plus grande que l'autre, peu de minutes éloignées entr'elles, leſqu'elles étant proches du parallele de la changeante & de la plus claire des trois, paſſoient toutes dans la même ouverture de la Lunete, ce qui donnoit la commodité de les comparer enſemble.


Q
C
q
l
a
I
d
Fig. 6.
t
s
b
S
T
N
D


A
C
L
K
M
Fig. 5.
H
F
B
N
R
Δ

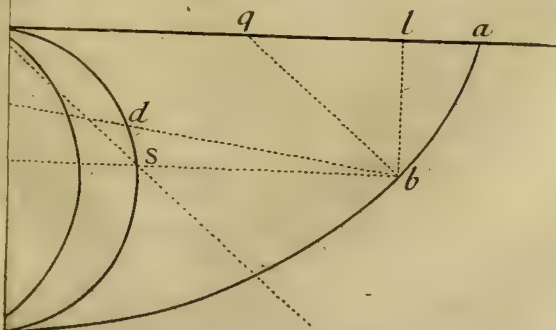

q
l
a
d
S
b

Fig. 4

Fig. 6

Fig. 1re

Fig. 3

Fig. 5

Fig. 2

Fig. 7

Les derniers jours que nous la vîmes, elle parut égale à la plus claire des deux qui composent l'antepenultiéme de l'Hydre, & suivant cette apparence il y avoit lieu de croire qu'on l'auroit pû voir encore pendant quelque temps avant que la foiblesse de sa lumiere l'eût fait disparoître; mais nous cessâmes enfin de la voir à la fin de Juin par la Lunete dans les vapeurs de l'horizon, où les autres Etoiles cessent aussi de paroître.

L'apparition que nous venons de rapporter de cette Etoile, est la troisiéme que nous observons depuis sept ans. Dans ces trois differens retours il y a eu des inégalitez, tant à l'égard des intervalles de temps échûs entre un retour & l'autre, qu'à l'égard de la grandeur apparente où l'Etoile est arrivée dans le temps qu'elle a été visible. Nous la vîmes la premiere fois au commencement de Mars de l'année 1704. ainsi qu'il a été rapporté dans les Memoires de l'Academie, elle continua de paroître jusqu'à la fin de May à la vûë simple, & jusqu'à la fin de Juin avec la Lunete. Elle ne parut ensuite qu'au mois de Novembre de l'année 1705. & continua d'être visible avec la Lunete jusqu'à la fin de Février de l'année 1706. Elle n'a point paru depuis jusqu'au mois d'Avril de l'année 1708. qu'on commença de la voir.

Entre l'apparition de l'année 1704. & la suivante qui arriva au mois de Novembre de l'année 1705. il y a un intervalle de 19. mois; & depuis ce second retour jusqu'au troisiéme, il y a un intervalle de 30. mois beaucoup plus grand que le premier.

Sa grandeur apparente a été aussi sujette à des inégalitez. L'an 1704. dans sa plus grande clarté, elle fut égale aux Etoiles de la quatriéme grandeur: elle est arrivée à la même clarté l'an 1708. mais elle a été fort foible pendant l'année 1708. n'ayant été visible qu'avec la Lunete. Elle ne parut point depuis le mois d'Avril jusqu'à la fin de l'année 1702. dans lequel temps on fut attentif pour l'observer.

L'Etoile n'est donc pas arrivée à sa plus grande clarté

dans l'eſpace de ſept ans qu'aux années 1704. & 1708. éloignées de quatre ans l'une de l'autre; ce qui pourroit donner lieu de croire que le retour à ſa plus grande phaſe eſt de quatre années, au lieu de deux comme nous l'avions ſuppoſé.

Mais l'obſervation que Montanari fit de cette Etoile ne s'accorde pas avec la periode de quatre ans. Cet Aſtronome l'obſerva au mois d'Avril de l'an 1670. lorſqu'elle étoit de la quatriéme grandeur.

Suivant les obſervations que nous avons fait juſqu'à préſent, elle n'arrive à ce degré de lumiere que vers le milieu de ſon apparition. On peut donc ſuppoſer qu'elle étoit alors à ſa plus grande phaſe.

Par les obſervations de l'an 1704. que nous avons rapporté, elle arriva auſſi à ſa plus grande clarté au mois d'Avril; ainſi la même phaſe eſt arrivée aſſez préciſement dans le même mois de l'année après trente-quatre années échuës depuis 1670. juſqu'en 1704. entre leſquelles il y a un nombre entier des révolutions de l'Etoile.

Dans cet intervalle il n'y a pas un nombre entier de periodes de quarre années, mais il peut y avoir dix-ſept periodes de deux années chacune, ce qui ſe confirme auſſi par la comparaiſon de nos obſervations avec celles d'Hevelius.

Nous avons déja remarqué dans les Memoires de 1706. que cet Aſtronome a obſervé l'Etoile de l'Hydre. Voici comme nous l'avons reconnu. Il prit la diſtance entre l'Etoile qui eſt dans le genou du Serpentaire, & une troiſiéme qui eſt dans la queuë de l'Hydre, & trouva cette diſtance de 46°. 20'. 45". Il obſerva auſſi la diſtance entre la même Etoile de l'Hydre & la Luiſante du col du Serpent de 44°. 14'. 15". Par le moyen de ces deux diſtances, & de celle que nous avons calculé entre les deux Etoiles du Serpentaire & du Serpent, en ſuppoſant la longitude & la latitude de ces deux Etoiles telle qu'elle réſulte de nos obſervations, nous avons calculé la longitude de la troiſiéme Etoile de l'Hydre pour l'année

1701. en 25°. 17′. de Libra, & sa latitude Meridionale de 12°. 41′. Par nos observations nous avons trouvé la longitude de l'Etoile changeante de l'Hydre pour la même année 1701. en 25°. 32′. de Libra, & sa latitude Meridionale de 12°. 49′. Ces deux differentes observations donnent la même latitude de l'Etoile à 8. minutes près, quoique la longitude differe de 15′. Cette difference peut venir en partie de la differente maniere dont on s'est servi pour déterminer cette situation; c'est pourquoi elle ne doit pas empêcher de supposer que ce soit la même Etoile, d'autant plus qu'il n'y en a point d'autres en cet endroit du Ciel qu'on puisse prendre pour celle-ci.

Hevelius l'observa le 18. & le 19. Avril de l'an *1662*. & la trouva de la cinquiéme grandeur. Comme nous n'avons que cette observation faite dans la même année, & qne l'on ne sçait point si l'Etoile augmentoit ou si elle diminuoit, on peut supposer qu'elle n'étoit pas éloignée du milieu de son apparition, puisqu'elle approchoit de la grandeur où elle a coûtume d'être dans son plus grand éclat. Il est à remarquer que cette observation tombe aussi dans le mois d'Avril, comme il est arrivé à celle de Montanari & aux deux nôtres faites en 1704. & en 1708. ce qui est une nouvelle preuve que la periode de l'Etoile qui doit ramener ces phases est composée d'années entieres.

Entre l'observation d'Hevelius qui est la plus ancienne que nous ayons, & celle de Montanari de *1670*. il y a un intervalle de 8. années qui peut également comprendre quatre periodes de deux années chacune, ou deux periodes de 4. Mais on vient à exclure cette derniere par la comparaison de nos observations avec celle d'Hevelius, comme nous avons trouvé par l'observation de Montanari. Car entre celle de *1662*. & les nôtres de 1704. & 1708. il y a deux intervalles dont le plus court est de 42. l'autre est de *46*. ans, lesquels ne comprennent pas un nombre entier de periodes de quatre années; mais le

même intervalle de 46. ans est divisible par deux ans, qui est la periode que nous supposons de l'Etoile.

Nous n'avons point trouvé d'autre periode plus propre que celle-cy à représenter toutes les observations que nous avons jusqu'à présent : elle accorde ensemble les observations d'Hevelius, celle de Montanari & les nôtres, en supposant qu'entre celle d'Hevelius & de Montanari il y ait 4. periodes de deux années chacune ; qu'entre celle de Montanari & les nôtres de 1704. il y ait 17. periodes, & entre celle d'Hevelius & la nôtre de 1708. il y ait 23. periodes chacune de deux ans. Il est vrai que cette hypothese représente deux fois l'Etoile dans sa plus grande phase, lorsque par nos observations elle n'étoit pas visible : car elle ne parut point au mois d'Avril de l'année 1702. lorsque par l'hypothese elle devoit être de la quatriéme grandeur. En 1706. elle ne fut visible qu'avec la Lunete, & nous cessâmes de la voir avec cet instrument dans le temps auquel suivant la révolution de deux ans, elle devoit augmenter.

Ces differences que nous trouvons entre l'hypothese & les observations ne sont pas sans exemple dans les deux Etoiles de la Baleine & du Cigne, qui sont sujettes à changer tous les ans de grandeur apparente. On a observé que l'Etoile de la Baleine dans sa plus grande clarté est égale quelquefois aux Etoiles de la seconde grandeur. On a remarqué aussi que lorsqu'elle est plus belle, elle n'est guére plus grande que les Etoiles de la quatriéme grandeur. L'Etoile qui est dans le col du Cigne paroît le plus souvent dans sa plus grande phase de la quatriéme grandeur, & quelquefois elle n'a paru que foiblement. L'Etoile de l'Hydre peut être sujette à des variations semblables & encore plus grandes, qui la rendent invisible dans le temps que suivant la periode ordinaire elle devroit paroître plus belle.

Quoiqu'après un grand nombre de révolutions l'Etoile retourne à la même phase dans le même mois de l'année,

cela n'arrive pas si précisément que dans un retour à l'autre il n'y ait eu quelque différence. En 1704. au commencement du mois de Mars lorsque nous apperçûmes cette Etoile, elle paroissoit déja de la quatriéme grandeur ; au lieu que vers la fin de Mars de 1708. elle n'étoit pas encore visible, ce qui fait voir que ce dernier retour avoit retardé de plus d'un mois l'apparition de 1704.

Les changemens que nous observons dans l'Etoile de l'Hydre, & dans celles du Cigne & de la Baleine, peuvent servir à expliquer des observations anciennes de quelques Etoiles qu'on rapporte avoir paru en differens temps.

Leovicius dit qu'on trouve dans les Histoires qu'en 945. du temps d'Oton premier Empereur, on observa dans la Constellation de Cassiopée une nouvelle Etoile semblable à celle qui parut de son temps en 1572. & qui est si celebre par les observations & les écrits de tant d'Astronomes. Il ajoûte qu'on trouve un témoignage encore plus autentique, qu'en 1264. on vit dans la partie Septentrionale du Ciel autour de la Constellation de Cassiopée, une Etoile grande & luisante sans chevelure, & qui n'avoit point de mouvement propre. Reisarcherus qui ne doute point de la verité de ces observations, est porté à croire que l'Etoile qui parut dans le treiziéme siecle, est la même que la celebre de l'an 1572. qui parut de son temps, & il est du sentiment de ceux qui supposent que l'Etoile de Cassiopée n'est pas nouvelle, mais qu'elle étoit aussi ancienne que les autres, & qu'elle se faisoit voir de temps en temps, & disparoissoit dans la suite.

Tycho n'est pas du sentiment que l'Etoile ait paru plusieurs fois : Une des raisons qu'il apporte est qu'on auroit observé plusieurs retours de cette Etoile depuis tant de siecles, si elle avoit été aussi ancienne qu'on la suppose. Il dit aussi qu'on auroit pû voir plusieurs fois cette apparition & occultation en quelques autres Etoiles. Mais ce qui ne s'étoit pas encore apperçû du temps de Tycho paroît présentement tous les ans, & si ce grand Astronome

avoit eu comme nous l'exemple de ces Etoiles qui changent de grandeur apparente, & qui paroiſſent & diſparoiſſent, peut-être qu'il auroit été plus porté à ſuivre ce ſentiment, & à croire que l'Etoile de Caſſiopée pouvoit avoir paru en d'autres temps, & ſe rendre encore viſible.

Cuſpinien rapporte que l'an 339. de J. C. il parut une Etoile de la grandeur de Venus dans la Conſtellation du Cigne, qui diſparut trois ſemaines après. C'eſt auſſi dans la même Conſtellation qu'on a vû le ſiecle paſſé paroître & diſparoître deux fois les celebres Etoiles de la poitrine & du bec, outre celle qui varie tous les ans dans le col de la même Conſtellation du Cigne.

On obſerve depuis quelque temps un grand nombre d'autres Etoiles qui ſont ſujettes à des changemens, quoiqu'on ne ſçache point encore ſi ces changemens ont des periodes réglées. Outre celles dont nous avons déja parlé à l'Academie, nous en avons remarqué d'autres depuis, dont nous répeterons ici les plus conſiderables.

On ne voit point l'Etoile de la ſixiéme grandeur que Bayer marque dans la poitrine du Lion par la lettre (*i*).

Immédiatement au-deſſous de la main auſtrale de la Vierge, Bayer place deux Etoiles, une de la cinquiéme grandeur, l'autre de la ſixiéme. Celle de la cinquiéme grandeur ſe trouve dans le même état; mais on ne voit plus même avec la Lunete celle de la ſixiéme grandeur, qui étoit un degré plus Méridionale.

Riccioli donne la ſituation d'une Etoile de la ſixiéme grandeur, qui la place dans la cuiſſe boreale de la Vierge. Elle n'avoit point été marquée par Bayer, & elle ne paroît plus préſentement.

On ne diſtingüe plus depuis quelques années aucun veſtige de l'Etoile de la ſixiéme grandeur, que Bayer avoit marqué dans la Balance Occidentale au 12. degré, & un tiers du Scorpion avec une latitude Septentrionale de trois degrés.

Tycho & Bayer avoient trouvé une Etoile de la quatriéme

triéme grandeur dans le baſſin Oriental de la Balance. Hevelius ne la marque point, & dit qu'elle avoit diſparu ; cependant nous l'avons apperçûë depuis près de 15. ans, moindre à la verité que Tycho & Bayer ne l'avoient trouvée, mais plus belle que les deux plus prochaines qu'Hevelius marque un degré & demi plus à l'Occident.

L'Etoile de la quatriéme grandeur que M. Caſſini découvrit proche de la Conſtellation du Liévre, paroît encore dans le même état.

M. Caſſini & M. Halley avoient obſervé que l'Etoile de la troiſiéme grandeur qui eſt dans la cuiſſe poſtérieure du Sagitaire avoit diſparu. Quoique nous l'ayons cherchée pluſieurs fois, nous n'avons pû l'appercevoir que depuis dix ans qu'elle paroît à la vûë ſimple de la ſixiéme grandeur ; & étant vûë avec la Lunete, elle eſt compoſée de deux Etoiles éloignées entr'elles de 35. minutes en latitude.

On pourra verifier dans la ſuite des temps ſi ces changemens & ceux que l'on obſerve depuis pluſieurs années dans un grand nombre d'Etoiles fixes, ont quelque periode réglée. On pourra auſſi remarquer s'il n'y a point d'autres Etoiles ſujettes à des variations.

Il ſeroit neceſſaire d'avoir des Cartes celeſtes faites ſur des nouvelles obſervations, où toutes les Etoiles viſibles à la vûë ſimples fuſſent marquées. Il faudroit comparer ſouvent ces Cartes avec le Ciel, reconnoître chaque Etoile en particulier, & en marquer la conformité ou la différence.

Il y a apparence que l'Etoile de l'Hydre a toûjours eu les mêmes changemens qu'on y obſerve préſentement. On peut dire la même choſe des Etoiles de la Baleine & du Cigne. Cependant le grand nombre de ſiecles qui ſe ſont paſſez avant qu'on les ait apperçûs nonobſtant les obſervations de tant d'Aſtronomes, fait aſſez voir la difficulté de les découvrir.

REFLEXIONS ET EXPERIENCES SUR LE SUBLIMÉ CORROSIF.

PAR M. LEMERY.

1709. 13. Février.

LA méthode ordinaire de préparer le Sublimé corrosif eſt, comme tout le monde le ſçait, de faire un mélange exact de parties égales de mercure, de vitriol deſſeché, & de ſel décrepité : de pouſſer le mélange par le feu dans un matras, juſqu'à ce qu'il ſe ſoit élevé une belle matiere très-blanche & très-criſtaline, qui eſt le Sublimé corroſif.

Le mercure de lui - même n'eſt point corroſif, il faut que le Sublimé ait pris ſa corroſion des pointes acides du ſel & du vitriol qui s'y ſont attachées. Ces pointes pour bien exercer leur corroſion, doivent s'être attachées autour de chacune des petites boules du mercure, & former comme autant de petits heriſſons, qui excitez par la chaleur de la chair où ils ont été portez, roulent & déchirent ce qu'ils rencontrent.

Il me ſemble donc indubitable que la corroſion du Sublimé ordinaire vient des acides du ſel & du vitriol ; je crois l'avoir démontré dans mon cours de Chimie : Mais il y a pluſieurs années qu'en travaillant ſur le mercure, je m'apperçûs qu'on pouvoit faire du Sublimé corroſif avec du mercure & du ſel ſeul, ſans y ajoûter de vitriol. Je n'eus pas le temps alors de faire toutes les experiences neceſſaires pour reconnoître les différences que ce Sublimé pourroit avoir avec le commun ; mais j'ai trouvé à propos préſentement d'y travailler, & pour cet effet j'ay commencé par la préparation du Sublimé corroſif ſans vitriol.

J'ay mêlé exactement quatre onces de mercure crud avec huit onces de sel décrepité & bien pulverisé : j'ay mis le mélange dans un matras, & je l'ay poussé par un feu de charbon assez fort pendant quatre heures, il s'y est fait un Sublimé : j'ay laissé réfroidir les vaisseaux, & je l'ay séparé du matras en le cassant : le Sublimé pesoit quatre onces, il étoit plus matte & moins blanc que le commun, il n'y paroissoit aucunes aiguilles, & il approchoit plus en figure du Sublimé doux, que du Sublimé corrosif, il étoit aussi moins volatil; car il ne s'élevoit point si fort au nez, & ne faisoit point éternuer comme l'autre quand on le remuoit : d'ailleurs pour son action sur les chairs, il m'a paru un peu moins corrosif que le commun, & il n'y a point fait une si grande douleur : la raison en est apparemment, parce qu'étant privé de l'acide sulphureux du vitriol, ses parties ont moins de mouvement & d'activité.

La masse restée au fond du matras étoit dure, compacte, pesante, de couleur rougeâtre. J'ai fait sur ce Sublimé préparé sans vitriol les experiences qu'on fait sur l'autre : j'y ay mis une goutte d'huile de tartre, il a jauni d'abord : j'en ay fait dissoudre dans de l'eau, & j'ay divisé la dissolution en plusieurs portions : sur une j'ay versé un peu d'esprit de sel armoniac volatil, il s'est fait du précipité blanc : sur une autre j'ay versé de l'huile de tartre, il s'y est fait du précipité rouge. J'ai divisé cette derniere liqueur en deux portions : sur une j'ay versé de l'esprit de sel armoniac, le précipité qui étoit d'un rouge orangé est devenu blanc : sur l'autre j'ai versé de l'eau-forte, le précipité a disparu parce qu'il a été dissous, & la liqueur est redevenuë claire & transparente comme elle étoit avant les précipitations : j'ay fait aussi de l'eau jaune ou phagedenique, en mêlant un peu de ce Sublimé corrosif avec de l'eau de chaux.

J'ay mis en distilation un mélange de deux onces de ce Sublimé avec une once & demie d'antimoine ordinaire, j'en ay retiré par un petit feu cinq dragmes d'un

beure d'antimoine plus condensé & plus dur que le commun : j'en ay fait dissoudre une partie dans de l'esprit de nitre, il s'y est fait une grande ébulition, & j'en ay fait un bezoard mineral semblable au commun.

J'ay mis tremper l'autre partie de ce beure d'antimoine dans de l'eau tiede, il s'y est fait une poudre d'Algaroth bien blanche, & la lotion a été aussi acide que l'esprit de vitriol philosophique ordinaire : je n'ay pas pû même distinguer entre les deux aucune difference pour le goût.

J'ay fait dulcifier une autre partie de mon Sublimé fait avec le mercure & le sel seul sans vitriol : j'ay pulverisé ce Sublimé dans un mortier de verre, & j'y ay voulu incorporer ou faire recevoir les trois quarts de son poids de mercure crud, comme on a coûtume de faire quand on veut préparer le Sublimé doux ordinaire ; mais il n'a pû en prendre guére davantage que la moitié de son poids, le reste est demeuré coulant, ou s'est séparé dans les sublimations, ce qui vient apparemment de ce que ce Sublimé ne contient pas tant d'acides que l'autre ; car ce sont les acides qui envelopent le mercure crud en cette occasion, & qui le rendent en poudre grise. Quoiqu'il en soit, j'ay saoulé mon Sublimé de mercure, & je l'ay fait sublimer trois fois dans des matras, j'ai eu un Sublimé fort doux & semblable au commun, excepté qu'il est un peu moins blanc. Il a été aussi bien adouci par une médiocre quantité de mercure crud qu'il a prise ou absorbée, que le Sublimé corrosif ordinaire l'est par une plus grande, parce qu'il en a reçû autant qu'il en pouvoit contenir ; car c'est cette addition de mercure qui fait la dulcification du Sublimé.

J'ay trouvé au fonds du matras après chaque sublimation, une petite quantité de matiere légere rougeâtre salée ; ce n'étoit qu'une portion de sel marin que le Sublimé corrosif avoit élevée avec lui, & qui s'est séparée.

Selon ces experiences il semble assez inutile d'emploïer le vitriol dans la composition du Sublimé, puisqu'on en

fait bien avec le ſel & le mercure ſeuls, & que ce Sublimé réüſſit à toutes les operations qu'on fait ſur l'autre : mais quand on a beſoin particulierement d'une forte corroſion dans le Sublimé, il vaut mieux le faire en la maniere ordinaire.

J'ay voulu voir par curioſité ſi le ſel reſté au fond du matras après la ſublimation du Sublimé corroſif, telle que je viens de la décrire, ſeroit encore capable de ſervir à faire d'autre Sublimé : mais auparavant que de proceder à cette experience, j'ay purifié ce ſel par la maniere ordinaire, qui eſt la diſſolution, la filtration & la criſtaliſation : on en a ſéparé beaucoup de terre, il a parû étant criſtaliſé ſemblable au ſel marin, de la même figure & du même goût. Je l'ay calciné, le jettant peu à peu dans un creuſet rougi au feu, il n'a fait aucun petillement ni décrepitation. Il n'a point été alkali avec l'eſprit de vitriol, mais il a boüillonné comme le ſel marin ordinaire avec l'huile de vitriol. J'ai mêlé trois onces de ce ſel bien pulveriſé dans un mortier de verre avec une once & demie de mercure crud, remuant exactment le mélange juſqu'à ce qu'il ne parût plus aucunes boulettes du vif-argent : j'ay eu une poudre griſe brune que j'ay miſe dans un matras, & que j'ay eſſayé de faire ſublimer par un grand feu comme la précedente; mais il n'eſt monté qu'un peu de poudre noirâtre mêlée avec des petites boules de vif-argent, & tant ſoit peu d'une matiere blanche qui ne m'a point parû aſſez âcre pour être appellée Sublimé corroſif. Le ſel qui eſt demeuré au fond du matras étoit d'un blanc griſâtre.

Je conclus de cette derniere experience que le ſel qui a une fois ſervi à la préparation du Sublimé, n'eſt plus en état de ſervir à en faire d'autre. La raiſon qu'on en peut donner, & qui me ſemble probable, eſt que les acides les plus volatils & les plus aiſez à détacher de la maſſe du ſel ayant été mêlez & enlevez avec le mercure dans la premiere ſublimation, il n'en reſte plus aſſez pour une ſeconde, ou bien ceux qui y reſtent ſont trop peſants pour

être acrochez avec le mercure. Quoiqu'un pareil raisonnement m'eût fait prédire avant l'operation ce qui arriveroit, je n'ay pas laissé de faire l'experience afin d'être plus assuré du fait; car les raisonnemens seuls trompent souvent.

Pendant que j'étois sur cette matiere j'ay pris occasion de faire sublimer une préparation de mercure, qui approche en composition du Sublimé dont je viens de parler, car elle est principalement composé de mercure & de sel; c'est le Précipité blanc, qui a été précipité par de l'eau salée en la maniere ordinaire. Il est à remarquer qu'encore qu'on ait bien lavé ce Précipité avec de l'eau douce après l'avoir séparé de l'eau-forte, il a retenu toûjours une portion des sels avec lesquels on a fait la précipitation, ce que j'ay prouvé ailleurs : ainsi ce Précipité blanc tient envelopée une portion de sel marin, qui lui donne une disposition propre à être Sublimé en la maniere du Sublimé doux.

J'ay donc mis sublimer dans un petit matras au feu de sable, deux onces de mercure précipité blanc, il s'est élevé avec facilité, & j'ay eu un Sublimé doux par cette seule sublimation: mais pour l'adoucir encore davantage, j'en ay fait une seconde : j'ay cassé le vaisseau, & j'ay remis la matiere sublimer comme devant dans un autre matras, j'ay eu un Sublimé fort doux semblable au commun, & qui n'a rien retenu de la qualité vomitive du Précipité blanc. Il a pesé une once cinq dragmes & demie, & il s'est séparé dans les deux sublimations au fond des matras une poudre légere, jaune, salée, pesant une dragme : il ne s'est donc dissipé qu'une dragme & demie de la matiere dans toute l'operation. La poudre légere qui étoit tombée au fond du matras provenoit du sel qui étoit demeuré dans le Précipité blanc; c'étoit apparemment ce sel qui contribuoit à exciter son action vomitive, puisqu'étant détaché, le mercure n'a plus été vomitif.

Comme il est démontré que le Sublimé corrosif peut être préparé avec le sel seul sans vitriol, on pourroit soup-

çonner qu'il s'en pourroit faire auſſi avec le vitriol & le mercure ſeuls ſans addition de ſel. J'en ay tenté l'experience, j'ai mêlé exactement dans un mortier de marbre quatre onces de mercure avec hnit onces de vitriol bien deſſeché en blancheur : j'ay mis le mélange dans un matras, & je l'ay pouſſé par un grand feu de charbon en la maniere ordinaire, & même plus long-temps, car j'y ay employé ſept ou huit heures : il ne s'en eſt élevé qu'une très-petite quantité de fleurs jaunâtres qui ont tapiſſé le haut du matras, & qui ne procedoit que de la partie ſulfureuſe du vitriol. Il m'eſt demeuré au fond du vaiſſeau une maſſe peſante rouge comme du Colcothar ordinaire ; elle contient encore le mercure que j'y avois mis, je le revivifieray quand je voudray. Il me paroît donc impoſſible de faire du Sublimé corroſif avec du vitriol & du mercure ſeuls.

DE LA PROPORTION

Que doivent avoir les Cilindres pour former par leurs ſons les accords de la Muſique.

PAR M. CARRE'.

PROPOSITION GENERALE.

LEs Cilindres pleins ou ſolides dont les ſons forment des accords de la Muſique, ſont en raiſon triplée & inverſe de celle des nombres qui expriment ces accords. 1709. 16. Février.

Soient par exemple deux Cilindres, dont les diametres des baſes & les longueurs ſoient comme 3. à 2. il eſt clair que leurs ſoliditez ſeront dans la raiſon de 27. à 8. qui eſt la raiſon triplée de 3. à 2. Je dis que les ſons de ces deux Cilindres formeront la Quinte qui s'exprime par ces deux nombres, & que le plus gros & le plus long ſera le ſon

grave, & le plus petit fera le son aigu. Il en est ainsi des autres.

Ce n'est que par l'experience & en tâtonnant que j'ay découvert ce rapport, qui est fort éloigné de celui que gardent les cordes entr'elles pour faire les accords de la Musique. Ce qui m'a donné occasion de le chercher, c'est que je suis dans ce sentiment, que la cause immédiate du son se tire des tremblemens de chaque petite partie dont les cordes sont composées, & du mouvement d'ondulation de la partie frappée jusqu'aux extrémitez de ces cordes; & que leurs vibrations totales ne servent qu'à augmenter la force du son & sa durée, ainsi que je croi l'avoir prouvé dans le Traité du Son que j'ai lû à l'Academie. Or considerant que la tension des cordes doit faire beaucoup de changement dans les tremblemens de leurs parties ou dans leurs sons, il me paroissoit que les Cilindres, qui n'étoient pas susceptibles de cette tension, ne devoient pas garder le même rapport entr'eux pour former les mêmes accords que les cordes. J'ay donc fait faire avec le plus d'exactitude qu'il m'a été possible, plusieurs Cilindres qui gardent des rapports réglez tant dans leurs grosseurs que dans leurs longueurs, & après en avoir fait plusieurs experiences, j'ay toûjours trouvé que lorsque leurs soliditez étoient dans le rapport proposé, ils formoient assez exactement les accords de la Musique : ce qui s'accorde avec le raisonnement, comme on le va voir. Mais auparavant il est bon de remarquer qu'il y a plusieurs manieres de faire des Cilindres dont les soliditez soient en raison triplée. Car, par exemple, si l'on veut faire que deux Cilindres soient en raison triplée de 3 à 2. 1°. L'on peut faire les diametres de leurs bases comme $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, & leurs longueurs comme 9 à 4; donc leurs soliditez seront comme 27 à 8; d'où l'on voit que leurs surfaces seront en raison composée de $\sqrt{3} \times 9$ à $\sqrt{2} \times 4$ ou comme $\sqrt{243}$ à $\sqrt{32}$, qui est un rapport incommensurable. 2°. Si leurs bases sont égales, & que leurs longueurs soient comme 27 & 8, qui sera aussi le rapport de leurs surfaces.

3°. Si

3°. Si leurs longueurs étant égales, les diametres de leurs bases sont comme $\sqrt{27}$ à $\sqrt{8}$, qui sera aussi le rapport de leurs surfaces, qui est encore incommensurable. 4°. Enfin si les diametres de leurs bases & leurs longueurs sont dans la raison de 3 à 2; donc leurs surfaces seront comme 9 à 4. Or comme il n'y a que les Cilindres qui sont dans ce dernier rapport qui forment des accords justes, on peut prendre pour regle generale que leurs surfaces doivent être dans la raison doublée & inverse des sons, & leurs longueurs dans la raison simple de ces mêmes sons.

Afin donc de prouver par le raisonnement cette Proposition generale, je considere que le *grave* & *l'aigu* des sons dans les corps de même matiere, se tire du mouvement d'ondulation qui se fait dans toute la surface du corps sonore, comme je croi l'avoir fait voir clairement dans mon Traité du Son: D'où il semble d'abord que les Cilindres de même grosseur, & doubles en longueur devroient faire l'Octave, c'est-à-dire qu'il devroit y avoir dans le petit deux mouvemens d'ondulation, tandis qu'il n'y en a qu'un dans le grand, puisqu'il faut une fois plus de tems pour parcourir la longueur du grand, que pour parcourir celle du petit: mais si l'on considere que ce n'est pas seulement à la longueur des Cilindres qu'il faut avoir égard, pour juger des sons qu'ils doivent rendre, mais aussi à leur grosseur; l'on verra que cela ne doit pas arriver: car quand on frappe une partie dans la surface d'un Cilindre, le mouvement qu'on lui imprime se communique non-seulement en longueur jusqu'aux extremitez de ce Cilindre, mais aussi en parcourant circulairement toute la surface, comme l'experience le fait connoître, puisque si l'on suspend horizontalement un Cilindre par le moïen de deux épingles mises à ses extremitez, & qu'on pose de petits morceaux de papiers sur differens endroits de sa surface, on les verra trembler tres-sensiblement, dans quelque point qu'on frappe le Cilindre: ce qui confirme le sentiment que l'on a, que ce ne sont pas

les vibrations totales des corps ſonores qui ſont la cauſe immediate du ſon, mais les tremblemens de leurs petites parties, & le mouvement d'ondulation. Il faut donc que les circonferences de deux Cilindres qui forment un accord de Muſique ſoient dans le même rapport que leurs longueurs, afin que leurs ondulations ſe faſſent dans le même tems, autrement l'ordre des tremblemens ou ſons ſeroit troublé. C'eſt ce qui arrive par exemple lorſque les Cilindres ſont de même groſſeur & de longueur inégale: car alors les ondulations circulaires ſe font en tems égal, & celles qui ſe font ſuivant la longueur, s'achevent dans des tems qui ſont comme les longueurs : Il en eſt de même des Cilindres égaux en longueur, mais dont les diametres ſont inégaux; puiſque les ondulations ſuivant la longueur ſe font en tems égal, & que les circulaires ſe font dans des tems qui ſont comme les circonferences ; ainſi ces tremblemens ne s'accordant pas, l'ordre des ſons doit être troublé. Il eſt donc évident qu'afin que les Cilindres faſſent les accords de la Muſique, il faut que leurs ſoliditez gardent le rapport propoſé. *Ce qu'il falloit prouver.*

L'on pourroit demander ici pourquoi les cordes qui forment des accords, ne ſont pas dans le même rapport que les Cilindres, puiſqu'elles ſont elles-mêmes de petits Cilindres : Mais la réponſe eſt facile; c'eſt que pour faire ſonner les cordes, il faut les bander; ce qui cauſe de grands changemens dans leurs tremblemens & ondulations : car non-ſeulement cela rend ces tremblemens plus prompts, parce que leurs parties ſont plus en reſſort; mais auſſi en les ſonnant, on leur fait faire des vibrations totales qui ne ſe rencontrent pas dans les Cilindres, ce qui doit encore faire beaucoup de changemens dans leurs ſons. A quoi l'on pourroit ajoûter que le diametre des cordes eſt ſi petit par rapport à leur longueur, que l'oreille ne ſçauroit s'appercevoir de cette difference qui ſe trouve dans les Cilindres : & peut-être que le ſon ſeroit beaucoup plus beau, ſi les cordes qui forment des ac-

cords avoient leurs diametres ou circonferences dans la raiſon de leurs longueurs.

D'où il faut conclure que l'on ne doit point comparer les cordes aux Cilindres, puiſqu'ils ne ſont point ſuſceptibles d'extenſion ; & afin de connoître ſi l'on en doit faire quelque comparaiſon, il m'a paru, après avoir examiné les ſept differentes manieres dont deux cordes peuvent ſe combiner pour faire un accord de la Muſique par rapport à leur longueur, groſſeur & tenſion, & dont je donne des démonſtrations dans mon Traité des cordes ; il m'a paru, dis-je, que ce ne doit être qu'entre celles qui ſont de même groſſeur ou de même diametre, parce qu'étant bandées par des poids ou des forces égales, elles doivent avoir leurs longueurs dans le rapport des nombres qui expriment l'accord qu'elles forment, & que ce rapport eſt le plus ſimple. Et ſi l'on vouloit ſçavoir à peu près les changemens que la tenſion peut apporter aux ſons des cordes, il faudroit prendre la plus groſſe corde de métal qui ſe puiſſe faire, & la bander ſeulement juſqu'à ce qu'elle rende un ſon dont on puiſſe juger : enſuite faire un Cilindre de même métal, & d'égale longueur & groſſeur, & voir quel eſt l'accord qu'ils forment enſemble. mais cela ſeroit difficile à exécuter, parce que le Cilindre ſeroit d'un ſi petit diametre, qu'on auroit de la peine à juger du ſon qu'il rendroit.

Ces raiſonnemens ſont confirmez par les expériences ſuivantes. Je ne me ſuis pas contenté de mon oreille, n'étant pas aſſez exercé dans ces ſortes de matieres ; mais je les ai faites avec M. Blanchet Facteur de Clavecin & d'Epinettes, qui paſſe pour un de ceux qui accorde le mieux ces ſortes d'Inſtrumens.

I. J'ai fait faire quatre Cilindres de bois de Heſtre *A*, *B*, *C*, *D* pris du même morceau, & qui ne different qu'en longueur ; car les diametres de leurs baſes ſont de 15 lignes chrcun, & leurs longueurs ſont entr'elles comme ces nombres 4, 3, 2, 1 ; c'eſt à dire que *A* eſt de quatre pieds, *B* de trois, *C*, de deux, & *D* d'un pied de long. Or

ſi les rapports des ſons de ces Cilindres étoient les mêmes que ceux des cordes : qui gardent la raiſon inverſe des longueurs, *A* & *B* feroient la Quarte ; *B* & *C* la Quinte ; *C* & *D* ou *A* & *C* l'Octave ; *B* & *D* la Douziéme ou la replique de la Quinte ; *A* & *D* la Quinziéme ou la double Octave. Mais voici ce que l'experience a donné.

Aïant accordé un Clavecin, & mis le ſon fondamental au ton ordinaire qui eſt celui de *l'Opera* ; on a ſonné le Cilindre *A*, & l'on a trouvé qu'il étoit à l'uniſſon avec le *G Re Sol* du Clavecin, qui eſt une Quarte plus bas que le *C Sol VT* fondamental de l'accord : Enſuite ſonnant le Cilindre *B*, on a trouvé qu'il étoit à l'uniſſon de la touche ou corde *A Mi La* en deſſus ; de ſorte que ces deux Cilindres faiſoient entr'eux le ton mineur *SOL LA*, ce qui eſt fort éloigné de la Quarte.

L'on a trouvé le Cilindre *C* à l'uniſſon du *C Sol VT* fondamental ; d'où l'on voit que *A* & *C* faiſoient la Quarte *SOL VT*, & *B* & *C* faiſoient une Tierce mineure *LA VT*.

Pour le Cilindre *D*, on l'a trouvé à l'uniſſon avec la corde *F Vt Fa*, qui eſt la Quarte au-deſſus de l'*VT* fondamental : Donc *A* & *D* font une Septiéme majeure *SOL FA* ; *B* & *D* une Sixte mineure *LA FA* ; & *C* & *D* la Quarte *VT FA*. Et quoique *A* & *C*, *C* & *D* qui ſont dans le même rapport, faſſent la quarte ; on ne voit pas que ces Cilindres gardent aucune regle certaine pour former des accords.

II. J'ai fait trois autres Cilindres *E*, *F*, *G* du même morceau de bois que les quatre premiers, chacun de deux pieds de longueur ; leſquels étant joints au Cilindre *C*, ont leurs groſſeurs en même raiſon que ces nombres 4, 3, 2, 1. Ce qui eſt facile à faire : car ſi l'on prend par exemple le rayon du Cilindre *E* égal à la ſoûtendante du quart de cercle qui ſert de baſe au Cilindre *C*, il eſt clair que la groſſeur du Cilindre *E* ſera double de celle du Cilindre *C*, dont le diametre eſt de 15 lignes : Donc le diametre de *E* eſt d'un pouce neuf lignes, ou de 21 lignes & un peu

plus. Il en eſt ainſi des autres. D'où l'on peut tirer cette concluſion, que ſi le rapport des ſons de ces Cilindres étoit le même que celui des cordes qui ne different que par leurs groſſeurs, ils ne devroient faire aucun accord, puiſque ces ſons ſeroient en raiſon réciproque des diametres, & que les nombres qui expriment ce rapport ſont incommenſurables. Voici ce qu'on a trouvé par l'experience.

Aïant ſonné d'abord le Cilindre *E*, on l'a trouvé à l'uniſſon de la corde *VT dieſe* du ſon fondamental du Clavecin : mais par ce qu'on a dit ci-deſſus, le Cilindre *A* faiſoit la Quarte en deſſous de l'*VT* fondamental, qui eſt un ſon beaucoup plus grave. Donc ces Cilindres font entr'eux la Quinte diminuée, qui eſt un faux accord. Car quoique leurs ſoliditez ſoient en raiſon d'égalité, la longueur de l'un récompenſant la groſſeur de l'autre, leurs ſurfaces ſont incommenſurables. Que ſi l'on compare le Cilindre *E* avec *C* qui étoit à l'uniſſon de l'*VT* fondamental, on trouvera que leurs ſons font un ſemi-ton mineur, qui eſt auſſi un faux accord. Sur quoi l'on peut remarquer que quoique ces deux Cilindres ſoient dans le même rapport que *A* & *C* qui ſont entr'eux comme 2 à 1, ils font cependant des accords fort differens ; mais auſſi les uns different par leurs longueurs ſeulement, & les autres par leurs groſſeurs.

Si l'on compare le Cilindre *E* au Cilindre *B*, on verra qu'ils font le faux accord *LA VT dieſe* en montant, qui differe de pluſieurs tons de celui que *A* & *B* font enſemble, quoiqu'ils ſoient dans le même rapport de 4 à 3 : mais ceux-ci ne different que par leurs longueurs ; au lieu que *E* & *B* different par leurs longueurs & groſſeurs.

Les Cilindres *E* & *D* font encore un faux accord *VT dieſe FA*, qui eſt fort different de la ſeptiéme majeure *SOL FA* que *A* & *D* font enſemble, quoique ces Cilindres ſoient dans le même rapport de 4 à 1. Mais *E* & *D* different par leurs longueurs & groſſeurs ; au lieu que *A* & *D* ne different que par leurs longueurs.

Lon a ensuite sonné le Cilindre *F*, & on l'a trouvé à l'unisson avec la touche *F VT FA diese* distant du son fondamental de l'*VT* au *FA diese* : D'où l'on voit qu'il doit faire avec le Cilindre *A* le faux accord *SOL FA diese* en montant qui est une Septiéme majeure & un Semi-ton; on suppose que l'on commence par le son de *A*. Or ces Cilindres ont leurs soliditez en raison de 4 à 1, parce que le rayon du Cilindre *A* est égal à la sous-tendante du quart de cercle qui sert de base au Cilindre *F*, & ce rapport est le même que celui des Cilindres *A* ou *E* au Cilindre *B*; cependant leurs accords sont fort differens, car on a trouvé que *A* & *D* faisoit une Septiéme majeure *SOL FA*, & *E* & *D* une Tierce & un Semi-ton mineur *VT diese FA* ; mais aussi *A* & *D* ne different que par leurs longueurs, au lieu que *A* & *F*, *E* & *D* different par leurs longueurs & grosseurs.

Si l'on compare le Cilindre *F* avec ceux dont on a parlé, on trouvera, 1°. Qu'il fait avec *B* le faux accord *LA FA diese* qui est une Sixte mineure plus un Semi-ton, ce qui est un peu different de l'accord que *B* & *D* ont fait entr'eux, quoique leurs soliditez soient dans le même rapport de 1 à 3 : mais c'est qu'ils ne different que dans leurs longueurs, au lieu que *F* & *B* different aussi dans leurs grosseurs.

2°. Que ce Cilindre fait *C* avec le faux accord *VT FA diese* qui est une Quarte plus un Semi-ton mineur. Leur rapport qui est de 1 à 2, est le même que celui des Cilindres *C* & *A*, ou *C* & *E*, quoique leurs accords soient assez differens; mais les uns different par leurs grosseurs, au lieu que les autres different par leurs longueurs.

3°. Que ce même Cilindre *F* fait avec *D* un Semi-ton mineur *FA FA diese* : & quoiqu'ils soient dans le même rapport que *E* & *A*, leurs accords sont tres-differens, puisque ces deux derniers font une Quinte diminuée ; ce qui vient des differens rapports qui composent leurs soliditez

4°. Il fait avec *E* une Quarte *VT diese FA diese* : ce qui

eſt encore different des accords de *F* & *A*, de *D* & *A*, & de *D* & *E* qui ſont dans le même rapport de 1 à 4 que *F* & *E*, dont la raiſon eſt la même que ci-deſſus.

L'on a enfin ſonné le Cilindre *G* qui eſt au Cilindre *F* comme 1 à 2, parce que le rayon du Cilindre *F* eſt égal à la ſoûtendante du quart de cercle qui ſert de baſe à *G*, & on a trouvé qu'il étoit à l'uniſſon avec le *SOL dieſe* du Clavecin au-deſſus de l'*VT* fondamental : Donc ces deux Cilindres *F*, *G* font un ton *FA dieſe SOL dieſe* ; & cet accord eſt fort different de ceux que font entr'eux *A*, *C* ; *C*, *F* ; *E*, *C* qui ſont dans le même rapport de 2 à 1.

D'où l'on voit, 1°. Que *A* & *G* font l'accord *SOL SOL dieſe* qui eſt plus d'une Octave, qui devroit ſe trouver juſte, puiſqu'ils ſont dans le rapport exprimé dans la Propoſition générale ; mais il y a des cas où il eſt bien difficile de déterminer exactement les ſons des Cilindres, ſur tout lorſqu'ils ſont fort longs, comme *A*.

2°. Que *E* & *G* qui ſont dans le rapport de 8 à 1 auſſi-bien que les deux precedens, font l'accord *VT dieſe SOL dieſe* qui eſt une Quinte, quoique leurs ſurfaces ſoient dans le rapport de $\sqrt{8}$ à 1, qui eſt incommenſurable.

3°. Que *B* & *G* font l'accord *LA SOL dieſe*, qui eſt près d'une Octave. Leurs ſoliditez ſont dans la raiſon de 6 à 1 ; & leurs ſurfaces comme 3 à 1.

4°. Que *G* & *C* qui ſont comme 1 à 4, font l'accord *VT SOL dieſe*. Les Cilindres *F* & *E*, *F* & *A*, *D* & *E*, *D* & *A* font des accords fort differens, quoiqu'ils aïent leurs ſoliditez dans le même rapport.

5°. Que *D* & *G* qui ſont dans le rapport de 2 à 1, font l'accord de *FA SOL dieſe*, qui eſt encore different de ceux que forment entr'eux les Cilindres *F*, *G* ; *C*, *E* ; *C*, *A* ; *G*, *F*, quoiqu'ils ſoient auſſi dans le même rapport.

III. J'ai fait faire cinq autres Cilindres *H*, *I*, *K*, *L*, *M* de bois de Meriſier qui eſt un des plus ſonores, dont le premier *H* a pour baſe un cercle de 16 lignes de diametre, & qui a 16 pouces de longueur. Le ſecond *I* a pour baſe un cercle de 12 lignes de diametre, & ſa longueur eſt de 12 pouces, Le troiſiéme *K* a pour baſe un cercle de 10 lignes $\frac{2}{3}$ de

diametre, & il a de longueur 10 pouces $\frac{2}{3}$ Le quatriéme a 8 lignes de diametre, & 8 pouces de long. Le cinquiéme *M* a le même diametre que le Cilindre *I*, mais sa longueur est de 24 pouces. Ces choses étant ainsi posées,

Il est évident, 1°. Que si l'on compare le Cilindre *H* avec le Cilindre *L*, on trouvera que leurs soliditez sont entr'elles comme 8 à 1 : car leurs diametres étant comme 16 à 8 ou 2 à 1, aussi-bien que leurs longueurs, leurs bases & leurs surfaces, seront comme 4 à 1. Or la raison de 8 à 1 est triplée de celle de 2 à 1, qui est le rapport des sons de l'Octave; donc par la Proposition générale ces Cilindres doivent faire l'Octave. Ayant donc sonné les Cilindres *H* & *L*, on les a trouvez l'un à l'unisson du *Sol* qui est la Quinte du *C Sol VT* fondamental, & l'autre à l'unisson du *Sol* en dessus; donc, &c.

2°. Que le Cilindre *H* est au Cilindre *K* comme 27 est à 8 : car leurs diametres & leurs longueurs étant comme 16 à 10 $\frac{2}{3}$ ou 3 à 2, donc leurs bases & leurs surfaces seront comme 9 à 4. Or comme 27 à 8 est la raison triplée de 3 à 2 qui exprime la Quinte, donc ces Cilindres doivent former cet accord. En effet aïant sonné *K*, on la trouvé à l'unisson avec la touche *D La Re*, ce qui fait la Quinte avec le *G Re Sol* qui étoit le son du Cilindre *H*. Il faut cependant remarquer que cette Quinte differe de la veritable d'un comma, ce qui est peu de chose, surtout dans l'accord du Clavecin.

3°. Que le Cilindre *H* est au Cilindre *I* comme 64 à 27, puisqu'ils ont les diametres de leurs bases & leurs longueurs comme 16 à 12 ou 4 à 3. Donc leurs sons doivent être à la Quarte qui s'expriment par ces nombres $\frac{3}{4}$. C'est ce que l'experience a donné; car le son du Cilindre *I* faisoit l'Octave de l'*VT* fondamental, ce qui fait la quarte avec le *G Re Sol* du Cilindre *H*.

4°. Si l'on compare les Cilindres *I* & *L*, on verra qu'ils doivent encore faire la Quinte, puisqu'aïant leurs diametres & leurs longueurs comme 3 à 2, leurs soliditez sont comme 27 à 8. C'est aussi ce qui arrive, car le Cilindre *L*

sonne

ſonne le *G Re Sol* en deſſus du *C Sol Vt* du Cilindre *I*.

Il eſt évident, 5°. Que les Cilindres *K* & *L* doivent faire la Quarte ; car aïant leurs diametres & leurs longueurs comme $10\frac{2}{3}$ à 8 ou 4 à 3, ils ſont entr'eux comme 64 à 27 : ce qui eſt viſible, puiſque *RE SOL* qui marquent leurs ſons, font une Quarte plus un comma.

6°. Que *I* & *K* doivent faire le ton majeur $\frac{8}{9}$: car aïant leurs diametres & leurs longueurs dans la raiſon de 12 à $10\frac{2}{3}$ ou de 9 à 8 ; donc leurs ſoliditez ſeront en raiſon triplée de ces nombres ou comme 729 à 512. C'eſt auſſi ce que leurs ſons *VT RE* expriment.

L'on a enſuite ſonné le Cilindre *M*, & on a trouvé qu'il faiſoit la Quinte avec le ſon fondamental du Clavecin. Donc ſi on le compare avec le Cilindre *I*, on trouvera qu'ils font une Quarte : ce qui s'accorde fort bien avec les experiences des premiers Cilindres, puiſque *A* & *C*, *C* & *D* qui ſont préciſément dans le même rapport de 2 à 1, font auſſi une Quarte. D'où l'on voit que *M* fait l'uniſſon avec le Cilindre *H*, quoiqu'ils aïent leurs ſoliditez dans la raiſon de 27 à 32 ; car leurs baſes ſont comme 9 à 15, & leurs longueurs comme 3 à 2 ; donc leurs ſurfaces ſont comme 9 à 8. Ils devroient cependant faire un faux accord ; mais apparemment que la groſſeur de l'un recompenſe la longueur de l'autre. Que ſi l'on veut comparer ce même Cilindre *M* avec *K* ou *L*, on verra qu'il fait avec le premier une Quinte moins un comma, & avec le ſecond une Octave ; cependant *M* eſt à *K* comme 729 à 256, qui eſt la raiſon compoſée des baſes qui ſont comme 81 à 64, & des longueurs qui ſont comme 9 à 4. Et eſt à *L* comme 27 à 4, puiſque les baſes ſont comme 9 à 4, & les longueurs comme 3 à 1.

IV. J'ai encore fait faire quatre Parallelepipedes *N*, *O*, *P*, *Q* du même bois de Meriſier, & qui ont pour baſes des quarrez, qui ſont dans les rapports ſuivans.

1°. Le ſolide *P* a pour ſa baſe un quarré dont le côté eſt de 6 lignes, & le ſolide *O* a pour côté de ſa baſe la diagonale de la baſe de *P*, qui eſt égale à $\sqrt{72}$, ou à $6\sqrt{2}$;

ils ont chacun 16 pouces de longueur, donc ils sont entr'eux comme leurs bases, c'est à dire comme 2 à 1. Aïant sonné ces deux Parallelepipedes, on a jugé que *O* faisoit l'unisson avec la corde *FA diese* qui est à la Quarte plus un Semi-ton en dessus de l'*VT* fondamental, & que *P* faisoit l'Octave avec ce même *VT*; d'où l'on voit que ces deux solides font un faux accord *FA diese VT*.

2°. Le solide *Q* a la même base que *P*, mais sa longueur n'est que de 8 pouces; donc ils sont entr'eux comme 2 à 1. Sonnant donc le solide *Q*, on l'a trouvé à l'unisson du *FA*, qui est éloigné de onze tons du son fondamental; donc ces deux solides *P* & *Q* font une Quarte *VT FA*; ce qui s'accorde fort bien avec ce que l'on a trouvé dans les Cilindres qui avoient ce même rapport. Que si l'on compare le solide *O* avec le solide *Q*, on verra qu'ils font encore un faux accord *FA diese FA* qui est une Octave moins un Semi-ton: dont la raison est que quoique leurs soliditez soient dans le rapport de 4 à 1, leurs surfaces sont incommensurables.

3°. Le Parallelepipede *N* a pour base un quarré quadruple de celui du solide *P* ou *Q*, & sa longueur est de 16 pouces, qui est la même que celle de *P*. Donc *N* est à *Q* comme 8 à 1, qui est la raison triplée de 2 à 1. Donc ces deux solides doivent faire l'Octave, puisque leurs bases & leurs surfaces sont comme 4 à 1; & leurs longueurs comme 2 à 1. En effet aïant sonné *N*, on l'a trouvé à l'unisson du *Fa* qui est à la Quarte de l'*VT* fondamental, mais *Q* sonne le *Fa* en dessus; donc, &c.

Si l'on compare le solide *N* aux solides *O* & *P*, on verra qu'il fait ave le premier un Semi-ton mineur *FA FA diese*, & avec le second une Quinte *FA VT*. Or *N* est à *O* comme 2 est à 1, car leurs longueurs sont égales, & leurs basescomme 2 à 1; donc &c. Et *N* est à *P* comme 4 à 1, qui est aussi le rapport de *O* à *Q*, quoique leurs accords soient differens; ce qui vient de ce que ces deux derniers different en longueur & grosseur, au lieu que *N* & *P* different en grosseur seulement.

D'où l'on peut conclure que les Parallelepipedes ne gardent aucune regle pour faire les accords de la Musique, à moins qu'ils ne ſoient dans la même raiſon triplée que celle des Cilindres, dont la cauſe eſt la même.

Il eſt bon de remarquer que quoique le Cilindre *H* qui eſt de même longueur que le Parallelepipede *N*, ait ſa ſurface plus grande, aïant le diametre de ſa baſe égal à la diagonale de la baſe du ſolide *N*, il rend néanmoins un ſon plus aigu d'un ton entier que le Parallelepipede. Il en eſt précisément de même du Cilindre *L*, & du Parallelepide *Q*; d'où l'on doit conclure que le mouvement d'ondulation ſe fait plus promptement dans les Cilindres que dans les Parallepipedes.

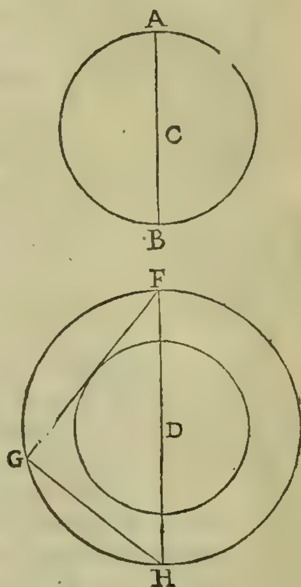
Il ſeroit maintenant à ſouhaiter que ces Inſtrumens qu'on nomme *Claquebois* ou *Orgues de Barbarie* fuſſent plus agreables, puiſque l'on peut par le moïen de cette Propoſition générale en fabriquer dans toute l'exactitude & la perfection poſſible, autant néanmoins que la matiere le peut permettre.

Mais afin de pouſſer cette matiere plus loin, il faudroit avoir des Cilindres de differens métaux, afin de connoître ſi cette raiſon triplée eſt toûjours conſtante, comme il paroît que cela doit être. Il faudroit auſſi en faire de creux, en forme de tuyaux, qui fuſſent tels, qu'étant de même longueur que les pleins, ils fuſſent compoſez d'une égale quantité de matiere, & déterminer le rapport de leurs ſons tant entr'eux qu'entre les pleins & les creux. Ce qui pourroit ſervir non-ſeulement à éclaircir cette matiere, mais encore celle du ſon en général, qui eſt environnée de beaucoup de difficultez, auſſi bien que la plûpart des Queſtions les plus curieuſes de la Phyſique. Et comme j'ai deſſein d'en faire des expériences, afin d'y proceder d'une maniere géometrique, j'ai réſolu ces petits Problêmes.

PROBLEME I.

Un Cilindre solide & plein étant donné, trouver un Cilindre creux de même matiere & de même longueur qui contienne ou soit formé par une égale quantité de matiere.

Soit le cercle de la base du premier Cilindre dont le diametre est AB, que j'appelle r, & sa circonference c; que la longueur de ce Cilindre soit $= a$; donc sa solidité sera $= \frac{acr}{4}$. Soit un autre cercle plus grand que le premier, qui a pour diametre la ligne FH, que je nomme s, & qui soit la base du Cilindre que l'on demande; & faisant $rr. ss :: \frac{cr}{4}. \frac{css}{4r}$, ce dernier terme sera la valeur de ce cercle. Nommant donc x le diametre du vuide que l'on cherche, son cercle sera $\frac{cxx}{4r}$: Donc la zone renfermée entre ces deux cercles sera $\frac{css - cxx}{4r}$, laquelle étant



multipliée par a, donnera $\frac{acss - acxx}{4r}$ égale à la solidité du Cilindre creux; l'on aura donc par l'hypothêse $\frac{acss - acxx}{4r} = \frac{acr}{4}$; d'où l'on tire $x = \sqrt{ss - rr}$. Soit donc menée la corde $FG = AB = r$, & du point G à l'autre extremité du diametre soit menée la corde GH, elle sera le diametre du cercle que l'on cherche; ce qui est évident à cause du cercle; donc, &c. Il est facile de résoudre la converse.

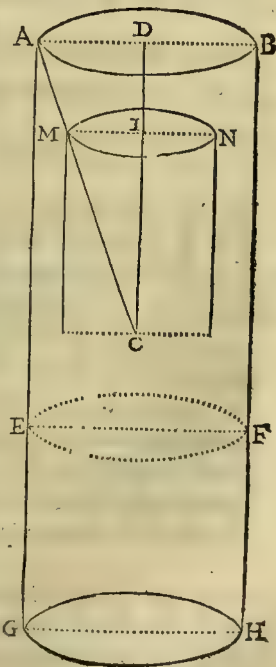
Il est évident, 1°. Que s doit être plus grande que r

comme on l'a ſuppoſé : car ſi $s = r$, donc $x = o$; c'eſt à dire que le point G tomberoit en H, & que $FH = AB$. 2°. Que ſi l'on prend s égale à deux fois la ſoûtendante du quart de cercle AB, le diametre du vuide ſera égal à AB. 3°. Que l'on peut trouver des Cilindres tant vuides que pleins qui ſoient dans tel rapport que l'on voudra dans leurs groſſeurs & dans leurs longueurs.

PROBLEME. II.

Deux Cilindres de même baſe & de differentes matieres & hauteurs comme AF, EH *étant donnez, les transformer en un Cilindre égal & ſemblable aux deux pris enſemble* AH, *de telle maniere que le plus petit ſe trouve préciſément au milieu de ce Cilindre composé des deux.*

Ayant ſuppoſé la choſe faite, les lignes tirées comme on les voit dans la Figure : ſoit $AE = m$, $EG = n$; donc $AG = m + n$; & prenant pour la baſe commune de ces Cilindres $\frac{cr}{2}$, donc le Cilindre EH ſera égal à $\frac{n \times cr}{2}$. Aïant pris le point C pour le centre de la Figure, donc CI que je nomme x ſera la moitié de la hauteur du petit Cilindre interieur que l'on cherche : Et pour avoir le rayon de ſa baſe, on fera $CD \left(\frac{m+n}{2}\right) . DA (r) :: CI (x) . IM = \frac{2rx}{m+n}$; donc la baſe de ce Cilindre ſera $\frac{2cx}{m+n} \times \frac{rx}{m+n}$, & la ſolidité ſera $= \frac{2cx}{m+n} \times \frac{rx}{m+n} \times 2x = \frac{4crx^3}{m+n^2}$. L'on aura donc par l'hypothêſe $\frac{4crx^3}{m+n^2} = \frac{n \times cr}{2}$; d'où l'on



tire $8x^3 = \overline{m + n}^2 \times n$. Ce qui fait connoître que la hauteur du Cilindre intérieur que l'on demande, eſt la premiere des deux moïennes proportionnelles entre *AG* & *EG*, ce qui eſt évident. Et cette ligne ſervira auſſi à déterminer ſon rayon *IM*.

L'uſage de ce Problême ſeroit de connoître ſi les impreſſions que l'on fait ſur la ſurface des corps ſonores en les frappant, font trembler leurs parties les plus intérieures : car aïant, par exemple, les ſons des deux Cilindres dont l'un ſeroit d'or & l'autre d'argent, qui ſont fort differens en degrez, & en aïant formé un ſeul Cilindre, on découvriroit ſi le ſon qu'il rendroit ſeroit fort different de ceux que l'on avoit entendu auparavant.

OBSERVATIONS

Des Eclipſes de la Lune & du Soleil faites à Nuremberg pendant l'année 1708.

PAR M. CASSINI le fils.

MEſſieurs Wurtzelbaur & Muller ont envoyé à l'Académie l'Obſervation qu'ils ont faite de l'Eclipſe
1709. 2. Mars. de Lune du 29 Septembre 1708. Le mauvais temps nous empêcha de l'obſerver exactement à Paris, & nous en rapportâmes deux Obſervations qui avoient été faites à Marſeille & à Génes. Il paroît par l'Obſervation de M. Wurtzelbaur que l'ombre n'étoit pas bien terminée, puiſqu'il douta du commencement de l'Eclipſe pendant l'eſpace de près de deux minutes. Il détermina auſſi de même que M. Muller l'Immerſion & l'Emerſion de pluſieurs Taches. Voici l'extrait de leurs Obſervations.

A $8^h\ 41'\ 30''$ A Nuremberg commencement de l'Eclipſe douteux obſervé par M. Wurtzelbaur.

8 43 15 Commencement de l'Eclipſe plus certain.

A 11^h 6′ 15″ Fin de l'Eclipse douteuse observée par M. Wurtzelbaur.

7 36 Fin plus exacte.

8 43 36 Commencement de l'Eclipse observé par M. Muller.

11 6 34 Fin de l'Eclipse.

La grandeur de l'Eclipse fut observée de 5 doits & un sixiéme.

M. Wurtzelbaur rapporte aussi l'Observation de l'Eclipse du 5 Avril 1708, dont il détermina le commencement à 5^h 0′ 30″ du matin; mais les nuages qui survinrent couvrirent la Lune qui s'approchoit de l'horizon.

Le temps ne fut pas propre à Nuremberg pour l'Observation de l'Eclipse du Soleil. M. Muller l'apperçut entre les nuages à 8^h 25′ lorsqu'il étoit éclipsé de 7 doits & demi, & M. Wurtzelbaur détermina à 8^h 34′ la grandeur de l'Eclipse de 7 doits.

M. Wurtzelbaur a aussi observé à Nuremberg la declinaison de l'éguille aimantée, qu'il trouve de près de onze degrez, & il remarque qu'elle n'a pas augmenté depuis l'année 1703, qu'il l'observa aussi de onze degrés.

Comparaison des Observations de l'Eclipse de Lune du 29 Septembre 1708 faites à Nuremberg, à Genes & à Marseille.

A 8^h	43′	36″	Commencement de l'Eclipse à Nuremberg.
8	33	49	Commencement de l'Eclipse à Genes.
8	20	45	Commencement de l'Eclipse à Marseille.
	9	47	Diff. des merid. entre Genes & Nuremberg.
	22	51	Diff. des mer. entre Marseil & Nuremberg.
11	6	34	Fin de l'Eclipse à Nuremberg.
10	57	21	A Genes.
10	41	26	A Marseille.
	9	13	Diff. des merid. entre Genes & Nuremberg.
	25	8	Diff. des mer. entre Marseille & Nuremberg.

OBSERVATIONS

Sur quelques végétations irrégulieres de differentes parties des Plantes.

PAR M. MARCHANT.

1709. 6. Mars. LEs objets qui ſemblent aujourd'hui le plus attirer les yeux des Phyſiciens Botaniſtes, ſont ordinairement les Plantes étrangeres; leur beauté, leur bizarrerie, ou pour mieux dire leur nouveauté, font ſouvent qu'on les regarde par préference aux Plantes vulgaires, qui cependant fourniſſent de frequentes occaſions de faire des réflexions ſur les differentes manieres dont la nature ſe ſert pour faire ſes productions; & parce qu'il y a autant de merveilles à admirer du côté de la Phyſique dans la plus chetive de toutes les plantes que dans le plus gros Arbre, je n'heſiterai point de me ſervir de l'occaſion qui ſe preſente, de faire une remarque ſur une Plante des plus communes & des plus viles, mais en même tems des plus en uſage, tant dans les alimens, que dans la Medecine.

J'obſervai dans le mois de Juillet de l'année derniere, qu'il avoit crû par hazard dans du terreau expoſé au frais, une Plante nommée par Caſp. Bauh. *Raphanus minor oblongus*, vulgairement appellée en François Rave; laquelle étoit devenuë fort haute & fort branchuë, portant quantité de fleurs & de ſiliques, & qu'au bout d'une des branches ſituée vers l'extrémité de la tige, il paroiſſoit une eſpece de tuberoſité oblongue, qui en general avoit quelque reſſemblance à une ſilique de cette Plante, mais qui étoit beaucoup plus groſſe, & bizarrement contournée.

Environ quinze jours aprês; je remarquai que cette croiſſance avoit beaucoup augmenté de volume, & qu'enfin

ſin elle étoit parvenuë à la grandeur qu'elle eſt repreſentée dans la partie marquée *I* dans la Figure.

Cette tuberoſité étoit longue de deux pouces, ronde courbée en arc, & de huit à dix lignes de groſſeur, aïant une ſurface raboteuſe & inégale, & elle étoit garnie dans ſa longueur de quelques pedicules de fleurs de cette Plante, ainſi que la branche dont elle ſortoit. L'extremité de ce corps étoit un peu plus gros & plus liſſe que ſon origine, & cette extremité ſe renverſoit tout à coup en embas, & ſe diviſoit en trois parties d'inégale longueur, qui ſe relevoient par le bout.

La plus longue de ces trois parties marquée 2 formoit à ſa pointe une fleur verte, cartilagineuſe, & de même ſubſtance que le corps qui la produiſoit. Elle étoit composée de quinze parties principales, ainſi que le ſont les fleurs du genre de *Raphanus* : à ſçavoir, de quatre feüilles *A* qui tenoient la place du calice, & au-deſſus de ces feüilles étoient placés quatre autres petits corps *B* qui tenoient lieu des feüilles de la fleur. Six autres plus petites parties *C* occupoient le milieu de cette même fleur, & figuroient les étamines qui environnoient un piſtile *D* ſitué au milieu de cette fleur, & qui avec les autres parties dont on vient de parler, repreſentoient par analogie & en grand, toutes les parties de la fleur de ce genre de Plante, excepté les ſommets ; ſçavoir, les feüilles qui compoſent le calice, les feüilles de la fleur, les ſix étamines, & le piſtile plus élevé que les autres parties, toutes ces parties étant d'ailleurs d'un verd brun, liſſes, cartilagineuſes, épaiſſes & charnuës, de la grandeur & de la figure qu'elles ſont repreſentées, & enfin d'une nature toute differente des parties, dont la fleur de la Rave eſt naturellement compoſée, ainſi que l'on peut voir dans les Figures de la Planche où le calice de cette fleur eſt marqué *E*, les feüilles de la fleur *F*, les étamines *G*, & le piſtile *H*.

La plus petite des trois diviſions de ce corps monſtrueux chifrée 3 étoit terminée par une autre fleur de même na-

ture, & composée d'autant de parties que celle qu'on vient de décrire, mais elles êtoient generalement plus petites.

La partie moïenne située entre les deux dont on vient de parler marquée 4 étoit un autre corps de même substance contourné en demi cercle, aïant l'extremité recourbée en enhaut, garni de plusieurs cornichons, differens en grosseur & en longueur, dont les pointes étoient aussi relevées en enhaut. Cette production dura verdoïante jusqu'au mois d'Octobre, après quoi elle commença peu à peu à se fanner, & enfin se dessecha entierement au bout de la branche. On ne trouva nulle apparence de graines dans aucune de ces productions.

Il y a long-tems que j'ai remarqué que la Rave produit quelquefois des siliques tortuës & herissées de pointes, surtout lorsqu'elles sont piquées par des pucerons, ou autres insectes; mais je n'y avois point observé ces sortes de fleurs cartilagineuses & extraordinaires, dont personne, que je sçache, n'a encore parlé.

Il est difficile de rendre raison de ce phenomene, quoiqu'il soit certain qu'on en doit attribuer la cause aux piqueures que les insectes font à ces sortes de siliques, ainsi qu'il a été dit; d'où il s'ensuit un épanchement du suc nourrissier de la Plante : mais comment se pourroit-il faire qu'un suc extravasé pût produire quelque partie de Plante, qui eût une figure aussi reguliere que l'ont ces deux fleurs extraordinaires, si en même-tems ce suc n'étoit reçû dans des couloirs propres à distribuer les liqueurs spiritueuses, qui par leur fermentation excitent une dilatation dans les parties des Plantes?

Pour expliquer ce fait il faut de plus admettre, que toutes les parties organiques qui composent les Plantes, contiennent une infinité de semences invisibles, capables de produire des especes semblables à celles dont elles ont tiré leur origine & leur naissance. Les Observations suivantes fourniront des exemples fort familieres de ce que l'on avance.

Les gréfes qu'on applique ſur les arbres, leſquelles produiſent d'un ſeul bourgeon ou écuſſon, un arbre tout different de celui ſur lequel il eſt enté, en ſont des preuves, puiſque le Sauvageon ne ſert ſimplement qu'à fournir le ſuc nourriſſier neceſſaire à la gréfe pour la déveloper, & qu'effectivement elle produit un arbre de même nature que celui dont elle eſt ſortie.

On ſçait par experience qu'il y a des racines charnuës, qui étant coupées par roüelles de l'épaiſſeur de trois ou quatre lignes, ou verticalement fenduës en quatre parties, multiplient fort bien leur eſpece : Ces roüelles & ces morceaux de racines ne ſont pourtant que des parties tronquées aſſez minces, qui étant replantées, produiſent à leur circonference quantité d'autres racines fibreuſes, dont il s'éleve dans la même année des Plantes qui viennent à leur perfection, & tout à fait ſemblables à celles d'où on les a priſes ; d'où il s'enſuit qu'il faut que la vapeur humide de la terre dilate d'abord les ſemences qui ſont dans ces petites parties tronquées, & que la matiere qui ſert à la formation des racines s'y rencontre, pour produire les nouvelles racines qui paroiſſent quelques jours aprés, & qui enfin donnent naiſſance à ces nouvelles Plantes.

Quelques Plantes à racines bulbeuſes & écailleuſes, outre qu'elles ſe ſeparent, produiſent encore d'une ſeule écaille & le long de leurs tiges, des cayeux qui portent des fleurs au bout de trois années, ce qui eſt un effet des ſemences contenuës dans ces tiges.

Rien n'eſt plus ordinaire que de voir des boutures d'Arbres ou de Plantes jetter des racines & des branches, quoiqu'elles ſoient plantées à contre-ſens, & qu'il y ait quelques-unes de ces boutures qui n'aïent point de bourgeons ſur le bois quand on les plante, ce qui doit faire conjecturer que toutes les Plantes peuvent ſe multiplier par des boutures : mais pour y bien réüſſir en ce païs-cy, il faut mettre les boutures ſur des couches de fumier chaud pour leur faire pouſſer des racines, autre-

ment elles n'en poufferoient pas toûjours.

Il y a tout au contraire d'autres Plantes, qui venant des païs froids, veulent fimplement être piquées en terre fraîche & humide pour pouffer des racines; cependant la chofe examinée en general, on voit que les Plantes ligneufes de quelque païs qu'elles foient vegetent beaucoup plus fur couche qu'en pleine terre, parce que les femences dont ces Plantes font remplies germent auffi plus promptement fur couche qu'ailleurs.

On fçait encore que certaines Plantes jettent d'elles-mêmes des racines le long de leurs branches, les unes lorfqu'elles touchent contre quelque corps folide, & d'autres fans toucher à rien.

Il y a quantité de feüilles charnuës, foit entieres ou même coupées en plufieurs lambeaux, qui étant piquées en terre, produifent des racines & fe multiplient; ainfi que font quelques feüilles herbacées & fort minces, qui de plus jettent de leur fein des bouquets d'autres feüilles, & enfin d'autres portent des fleurs fur leur contour.

Pour prouver l'immenfe fécondité des Plantes, on pourroit icy rapporter quantité de manieres de les cultiver, qui aident beaucoup à cette fécondiré, dont les unes font en ufage & réüffiffent eu égard à la faifon, à la nature du terrein, ou au climat, & dont les autres manieres dépendent de quelque tour ingenieux d'Agriculture; mais les exemples qu'on vient de donner, peuvent fuffire pour établir des conjectures raifonnables, fur un principe de totalité de parties, contenu dans les parties des Plantes, par le moïen des femences, & pour expliquer comment fe font les productions extraordinaires, qu'on rencontre fi fouvent dans tant de differentes Plantes; ce qui ne doit pas paroître fort furprenant, puifqu'une petite partie d'une Plante contient en abregé une infinité de Plantes toutes entieres. C'eft ce qu'on efpere plus amplement prouver dans un autre Memoire touchant la nature des Plantes : mais on a befoin pour cela de réïterer quelques experiences, qu'on ne peut faire que dans de

certaines ſaiſons de l'année, leſquelles experiences ſerviront beaucoup à ſoûtenir ce Syſtême, & à découvrir ce qu'il y a de plus caché dans la Botanique, l'interieur des Plantes étant ce qu'on connoît le moins, quoique cette connoiſſance ſoit une des plus curieuſes & des plus à deſirer dans cette Science.

COURBE DE PROJECTION.

Décrite en l'air dans l'hypothéſe des réſiſtances de ce milieu en raiſon des viteſſes actuelles du mobile, nonobſtant leſquelles réſiſtances les accélérations des chûtes ſe faſſent en raiſon des tems, ainſi que quelques Philoſophes diſent l'avoir obſervé.

Et (par occaſion) des projections faites dans un milieu ſans réſiſtance avec des accélérations quelconques des chûtes : deſquelles projections on donne ici une Regle générale, d'où réſulte la Solution d'un Problême de Baliſtique propoſé dans les Mem. de Trevoux du mois de Janvier 1706. *art.* XI. *pag.* 176.

PAR M. VARIGNON.

DAns les Mem. de 1708. pag. 250. 419. &c. j'ay déterminé la Courbe de projection qui dans un milieu réſiſtant en raiſon des viteſſes du corps jetté, réſulteroit du concours des reſtantes de celle de projection & d'une verticale primitivement accélérée en raiſon des tems. Mais comme la compoſition de mouvement, qui a ſervi à déterminer cette Courbe, n'a lieu que dans cette hypotheſe des réſiſtances, & dans le vuide, ainſi que je le ferai voir quelque jour; voici encore une autre Courbe qu'on peut chercher dans cette même hypothêſe des réſiſtances, conformément au ſentiment de quelques Philoſophes qui après les experiences de Galilée, du Pere

1709. 9. Mars.

Riccioli, & de quelques autres, ſur la chûte des corps, croïent que dans l'air, nonobſtant la réſiſtance de ce milieu, les corps qui tombent en lignes droites, du moins de hauteur où les projections ordinaires ne ſçauroient atteindre, y parcourent des eſpaces qui ſont entr'eux comme les quarrés des tems emploïés à les parcourir depuis le commencement de leurs chûtes. De ſorte que ſuivant ces Philoſophes la viteſſe verticale ou de peſanteur, qui dans la Courbe des Mem. de 1708. p. 250. 419. &c. n'étoit que primitive, & telle ſeulement qu'elle auroit été dans le vuide, ſeroit ici l'actuelle verticale du corps jetté, reſtante malgré les réſiſtances ſuppoſées; & c'eſt la Courbe réſultante du concours de cette viteſſe verticale & de la reſtante de projection, qu'il s'agit de trouver ici. cela étant, il eſt viſible que nous ne devons plus avoir ici d'égard à la réſiſtance que le milieu fait à la peſantenr du corps jetté, puiſque (*hyp.*) la voilà déja comptée; mais ſeulement à ce qu'il en fait au mouvement de projection, lequel étant primitivement uniforme, le Probl. 1. pag. 391. des Mem. de 1707. nous ſuffira ſeul avec ce qu'on connoît des projections dans le vuide, pour déterminer ici la Courbe cherchée.

Je ſuppoſe donc ici avec les Philoſophes dont je viens de parler, que *dans l'air, nonobſtant ſa réſiſtance, les corps qui y tombent en lignes droites, parcourent des eſpaces qui ſont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir depuis le commencement des chûtes.*

Les Courbes décrites par les corps jettés, ſeront appellées *Courbes de projection*, ainſi qu'on les vient de nommer; appellant *Lignes de projection* les droites ſuivant leſquelles les corps ſeront jettés, leſquelles ſeront auſſi nommées *Directions des jets* ou *des forces projectrices.* Cela ſuppoſé, ſoit.


A
B
C
C
D
A
C
C
B
B
2
C
A
C
B
A
4


G


E

Mem. de l'Acad. ... 2 part.





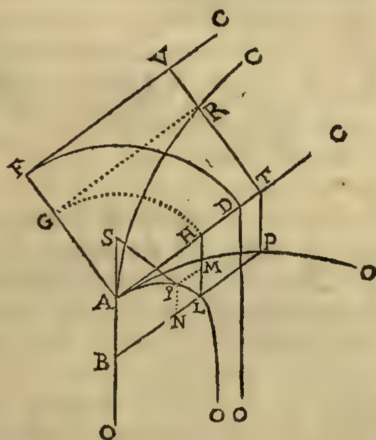


PROBLEME.

Trouver la Courbe de projection d'un corps jetté dans l'air ſuivant une direction qui faſſe un angle quelconque avec la verticale, dans l'hypothéſe des réſiſtances de ce milieu en raiſon des viteſſes auſquelles il réſiſte à chaque inſtant, & dans la précédente hypothéſe des eſpaces parcourus en vertu de la peſanteur de ce corps malgré ces réſiſtances.

SOLUTION.

Soit *AC* une direction quelconque non verticale ſuivant laquelle un corps ſoit jetté de *A* vers *C* de quelque force ou viteſſe que ce ſoit, exprimée par *AF* perpendiculaire ſur *AC*. Soit *AO* une verticale qui ſoit le diametre en *A* de la parabole *APO* que le corps ainſi jetté de la viteſſe *AF* ſuivant *AC*, décriroit (comme on le ſçait) ſi le mouvement de projection y demeuroit uniforme, & celui de peſanteur tel qu'on le ſuppoſe



ici. Après avoir fait une ordonnée quelconque *BP* au diametre *AO* de la parabole *APO*, ou parallele à ſa tangente *AC*; & *PT* parallele à ce diametre *AO*, laquelle rencontre *AC* en *T*; ſoit *TV* parallele à *AF*, & qui rencontre en *V* la droite *FC* parallele à *AC*, & en *R* une logarithmique *ARC*, dont cette *FC* ſoit l'aſymptote, & dont la ſoûtangente (ſur *FC*) ſoit $=$ *AF*. Du point *R* ſoit *RG* parallele à *FC*, & qui rencontre *AF* en *G*; par lequel point *G*, du centre *A*, ſoit le quart de cercle *GH*, qui rencontre *AC* en *H*. Enfin par ce point *H* ſoit *HL*

parallele à *AO*, & qui rencontre *BP* en *L*.

Je dis que la ligne *ALO* qui paſſera par tous les points *L* ainſi trouvés à l'infini, ſera la Courbe cherchée de projection.

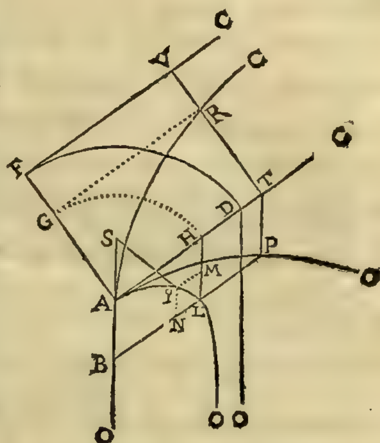
DE'MONSTRATION.

Puiſque (*hyp.*) *APO* eſt la parabole que le corps jetté de *A* vers *C* ſuivant *AC* décriroit, ſi le mouvement ou la viteſſe *AF* de projection en demeuroit uniforme, & celui de peſanteur ou de chûte tel qu'on le ſuppoſe ici; il eſt manifeſte que *AT* & *TP* ſeroient alors parcourus en même tems, la premiere en vertu du premier de ces mouvemens, & la ſeconde en vertu du ſecond. Or en prenant *AT* pour ce tems quelconque, on voit dans les Mem. de 1707. Probl. 1. Corol. 3. pag. 392. que l'eſpace parcouru de la viteſſe uniforme *AF* de projection pendant ce tems *AT*, ſeroit à ce que le mobile en parcouroit en pareil tems avec cette viteſſe retardée par des réſiſtances du milieu, leſquelles fuſſent en raiſon des viteſſes actuelles *VR* reſtantes de celles-là : : *ATVF*. *ARVF* : : *AT*. *AG*. Donc *AG*, ou ſon égale *AH*, ſera auſſi parcouruë de cette viteſſe *AF* de projection ainſi retardée, pendant le même tems *AT*, que *TP* ou *HL* l'eſt en vertu de l'accélérée que le mobile reçoit (*hyp.*) de ſa peſanteur malgré de pareilles réſiſtances. Donc par le concours de ces deux viteſſes à la fois le mobile doit ici ſe trouver en *L* à la fin du tems *AT*, pendant le dernier inſtant duquel ces réſiſtances en raiſon (*hyp.*) des viteſſes auſquelles elles s'oppoſent, permettent (comme dans le vuide) aux viteſſes, en vertu deſquelles ſeparées ce corps parcouroit alors les codifferentielles *NL*, *ML*, de lui faire parcourir par leur concours la diagonale *lL* du parallelogramme infiniment petit *MN*; & ainſi de tous les autres points *L* qui répondent de même à tous les autres tems *AT* marqués de *A* vers *C* ſur la droite *AC*. Donc enfin la ligne *ALO*, qui paſſera par tous les points *L* ainſi trouvés, ſera la Courbe cherchée de projection. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL.

COROLLAIRE. I.

L'espace *AH* décrit en vertu du mouvement retardé de projection, étant toûjours moindre que l'espace *AT* que le mobile auroit décrit en pareil tems *AT* en vertu de la premiere vitesse *AF* de ce mouvement, si elle fût demeurée uniforme ; il est manifeste que la Courbe de projection *ALO* doit être toute entiére au dedans de la parabole *APO*, & la toucher seulement en *A*, sans la rencontrer ailleurs.



COROLLAIRE.

Non-seulement la Courbe de projection *ALO* doit être (*Corol.* 1.) toute entiére au dedans la parabole *APO*; mais encore, si du centre *A* par *F*, on fait le quart de cercle *FD*, lequel rencontre *AC* en *D*, & que de ce point *D* on fasse *DO* parallele à *AO* ; cette droite *DO* sera ici une asymptote de la Courbe de projection *ALO*, laquelle s'en approche toujours sans y pouvoir jamais arriver. Pour qu'elle y arrivât il faudroit que *HL* tombât sur *DO* ; & par conséquent l'arc *GH* sur *FD*, la droite *GR* sur *FV*, & *R* en *V*, ensorte que *RV* fût aneantie ; ce que la logarithmique *ARC* ne permettant qu'à une distance infinie de *AF* du côté de *C*, il faudroit pour cela un tems *AT* infini. Donc la Courbe *ALO* de projection n'arrivera jamais jusqu'à *DO*, quoiqu'elle en approche toûjours à l'infini ; & par conséquent *DO* en sera une asymptote.

COROLLAIRE III.

Pour trouver presentement l'équation qui exprime la nature de cette Courbe ALO de projection, il faut considérer que sa construction (*Solut.*) donne $BL = AH = AG = AF - RV$; & que la parabole APO, dont p soit le parametre en A, donne aussi $AB = \frac{AT \times AT}{p}$. Cela (dis-je) consideré, si l'on appelle BL, y ; AB, x ; AF, a ; AT, t ; & RV, u ; l'on aura premiérement $y = a - u$, ou $u = a - y$, $dy = - du$; & conséquemment $\frac{dy}{a-y} = \frac{-du}{u}$. Secondement l'on aura de même $x = \frac{tt}{p}$, ou $t = \sqrt{px}$, $dt = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$; & conséquemment aussi $\frac{dt}{a} = \frac{pdx}{2a\sqrt{px}}$. Mais la logarithmique ARC (*Solut.*) donne $\frac{-du}{u} = \frac{dt}{a}$ pour son équation. Donc on aura ici $\frac{dy}{a-y} = \frac{pdx}{2a\sqrt{px}}$, ou $\frac{ady}{a-y} = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, pour l'équation de la Courbe ALO de projection.

Mais l'intégrale de cette équation différentielle est $\sqrt{px} = -\overline{la-y} = a \times l\frac{a}{a-y}$, en prenant a pour l'unité. Et si l'on prend n pour le nombre dont a est le logarithme, ensorte que l'on ait $ln = a = 1$, ou $\sqrt{px} = \sqrt{px} \times ln$; l'intégrale précédente se changera en $\sqrt{px} \times ln = a \times l\frac{a}{a-y}$, ou (par l'évanoüissement des logarithmes) en la parcourante $n^{\sqrt{px}} = \frac{a^a}{\overline{a-y}^a}$. Donc cette parcourante-ci, & cette intégrale-là, exprimeront encore chacune la nature de la Courbe ALO de projection, de même que l'équation différentielle $\frac{pdx}{2\sqrt{px}} = \frac{ady}{a-y}$ de laquelle on voit qu'elles résultent l'une & l'autre. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

1°. Pour déterminer presentement la valeur du para-

metre p emploïé dans le précédent Corol. 3. il est à remarquer que la ligne *AF* (a) qui a servi jusqu'ici à exprimer la premiére vitesse de projection suivant *AC*, vaut la moitié ($\frac{1}{2}p$) de ce parametre au point *A* de la parobole *APO*. Car on sçait que cette vitesse de projection, qui uniforme & concourante avec l'accélérée en raison des tems par la pesanteur du corps jetté, lui feroit décrire dans le vuide la parabole *APO*, est égale à ce qu'il en aquieroit en vertu de sa seule pesanteur alors constante, en tombant de la hauteur du quart du parametre en *A* de cette parabole ; on sçait aussi que cette premiere vitesse de projection doit être à ce que la pesanteur de ce corps lui en donneroit en *P* suivant *TP*, s'il décrivoit effectivement cette parabole *APO* par le concours de ces vitesses, comme la racine quarrée du quart du parametre en *A* de cette même parabole, feroit à une pareille racine de *TP*. Mais p est (*hyp.*) ce parametre en *A*. Donc la premiere vitesse de projection *AF* (a) faite ici suivant *AC*, est ce que la pesanteur du mobile (constante dans le vuide) lui en auroit donné en *P* suivant *TP*, ou (*hyp.*) à ce que sa véritable pesanteur lui en donne en *L* suivant *HL* (x) malgré les résistances supposées : : $\sqrt{\frac{1}{4}p}$. $\sqrt{x}$: : $\sqrt{\frac{1}{4}pp}$. $\sqrt{px}$. : : $\frac{1}{2}p$. $\sqrt{px}$. Donc aussi en prenant $\sqrt{px}$ pour cette vitesse aquise en *L* suivant *HL*, l'on aura de même $\frac{1}{2}p$ pour la premiere vitesse de projection suivant *AC*. Mais on a pris jusqu'ici *AF* (a) pour cette premiere vitesse de projection. Donc enfin $a = \frac{1}{2}p$, ou $p = 2a$: c'est-à dire que le parametre en *A* de la parabole *APO* doit être ici double de *AF* (a). *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. Cela étant, il n'y a plus qu'à substituer $2a$ en la place de p dans les trois équations qu'on vient de trouver (*Coroll.* 3.) exprimer chacune la courbe *ALO* de projection; & elles se changeront en autant d'autres dont chacune exprimera encore la même courbe *ALO*. En effet la premiere $\frac{pdx}{2\sqrt{px}} = \frac{ady}{a-y}$ se changera ainsi en $\frac{dx}{\sqrt{2ax}} = \frac{dyt}{a-y}$; la seconde $\sqrt{px} = a \times l\,\frac{a}{a-y}$, en $\sqrt{2ax} = a \times l\,\frac{a}{a-y}$, ou en $\sqrt{\frac{2x}{a}} = l\,\frac{a}{a-y}$; & la troisiéme $n^{\sqrt{px}} = \frac{a^a}{\overline{a-y}^a}$, en $n^{\sqrt{2ax}} = \frac{a^a}{\overline{a-y}^a}$, ou en $n^{\sqrt{\frac{2x}{a}}} = \frac{a}{a-y}$: Et chacune de ces nouvelles équations exprimera, dis-je, la Courbe *ALO* de projection dont il s'agit ici.

3°. Si l'on imagine une Tangente *LS* de cette même Courbe en un de ses points quelconque *L*, laquelle Tangente rencontre en *S* le diametre *OA* prolongé de ce côté-là; la premiére $\frac{dy}{a-y} = \frac{dx}{\sqrt{2ax}}$ de ces nouvelles équations, donnant $a-y\,(HD).\sqrt{2ax}\,(AT) :: dy.\,dx :: y\,(AH).\,BS = \frac{AT \times AH}{HD}$. On trouvera que la soutangente (*BS*) de cette Courbe *ALO* de projection, sur son diametre *AO*, sera par tout quatriéme proportionelle à *HD*, *AH*, *AT*. Ce qui soit seulement dit en passant pour ne nous pas arrêter davantage à cette Courbe, dont voici seulement les vitesses primitives verticales avec la pesanteur requise au mobile pour les lui donner dans le vuide, ou pour lui donner dans le plein supposé les mêmes qu'une pesanteur constante lui auroit données dans le vuide.

REMARQUE I.

On vient de supposer avec quelques Philosophes, que les hauteurs des chutes causées par la pesanteur des corps qui tombent dan l'air malgré sa résistance, sont entr'elles en raison des quarrés des tems employés à les y par-

courir dés le commencement des chutes, ou (ce qui revient au même) que les viteſſes de ces corps en tombant ainſi à travers l'air; ſont à la fin de leurs chutes en raiſon des tems emploïés à les aquerir en vertu de leur peſanteur malgré les réſiſtances de ce milieu; & que ces réſiſtances y ſont en raiſon de ces viteſſes actuelles, & conſéquemment auſſi en raiſon de ces tems. Delà il eſt aiſé de trouver les viteſſes primitives dont celles-là reſtent malgré les réſiſtances ſuppoſées, c'eſt-à-dire, ce que les corps en tombant devroient en avoir dans un milieu ſans réſiſtance, pour avoir celles-là de reſte dans le milieu de réſiſtances ſuppoſées; & quelles peſanteurs il leur faudroit pour avoir de telles viteſſes primitives en tombant dans le milieu ſans réſiſtance.

I. Pour commencer par ces viteſſes primitives, ſi on les appelle v; qu'on appelle auſſi u, les actuelles qui en reſtent malgré les réſiſtances ſuppoſées; t, les tems emploïés à les aquerir; r, tout ce que le milieu ſuppoſé leur fait de réſiſtance pendant chacun de ces tems; & conſéquemment dr, ce qu'il leur en fait à chaque inſtant dt; & qu'on ſuppoſe z par tout proportionnelle à ces réſiſtances inſtantanées dr: le Corol. 1 de la pag. 115 des Mem. de 1708., donnera ici $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dv - du}{z}$ en y prenant dt conſtante de même que la grandeur finie quelconque a. Mais la précédente hypotheſe des réſiſtances inſtantanées (dr) en raiſon des viteſſes actuelles (u) reſtantes des primitives (v) à chaque inſtant (dt) malgré ces réſiſtances, donne $z = u$ proportionnelle auſſi (*hyp.*) à ces réſiſtances dr: De ſorte que la ſuppoſition faite ci-deſſus de ces viteſſes actuelles (u) en raiſon des tems (t), donnant de même $u = t$; l'on aura non-ſeulement ici $du = dt$, mais encore $z = t$. Donc on y aura auſſi $\frac{dt}{a} = \frac{dv - dt}{t}$, & conſéquemment $t\,dt = a\,dv - a\,dt$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2}tt = av - at$, ou $tt + 2at = 2av$, d'où réſulte $v = \frac{tt + 2at}{2a}$ $= \frac{tt}{2a} + t$. Ce qui fait déja voir que les viteſſes primiti-

ves (v) des chutes devroient être ici en raison de grandeurs $\frac{tt+2at}{2a}$ ou $\frac{tt}{2a}+t$ correspondantes : c'est à dire (en prenant $2a$ pour l'unité, ou $a=\frac{1}{2}$) en raison des sommes faites des tems qu'il faudroit pour les aquerir dans le milieu sans résistance, & des quarrés de ces mêmes tems.

Or la Parabole *APO* vient de donner (*corol.* 3, *& schol.*) $t=\sqrt{2ax}$, en appellant x les hauteurs *TP* ou *HL* des chutes faites pendant les tems *AT* (t). Donc on aura pareillement ici $v\left(\frac{tt+2at}{2a}\right)=\frac{2ax+2a\sqrt{2ax}}{2a}=x+\sqrt{2ax}$: c'est à dire (en prenant encore ici $a=\frac{1}{2}$) les vitesses primitives (v) pareillement entr'elles comme les sommes faites des hauteurs *TP* (x) ici parcouruës malgré les résistances supposées pendant les tems *AT* (t) correspondans, & des racines quarrées de ces mêmes hauteurs : c'est à dire aussi en raison des sommes faites des vitesses (u) restantes de ces primitives (v) à la fin de ces tems malgré ces résistances, & des quarrez de ces mêmes vitesses restantes.

II. Voilà pour les vitesses primitives (v) propres à fournir des vitesses effectives (u) en raison des tems (t) malgré les résistances supposées. Voïons présentement quelles devroient être les pesanteurs des corps pour leur donner de telles vitesses primitives (v) dans un milieu sans résistance, tel qu'on suppose d'ordinaire le vuide, ou bien pour leur donner les actuelles supposées en raison des tems malgré des résistances supposées aussi en cette même raison.

On voit par la premiere des deux Regles de la page 268 des Mem. de 1707, qu'en appellant les pesanteurs, f, l'on aura ici $f=\frac{dv}{dt}$. Mais (*art.* 1.) l'on y a aussi $v=\frac{tt+2at}{2a}$ & conséquemment $dv=\frac{tdt+adt}{a}$. Donc on aura pareillement ici $f=\frac{tdt+adt}{adt}=\frac{a+t}{a}$: c'est à dire, les pesanteurs (f) en raison des grandeurs ou sommes $a+t$ correspondantes ; & par conséquent variables comme les tems (t)

en croissant comme eux également en tems égaux; mais avec cette différence que ces tems commencent à zero au commencement des chutes, & que ces pesanteurs y devroient commencer par une force $f = \frac{a+dt}{a} = \frac{a}{a} = 1$, de même genre que la pesanteur constante qu'on suppose d'ordinaire dans l'hypothese de Galilée, laquelle donnant $v=t$, donneroit aussi $p\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{dt}{dt} = 1$, en l'appellant p: cette premiere force $f(1)$ toujours agissante comme la constante p (1), augmenteroit (dis-je) également en tems égaux jusqu'à devenir infinie par rapport à cette pesanteur p après un tems infini, & à se trouver ainsi pour lors du genre des forces finies de projection ou de rotation, qu'on a vûës dans la page 231. des Mem. de 1706, être effectivement infinies par rapport à cette même pesanteur constante p de l'hypothese de Galilée.

III. Il suit des deux articles précédens, que si au lieu des vitesses effectives $u=t$ des corps qui tombent, supposées dans le Problême précédent, on suppose leurs vitesses primitives $v = \frac{2at+tt}{2a}$, ou leurs pesanteurs $f = \frac{a+t}{a}$; la Courbe de projection en sera précisément la même dans un milieu résistant en raison de vitesses actuelles restantes de ces primitives ou de l'action de ce pesanteurs: Voici comment on l'auroit trouvé si le Problême eût été proposé de l'une ou de l'autre de ces deux maniéres.

1°. Puisque (*hyp.*) $v = \frac{2at+tt}{2a}$ sont ici les vitesses primitives, telles qu'elles seroient dans un milieu sans résistance; l'on y aura $tt = 2av - 2at$, & conséquemment $tdt = adv - adt$, ou $\frac{dt}{a} = \frac{dv-dt}{t}$. Mais la Regle générale $\frac{dt}{a} = \frac{dv-du}{z}$ du Corol. 1 de la pag. 115 des Mem. de 1708, dans laquelle z exprimant en général les rapports des résistances instantanées, qu'on suppose ici en raison des vitesses effectives (u) restantes de ces primitives (v) mal-

gré ces résistances, y devient $z = u$; se réduit ici à $\frac{dt}{a} = \frac{dv - du}{u}$. Donc $\frac{dv - dt}{\ } = \frac{dv - du}{\ }$; & par conséquent $u = t$. Ainsi il n'y a plus qu à procéder comme dans la solution du Problême précédent pour avoir ici la même Courbe de projection qu'on y a euë. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

2°. Puisque (*hyp.*) les pesanteurs des corps jettés sont ici $f = \frac{a+t}{a}$, la premiere des deux Regles generales de la pag. 268 des Mem. de 1707, y donnant $f = \frac{dv}{dt}$, l'on y aura aussi $\frac{a+t}{a} = \frac{dv}{dt}$, ou $adt + tdt = adv$, & conséquemment $at + \frac{1}{2}tt = av$, ou $v = \frac{2at + tt}{2a}$. Ainsi il n'y a plus qu'à procéder comme dans le nomb. 1. pour avoir la même Courbe de projection ici que là; & que dans la solution du Problême précédent. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

REMARQUE II.

Les noms demeurant les mêmes que dans le Corol. 3 de la Solution précédente, la même composition de mouvement qui y a donné la Courbe ALO de projection dans l'hypothese des résistances du milieu en raison des vitesses ausquelles ils s'opposent, donneroit aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2x + \sqrt{2ax}}$ pour l'équation de la Courbe d'une projection faite dans un milieu résistant en raison des quarrés des vitesses; & $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{2ax}} \times \sqrt{\frac{a}{2x}}$ pour l'équation de la Courbe d'une

$2n \quad - a$

projection faite dans un milieu résistant en raison des sommes faites des vitesses & de leurs quarrés: le tout en supposant toûjours les accelerations des chutes rectilignes dans l'air en raison des tems nonobstant ces résistances. Mais (comme j'ai déja dit) cette composition de mouvement n'a lieu que dans la premiere de ces trois hypotheses des resistances; parce que cette premiere hypothese est la seule où la diminution du mouvement retardé dans

dans la diagonale, ſoit proportionelle aux diminutions par les côtez du parallelogramme, qui exprime le concours des viteſſes compoſantes. Nous prendrons donc un autre tour dans la ſuite pour avoir les courbes de projection réſultantes des deux autres hypotheſes dont il nous reſte encore à parler par rapport aux mouvemens primitivement variés : ce ſera pour d'autres Memoires. en attendant voici ce qui m'eſt venu à l'occaſion de la parabole emploïée ci-deſſus, laquelle on ſçait être la Courbe de projection qui réſulteroit de l'hypotheſe de Galilée ſur la peſanteur regardée comme conſtante dans un milieu ſans réſiſtance; ou plus generalement, voici ce qui m'eſt venu à cette occaſion touchant les projections qui y ſeroient faites quelles qu'y fuſſent les peſanteurs des corps ou les viteſſes qui en réſulteroient.

APPENDICE.

Des Projections ſuppoſées à l'ordinaire comme dans un milieu ſans réſiſtances, quelles qu'en ſoient les viteſſes iſſues des peſanteurs des corps jettés, & conſéquemment auſſi quelles qu'y ſoient ces peſanteurs elles-mêmes.

AVERTISSEMENT.

La lettre *d* qui va être ici emploïée pour exprimer la longueur de la ligne de but en blanc d'un des deux corps jettés dont on va comparer les projections entr'elles, c'eſt-à-dire, qui va ſignifier ici la diſtance du point de projection de ce corps à ſon but, ne pouvant plus y ſervir de caracteriſtique qui marque les differentielles qui s'y vont trouver; ces differentielles ſeront marquées dans la ſuite à la maniere de M. Newton, par des points placés au deſſus des lettres qui exprimeront les grandeurs dont elles ſeront différentielles : ainſi au lieu de marquer à notre ordinaire, avec M. Leibnitz, par dt, $d\theta$, du, dv, les premieres differentielles ou élemens des grandeurs appellées t, θ, u, v, nous les marquerons par $\dot{t}$, $\dot{\theta}$, $\dot{u}$, $\dot{v}$.

Quant aux ſommes ou Intégrales, nous les marquerons par leur caractériſtique ordinaire $\int$.

NOMS GE'NE'RAUX.

Corps jettés	P,	Π.
Leurs maſſes	m,	μ.
Leurs peſanteurs	p,	π.
Leurs forces projectrices	f,	φ.
Sinus total, ...	c,	c.
Sinus des angles de la verticale avec les directions de jets, ...	e,	ε.
Sinus des angles de l'horizontale avec ces directions.	g,	γ.
Sinus des angles de ces mêmes directions avec les lignes de but en blanc. . . .	a,	α.
Sinus des angles de ces lignes de but en blanc avec la verticale	b,	β.
Lignes de but en blanc, ou diſtances des points de projection aux buts . . .	d,	δ.
Efforts ou forces verticales dont les corps jettez frapent ces buts . . .	l,	λ.
Tems qu'ils emploïent à y arriver	t,	θ.
Viteſſes verticales iſſuës des peſanteurs p, π, pendant ces tems	u,	υ.

REGLE GE'NE'RALE

$$\frac{\overline{acu}t \mp bg \times \int u\dot{t}}{mabdl\dot{u}} \times efp\dot{t} = \frac{\alpha c\upsilon\theta \mp \beta\gamma \times \int \upsilon\dot{\theta}}{\mu\alpha\beta\delta\lambda\dot{\upsilon}} \times \varepsilon\varphi\pi\dot{\theta}.$$

Cette Regle ſuit ſi naturellement de la générale des Mem. de 1707, pag. 226, & de celles qui y en ont été déduites pour la comparaiſon des mouvemens entr'eux, qu'il ne paroît pas néceſſaire de s'arrêter ici à la démontrer. Les ſignes — ſuperieurs dans $\mp$ ſont pour les projections de bas en haut; & les inférieurs +, pour les projections de haut en bas.

On ſe ſervira de cette Regle à peu près de même

qu'on a fait de la générale des Mem. de 1707 dans les trois exemples qui la ſuivent: par exemple, ſi l'on ſuppoſe. $u.v::t^n.\theta^v$. en ſorte qu'en prenant $u=t^n$, l'on ait auſſi $v=\theta^v$: cette ſuppoſition donnant $\dot{u}=nt^{n-1}\dot{t}$, $\dot{v}=v\theta^{v-1}\dot{\theta}$, $\int u\dot{t}=\int t^n\dot{t}=\frac{t^{n+1}}{n+1}$, & $\int v\dot{\theta}=\int\theta^v\dot{\theta}=\frac{\theta^{v+1}}{v+1}$; la ſubſtitution de ces valeurs de $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\int u\dot{t}$, $\int v\dot{\theta}$, dans la précédente Regle générale, la réduira ici à $\frac{\overline{n+1}\times ac+bg}{nn+n\times mabld}\times efptt=\frac{\overline{v+1}\times\alpha c+\beta\gamma}{vv+v\times\mu\alpha\beta\lambda\delta}\times\varepsilon\varphi\pi\theta\theta$; & ainſi d'une infinité d'autres Corollaires, qui (les intégrations ſuppoſées) ſe pourroient tirer de même de cette Regle générale, ſelon la varieté arbitraire d'autres hypotheſes qu'on y pourroit encore faire.

Il eſt ici à remarquer que ſi l'on ſuppoſe de plus $n=v$, cette Regle générale, ou celle qu'on en vient de tirer pour le cas des valeurs de $u.v::t^n.\theta^v$. ſe réduira encore à $\frac{\overline{n+1}\times ac+bg}{mabld}\times efptt=\frac{\overline{n+1}\times\alpha c+\beta\gamma}{\mu\alpha\beta\lambda\delta}\times\varepsilon\varphi\pi\theta\theta$, qui ſeule ſatisfait au Problême de Baliſtique propoſé dans les Mem. de Trevoux du mois de Janvier 1706, art. 11, pag. 167, en ces termes.

PROBLÊME ENVOYÉ DE PROVINCE.

Deux corps P, Q, *dont les peſanteurs ſont* A, B, *ont été jettés de deux points à deux autres points, dont les diſtances ſont* C, D, *par les puiſſances* E, F, *ſuivant les directions qui faiſoient avec les lignes* C, D, *des angles dont les ſinus ſont* G, H. *Ils ſont parvenus à leurs termes dans les tems* I, K, *ont frappé avec de forces* R, S, *ont fait préciſion de la réſiſtance du milieu, & l'on ſuppoſe que les viteſſes des graves croiſſent en général comme les puiſſances* M *des tems écoulés. Il s'agit de trouver une Regle générale renfermée dans une ou pluſieurs équations qui expriment tous les rapports poſſibles entre* A, B; C, D; E, F; G, H; I, K; R, S.

SOLUTION.

Pour avoir cette Regle dans une ſeule équation, il n'y

a plus qu'à prendre ici $m = P$, $\mu = Q$, $p = A$, $\pi = B$; $d = C$, $\delta = D$, $f = E$, $\varphi = F$, $a = G$, $\alpha = H$, $t = I$, $\theta = K$, $l = R$, $\lambda = S$, $n = M$; & en ſubſtituant ces valeurs propoſées dans la derniére équation $\frac{\overline{n+1} \times ac \mp bg}{mabld} \times efptt = \frac{\overline{n+1} \times \alpha c \mp \beta\gamma}{\mu\alpha\beta\lambda\delta} \times \varepsilon\varphi\pi\theta\theta$, elle ſe changera en $\frac{\overline{M \times c + c \times G} \mp bg}{PGRC} \times \frac{e}{b} \times EAI^2 = \frac{\overline{M \times c + c \times H} \mp \beta\gamma}{QHSD} \times \frac{\varepsilon}{\beta} \times FBK^2$, qui ſera la Regle demandée dans le Problême propoſé.

AUTRE SOLUTION
Infiniment générale.

Si dans la Regle générale qui vient de donner toutes les autres, on ſubſtituë de même les expreſſions du Problême de Trevoux au lieu des nôtres, il en réſultera encore une Solution de ce Problême infiniment plus générale que la précédente requiſe par l'Auteur : ſçavoir, $\frac{cu \times GI \mp bg \times \int u \times \dot{I}}{PGCR} \times \frac{\varepsilon \times \dot{I}}{bu} \times AE = \frac{c\upsilon \times HK \mp \beta\gamma \times \int \upsilon \times \dot{K}}{QHDS} \times \frac{\varepsilon \times \dot{K}}{\beta\dot{\upsilon}} \times BF$. La ſuppoſition de $u.\upsilon :: I^M . K^M$. faite dans le Problême propoſé, fera dégenerer cette Regle ou Solution en celle qui la précede.

AVERTISSEMENT.

I. Ce Problême ainſi réſolu par le moïen d'une ſeule équation, l'a déja été par le concours de quatre, par le Pere Durranc Jeſuite, habile en ces matieres, & Profeſſeur des Mathématiques à Cahors : il ſeroit à ſouhaiter que ſa Solution fût renduë publique pour voir la difference des chemins qui nous ont conduit au même but. Son Ecrit m'a paſſé par les mains ; & ce fut par cet Ecrit que j'appris que ce Problême avoit été propoſé, ne liſant pas fort exactement les Journaux ; outre que lorſqu'il le fut, j'étois trop malade pour pouvoir penſer à rien d'approchant. Voïant ce Problême réſolu, je ne m'aviſai pas d'en chercher d'autre ſolution ; mais celle-ci s'étant pré-

ſentée comme d'elle-même en conſéquence de la Regle générale d'où je viens de la tirer, j'ai crû faire plaiſir au Lecteur de la marquer ici.

II. Pour ce qui eſt de la Courbe générale de projection, par exemple du corps *P*, dans toute l'étenduë de la Regle précédente, c'eſt-à-dire, quelque hypotheſe qu'on faſſe de ſes viteſſes (u) de peſanteur dans le vuide; l'équation générale en ſera $x = \int u\dot{t}$, en prenant x pour les ordonnées verticales de cette Courbe, & t pour les abſciſſes correſpondantes depuis le point de projection ſur la direction du jet. De ſorte que dans le cas du Problême de Trevoux, qui rend $u = t^m$, l'équation de cette Courbe ſera $x\ (\int u\dot{t}) = \int t^m\dot{t} = \frac{t^{m+1}}{m+1}$, ou (en prenant a pour l'unité) $\overline{m+1} \times a^m x = t^{m+1}$; ce qui (en ſuppoſant $m=1$ conformément à l'hypotheſe de Galilée ſur la peſanteur) ſe réduit à $2ax = tt$, équation à la parabole ordinaire trouvée par Galilée & par pluſieurs autres après lui pour la Courbe de projection dans cette derniere hypotheſe. L'équation de celle du corps Π ſe trouvera de même en général & en particulier.

OBSRVATIONS

SUR LES MOUVEMENS DE LA LANGUE DU PIVER.

PAR M. MERY

POur donner une Explication des mouvemens de la langue du Piver, plus juſte que celle qui paroît dans les ouvrages de M[rs] Borelli & Perrault, je vais décrire plus exactement qu'ils n'ont fait, toutes les parties d'où dépendent ſes mouvemens. 13. Mars 1709.

De quelque étenduë que paroiſſe la langue de cet Oi-

ſeau, il eſt néanmoins conſtant que ſa longueur propre n'eſt que de trois à quatre lignes; car celle du corps & des branches de l'os hyoïde, que ces Auteurs lui ont attribuée, ne lui appartient pas en bonne anatomie.

La langue du Piver eſt faite d'un petit os fort court, revêtu d'un cornet de ſubſtance d'écaille : ſa figure eſt piramidale; il eſt articulé par ſa baſe avec l'extremité antérieure de l'os hyoïde.

L'os hyoïde eſt figuré comme un ſtilet; il a environ deux pouces de longueur & une demie ligne de groſſeur; il eſt articulé par ſon extrémité poſterieure avec deux branches oſſeuſes plus menuës que ſon corps. Chaque branche eſt compoſée de deux filets d'os d'inégale longueur, joints enſemble & aboutis l'un à l'autre. Le filet de devant n'a qu'un pouce & demi de long; celui de derriere, inconnu à M. Borelli, en a cinq ou environ, étant uni à un petit cartilage qui le termine; de ſorte que chaque branche eſt trois fois plus longue que le corps de l'os hyoïde & celui de la langue joints enſemble. Ces branches qui appartiennent à l'os hyoïde, ſont courbées en forme d'arc, dont le milieu occupe les côtez du cou, leurs extremitez anterieures paſſent ſous le bec, & ſe terminent au corps de l'os hyoïde; leurs extremitez poſterieures paſſent pardeſſus la tête & entrent dans le nez du côté droit : mais il eſt à remarquer qu'elles n'y ſont point articulées; ce qui contribuë beaucoup à la ſortie de la langue, comme je le ferai voir dans la ſuite.

L'os hyoïde & le filet antérieur de ſes branches, ſont renfermez dans une gaine formée de la membrane qui tapiſſe le dedans du bec inferieur. L'extremité de cette gaine s'unit à l'embouchure du cornet écailleux de la langue. Cette gaine s'alonge quand la langue ſort hors du bec, & s'accourcit quand elle y rentre.

Le cornet écailleux qui revêt le petit os de la langue, eſt convexe en deſſus, plat en deſſous, & cave en dedans : il eſt armé de chaque côté de ſix petites pointes trés fines, tranſparentes & inflexibles : leur extremité eſt

un peu tournée vers le gosier. Il y a bien de l'apparence que ce cornet armé de ces petites pointes, est l'instrument dont le Piver se sert pour enlever sa proïe ; ce qu'il fait avec d'autant plus de facilité, que cet instrument est toûjours empâté d'une matiere gluante, qui est versée dans l'extremité du bec inferieur par deux canaux excretoires, qui partent de deux glandes piramidales situées aux côtez internes de cette partie.

Pour se servir de cet instrument, la nature a donné au Piver plusieurs muscles, dont les uns appartiennent aux branches de l'os hyoïde : ceux-ci tirent la langue hors du bec ; d'autres appartiennent à la gaine, qui renferme le corps de l'os hyoïde avec les filets anterieurs de ses branches; ceux-là retirent la langue dans le bec. Enfin la langue a ses muscles propres qui la tirent en haut, en bas, & de l'un & de l'autre côté.

Chaque branche de l'os hyoïde n'a qu'un muscle qui seul est aussi long que la langue, l'os hyoïde & une de ses branches joints ensemble ; ces deux muscles tirent leur origine de la partie anterieure laterale-interne du bec inferieur, s'avançant de devant en arriere, ils envelopent les filets posterieurs des branches de l'os hyoïde, & passant au dessus de la tête, ils viennent enfin s'inserer à leurs extremitez, d'où partent deux ligamens à ressort, qui s'unissant ensemble, en forment un troisiéme, qui les attache à la membranne du nez. Ces ligamens sont fort courts ; mais ils s'alongent sans peine pour peu qu'ils soient tirez Or comme la résistance de ces ligamens peut être surmontée facilement par la contraction de ces muscles, il est aisé de concevoir, que quand ils se racourcissent, ils tirent les extrémitez posterieures des branches de l'os hyoïde hors du nez ; & les entraînant du côté de leur origine, ils chassent le corps de l'os hyoïde, les filets antérieurs de ses branches, & la langue hors du bec ; ce qu'ils n'avoient pû faire, bien que les branches de l'os hyoïde soient fort flexibles, si ses branches avoient été fixement attachées ou articulées

avec les os du nez, car quoique les arcs qu'elles décrivent, puiſſent s'étendre, elles n'auroient pû s'alonger aſſez pour pouſſer de quatre pouces la langue hors du bec; ce qu'elles font avec d'autant plus de facilité qu'elles ont leur mouvement libre dans ſes muſcles, où elles ſont renfermées comme dans un canal, & ne ſont point d'ailleurs articulées avec les os du nez.

Pour retirer la langue dans le bec, la nature a donné à la gaine qui renferme l'os hyoïde & les filets antérieurs de ſes branches, deux muſcles pour l'y ramener; & parce qu'il faut que leur alongement & leur racourciſſement ſoient égaux à ceux de leurs antagoniſtes; puiſque la langue parcourt le même chemin en rentrant dans le bec, qu'elle fait pour en ſortir, la nature a pris ſoin pour placer ces muſcles dans le petit eſpace qui eſt entre le deſſous du Larinx & le bout du bec, de faire faire à l'un & à l'autre deux circonvolutions en ſens contraire autour de la partie ſupérieure de la trachée artere, d'où ces deux muſcles tirent leur origine; après quoi ils ſe croiſent derriere le Larinx, & viennent enfin tapiſſer le dedans de la gaine à laquelle ils s'uniſſent; or comme ſon extrémité eſt jointe à l'embouchure du cornet écailleux de la langue, il arrive que quand ces deux muſcles ſe contractent, ils tirent & font rentrer cette gaine en elle-même, & ramenant ainſi la langue dans le bec, ils repouſſent les extrémitez poſtérieures des branches de l'os hyoïde dans le nez. Les trois ligamens à reſſort dont j'ai parlé, ſervent auſſi à les y ramener; car après avoir été alongez par les muſcles qui tirent la langue hors du bec, ils ſe racourciſſent ſitôt que ces muſcles ſe relâchent, & entraînent dans le nez les branches de l'os hyoïde auſquels ils ſont attachez.

Il y a au deſſus du crane une rainure qui forme avec la peau un canal, qui renferme la partie poſtérieure des branches de l'os hyoïde avec leurs muſcles, dans lequel ces parties ont leur mouvement libre. Ce canal empêche les branches de l'os hyoïde de s'écarter de côté ni d'autre

tre, quand elles ſont tirées en avant, & fait qu'elles reprennent facilement leur place, quand elles ſont retirées en arriere.

Pour peu qu'on faſſe de reflexion ſur la longueur qu'ont la langue, l'os hyoïde, & ſes branches joints enſemble, & ſur l'origine & l'inſertion déterminée des muſcles qui font ſortir & rentrer dans le bec la langue du Piver, il ſera aiſé de juger que M. Borelli s'eſt mépris; car ſi l'on conſidere que la langue de cet oiſeau, l'os hyoïde & ſes branches joints enſemble, ont huit pouces de longueur, & que de cette longueur il en ſort environ quatre pouces hors du bec quand elle eſt tirée, on concevra aiſément que la langue parcourant le même chemin en rentrant qu'elle fait en ſortant, les muſcles qui la tirent & retirent, doivent avoir des alongemens & des racourciſſemens de chacun quatre pouces, & que par conſéquent ils doivent avoir en longueur plus de quatre pouces, ne pouvant pas s'acourcir de leur longueur entiere. Ainſi des quatre premiers muſcles, que M. Borelli donne à la langue pour ſes mouvemens, deux prenant leur origine de l'extrémité du bec inférieur, & les deux du devant du crane, & tous les quatre allant s'inſerer au milieu de cette longueur de huit pouces, il eſt viſible que ces muſcles ne pouroient avoir jamais un tel effet, puiſqu'ils ne ſeroient au plus chacun que de quatre pouces.

M. Borelli ne ſeroit pas entré dans ce ſentiment, ſi on lui avoit fait remarquer que les deux muſcles qui naiſſent du bec, parcourent toute l'étenduë du corps & des branches de l'os hyoïde. Sa mépriſe vient donc d'avoir partagé chacun de ces muſcles en deux, & de n'avoir connu que les filets anterieurs des branches de l'os hyoïde au bout deſquels il place l'inſertion des quatre premiers muſcles de la langue qu'il a décrits. A l'égard de ceux qui tournent autour de la trachée artere, il en a reconnu le veritable uſage.

Pour ce qui regarde M. Perrault, il s'eſt mépris beaucoup plus que M. Borelli. Car premierement il ne fait

nulle mention des muſcles qui environnent la trachée artere, c'eſt néanmoins par leur action ſeule, que la langue eſt ramenée dans le bec. Secondement il fait naître du larinx les quatre premiers muſcles de M. Borelli, & en envoïe deux aux extrémités poſterieures des branches de l'os hyoïde, & les deux autres à leurs extrémités anterieures pour tirer & retirer la langue, & par-là il tombe dans le même inconvenient de M. Borelli; mais ſa mépriſe eſt plus grande, en ce qu'il ne part aucun muſcle du larinx qui aille s'attacher aux branches de l'os hyoïde.

Enfin toute la recherche que ces Meſſieurs ont faite pour expliquer les mouvemens de la langue du Piver, ſe termine aux muſcles qui la font ſortir hors du bec, & à ceux qui l'y font rentrer. Il ne paroît point que leurs anatomiſtes ſe ſoient mis en peine de penetrer plus avant dans ſa ſtructure : de-là vient que ces Meſſieurs ne nous ont rien dit des quatre muſcles propres à la langue de cet oiſeau, par leſquels elle eſt portée en haut, en bas, & d'un côté & d'autre, ſoit qu'elle ſoit placée au dedans ou au dehors du bec.

Ces muſcles tirent tous leur origine de la partie anterieure des branches de l'os hyoïde, deux de l'une & deux de l'autre, & ſe terminent chacun en un long & grêle tendon; ces quatre tendons embraſſent le corps de l'os hyoïde, & viennent s'inſerer à la baſe du petit os de la langue. Quand tous ces muſcles agiſſent enſemble, ils tiennent la langue droite; quand les muſcles de deſſus ſe racourciſſent en même-tems, ils tirent la langue en haut; quand ceux de deſſous ſont en action, ils la tirent en bas. Mais lorſque deux muſcles placés d'un même côté agiſſent enſemble, ils la tirent de ce côté-là.

Or comme de tous les muſcles qui ſervent aux differens mouvemens de la langue du Piver, il n'y a que ces quatre derniers qui y aïent leur inſertion, il eſt viſible que les muſcles qui la tirent & retirent, ne lui appartiennent pas proprement; mais à la gaine & aux bran-

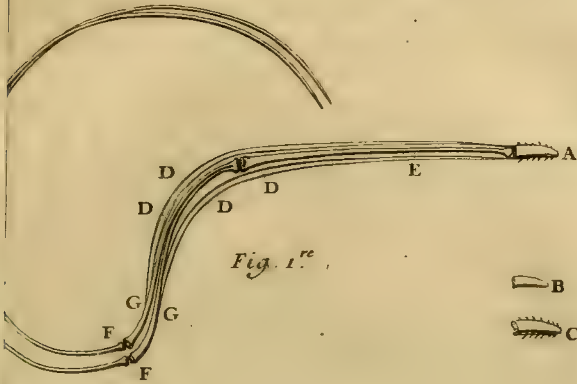


Fig. 1.re

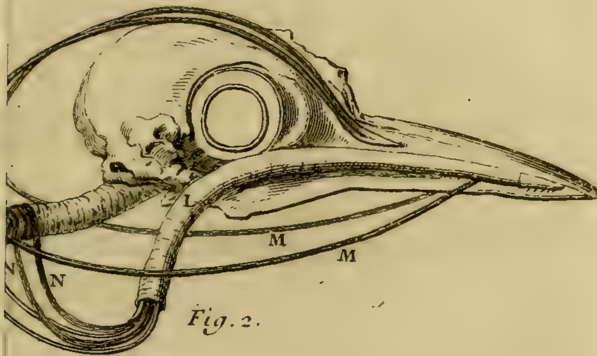


Fig. 2.

Fig. 3.



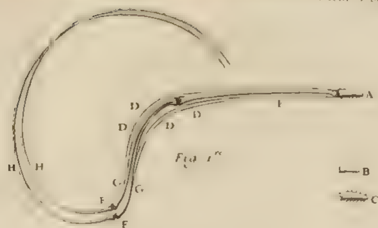


Fig. 2

Fig. 3

ches de l'os hyoïde où ces muſcles vont s'inſerer comme je l'ai fait voir ; d'où il s'enſuit que les mouvemens que fait la langue en ſortant du bec & en y rentrant, appartiennent auſſi à ces parties, & non pas à la langue ; puiſque dans ces deux mouvemens elle peut demeurer immobile.

OBSERVATIONS

De l'Eclipſe de Soleil arrivée le 11 *Mars* 1709. *après midy, à l'Obſervatoire.*

Par Mrs De La Hire.

LE Ciel a été ſi couvert pendant la durée de cette Eclipſe, que nous n'avons pû qu'avec beaucoup de peine en déterminer quelques phaſes. Il y avoit pluſieurs couches de nuages les unes au-deſſus des autres, & qui étoient aſſés épaiſſes pour ne laiſſer voir le Soleil que par quelques intervalles & dont le limbe n'étoit pas bien déterminé. Le vent étoit fort & Nord avec un peu de nége qui tomboit, & à peine étoit-on en état de prendre quelques meſures avec le Micrometre, dont on ſe ſervoit, que le Soleil ſe couvroit de nuage épais.

1709. 13. Mars.

Cependant voicy ce que nous en avons pû obſerver.

A	1h	33'	46"	2 doigts	37'	
		38	20	3	0	douteuſe.
		50	6	3	0	
	2	5	40	2	24	
		23	57	1	21	

OBSERVATION

De l'Eclipse du Soleil du 11 *Mars* 1709. *faite à l'Observatoire Royal.*

PAR M. CASSINI le fils.

1709. 13. Mars.

LE Ciel fut pendant cette Eclipse couvert de nuages, au travers desquels on entrevoïoit quelquefois le Soleil, dont le disque n'étoit pas assés bien terminé pour déterminer avec évidence la quantité de l'Eclipse. voici ce que nous en avons pû observer tant à la vûë simple qu'avec deux Lunetes, l'une desquelles avoit un micrometre à son foïer, & l'autre des reticules.

Le Soleil étoit entierement caché au commencement de l'Eclipse.

à 1h 8′ après midi, le Soleil commença de paroître entre les nuages à la vûë simple, éclipsé de près de deux doigts.

à 1 11 le Soleil observé avec les reticules, étoit éclipsé de deux doigts 16 minutes. Cette Observation est douteuse.

à 1 33 le disque du Soleil & les cornes parurent bien terminées, & l'on trouva par les reticules la grandeur de l'Eclipse de 2 doigts 56 minutes.

à 1 35 la grandeur de l'Eclipse fut trouvée par le micrometre de 2 doigts 58 minutes.

à 1 36 la grandeur de l'Eclipse fut trouvée par les reticules de 2 doigts 56 min. exact.

à 2 6 à 7′ les cornes de l'Eclipse sont verticales.

à 2 21 la distance entre les cornes est environ la sixiéme partie de la circonference du Soleil, ce qui donne la grandeur de l'Eclipse d'un doigt & demi.

L'on vit ensuite par intervalle le Soleil éclipsé à la vuë simple sans pouvoir déterminer la quantité de l'Eclipse.

& à 2^h 40′ l'on aperçut le Soleil pour la derniere fois, & il étoit douteux s'il étoit encore éclipsé.

EXTRAIT

DES OBSERVATIONS

de l'Eclipse du Soleil du 11 *Mars* 1709. *faites à Montpellier, à Marseille, à Genes & à Bologne.*

PAR M. CASSINI le fils.

NOus avons reçû diverses Observations de l'Eclipse du Soleil du 11 Mars 1709. dont voici l'Extrait. 1709. 17. Avril.

Observation faite à Montpellier, par Messieurs de Plantade & Clapiés.

à 0^h 38′ 33″ Commencement de l'Eclipse douteux.
2 55 49 Fin de l'Eclipse.

La grandeur de l'Eclipse fut observée de 4 doigts & demi.

Observation faite à Marseille, par le P. Laval & M. Chazelles.

à 0^h 42′ 18″ Commencement.
3 2 43 L'Eclipse sur sa fin.

Observation faites à Genes, par M. le Marquis Salvago & l'Abbé Rava.

à 0^h 59′ 52″ Commencement de l'Eclipse.

La grandeur de l'Eclipse fut observée de cinq doigts & un peu plus.

Observation faite à Bologne, par M. Manfredy.

à 3^h $8'$ $\frac{1}{2}''$ Le Soleil étoit éclipsé de 2 doigts $\frac{1}{4}$.
3 34 35 Fin de l'Eclipse à peu près.

Reflexions sur les Observations de l'Eclipse du Soleil du 11 Mars 1709, faites en divers Pays.

Les Observations de l'Eclipse du Soleil que nous avons reçûës de divers païs où nous avons des Correspondans, étoient necessaires pour suppléer à l'Observation faite à Paris, où nous n'avions pû determiner ni le commencement ni la fin.

Nous nous sommes servis principalement de l'Observation faite à Marseille, où le commencement de l'Eclipse fut determiné exactement à 0^h $42'$ $18''$. Aïant eu égard à la difference des Meridiens entre Paris & Marseille, que nous avons trouvée par quantité d'Observations de $12'$ $28''$, nous avons corrigé la trace de la Lune dans la figure dont nous nous étions servi pour calculer l'Eclipse du Soleil, & nous y avons ensuite appliqué les Observations les plus exactes qui ont été faites à Montpellier, à Genes, & à Bologne.

A Montpellier la Fin de l'Eclipse fut observée exactement à	2^h	$55'$	$49''$
On trouve par la figure dressée pour le Meridien de Paris, qu'elle y a dû arriver à	2	49	30
Ce qui donne la difference des Meridiens de		6	19

A Genes le Commencement de l'Eclipse fut observé exactement à . . .	0^h	$59'$	$52''$
Il y a dû arriver par la figure	0	34	0
Ce qui donne la difference des Meridiens de		25	52

A Bologne la Fin fut observée avec quelque ambiguité à	3^h	$34'$	$35''$
Elle a dû arriver par la figure à	2	58	40
Ce qui donne la difference des Meridiens de		35	55

La difference des Meridiens qui résulte de ces Observations, s'accordant assés exactement avec celle que l'on a trouvée par diverses autres Observations ; il y a lieu de supposer que la trace de la Lune que l'on a corrigée par l'Observation faite à Marseille, s'accorde à très-peu près avec celle qu'elle a dû décrire effectivement.

Suivant cette trace l'on trouve que le commencement a dû arriver à Paris par le calcul corrigé le 11 Mars, à $0^h 42' 30''$, & la fin à $2^h 37' 0''$.

A l'égard de la quantité de l'Eclipse qui résulte des Observations que je viens de rapporter, l'on trouve qu'elle a dû paroître à Paris de 2 doigts 56 minutes telle que nous l'avions déterminée par nos Observations.

EXPLICATION

De quelques faits d'Optique, & de la maniere dont se fait la vision.

PAR M. DE LA HIRE.

EN 1694 je fis imprimer dans un Memoire plusieurs Remarques sur differens accidens de la vûë, dont je rendois raison par l'Optique. Je joignis à ces remarques un nouveau systême de la vision dont j'avois donné une partie dans les Journaux des Sçavans quelques années auparavant. J'examine maintenant un autre accident de la vûë qui n'est pas naturel & qu'on ne remarque que dans une experience particuliere, & je crois que j'en puis aussi rendre raison comme des autres par les seules regles d'Optique. *1709. 30. Mars.*

On sçait que la prunelle de l'œil dans la plûpart des animaux, s'étréssit à la grande lumiere, & qu'elle s'ouvre considérablement dans l'obscurité. Il est facile de voir dans la dissection de l'œil, que la membrane Iris

qui eſt percée dans ſon milieu, ce qu'on appelle l'ouverture de la prunelle, eſt un muſcle circulaire qui peut ſe racourcir en ſe retirant vers ſa circonference, ce qui augmente alors l'ouverture de la prunelle; mais en ſe relâchant, ſes parties ſe raprochent du centre de la prunelle par une vertu élaſtique; & c'eſt ce qui diminuë la prunelle.

Pour bien entendre comment ſe peut faire ce changement de la prunelle par l'action du muſcle, il faut conſiderer que le corps de ce muſcle eſt vers ſa circonference où il eſt attaché au dedans de l'œil, & que toutes ſes fibres paroiſſent tendre de la circonference vers le centre où elles n'arrivent pas; car elles ſe terminent au petit cercle qui forme la prunelle. Mais ce muſcle aïant une épaiſſeur aſſés conſiderable vers ſa tête, ſi ſes fibres s'écartent l'une de l'autre ſuivant l'épaiſſeur du muſcle où il doit y en avoir une grande quantité, leur extrémité qui forme la prunelle, doit ſe raprocher de la tête, & par conſéquent dilater la prunelle; mais lorſque l'action du muſcle ceſſera, le reſſort des mêmes fibres peut les remettre dans leur premier état & fermer la prunelle, ou bien il pourroit y avoir dans ce muſcle quelques fibres à reſſort qui ne ſerviroient que pour cet effet; ou bien enfin on pourroit imaginer un autre muſcle de peu d'épaiſſeur & couché ſur le premier dont les fibres ſeroient circulaires, & qui lui ſerviroit d'antagoniſte; car les fibres circulaires de ce muſcle venant à s'écarter l'une de l'autre ſuivant leur plan, fermeroient la prunelle, l'action de l'autre muſcle aïant ceſſé; & c'eſt ce ſentiment qui me paroît le plus naturel & que je ſuis le plus volontiers.

Mais entre deux muſcles qui ſont antagoniſtes l'un à l'autre, le plus fort l'emportera toûjours, lorſqu'il n'y aura aucune détermination particuliere pour l'un ni pour l'autre: d'où il s'enſuit que ſi celui qui dilate la prunelle eſt le plus fort, comme il le paroît, on jugera que l'état naturel de la prunelle eſt d'être dilatée.

L'action

L'action d'ouvrir & de fermer la prunelle, n'est pas de celles qu'on appelle volontaires; mais de celles qui se font necessairement par une cause étrangere, comme il arrive à plusieurs parties du corps des animaux.

Il paroît assés vraisemblable qu'une très-grande lumiere faisant une trop forte impression sur le fond de l'œil, dont il est blessé & en quelque façon brûlé, comme quand on regarde le feu ou un corps blanc exposé au Soleil, nous oblige aussi-tôt à fermer la prunelle autant qu'il est possible, pour recevoir moins de ces raïons trop lumineux, & pour remedier au danger qui menace l'œil. Au contraire quand on regarde attentivement quelqu'objet dans l'obscurité, on fait tout son possible pour le voir distinctement, & pour en bien discerner toutes les parties, ce qu'on ne peut faire sans le secours d'une lumiere assés vive; c'est pourquoi on dilate la prunelle, afin qu'il entre dans l'œil une plus grande quantité de ces foibles raïons, qui tous ensemble feront une plus forte impression en se réünissant sur le principal organe de la vision.

Mais quoiqu'on soit exposé à une assés grande lumiere, on ne ferme pas toûjours la prunelle quand on est attentif à regarder quelqu'objet dont l'image doit se peindre vivement sur le fond de l'œil, ce qu'on remarque dans les animaux qui peuvent fermer & dilater extraordinairement la prunelle comme les chats; car lorsqu'ils sont au grand jour & dans un état tranquille, ils ont la prunelle presque toute fermée, & s'il arrive subitement quelqu'objet extraordinaire auquel ils font attention, on les voit alors l'ouvrir autant qu'ils peuvent & tout d'un coup.

Ce sont ces sortes d'animaux dont je parlai dans mon Memoire, ausquels je croïois que la nature avoit donné une structure particuliere de la membrane Iris, qui ne se ferme pas circulairement mais par le côté, afin qu'elle pût s'ouvrir promptement & considérablement dans l'obscurité où ils cherchent le plus souvent leur nourriture.

Quelle que puiſſe être l'attention qu'on fait à voir les petites parties d'un objet, la prunelle ſera toûjours moins ouverte au grand jour que dans l'obſcurité, ſur tout ſi cette attention dure un peu de tems, puiſque la grande lumiere l'oblige naturellement à ſe fermer pour éviter que le principal organe de la viſion ne ſoit bleſſé. Auſſi dans l'obſcurité ou dans une foible lumiere, on ne ſçauroit douter que la prunelle ne ſe mette dans ſon état naturel de dilatation, & qu'elle ne s'ouvre autant que le permet l'équilibre des muſcles qui compoſent la membrane Iris, comme il arrive à toutes les parties du corps des animaux qui ſe meuvent par des muſcles antagoniſtes.

L'Obſervation dont je parle dans ce Memoire, eſt aſſés commune, & ceux qui l'ont faite ont toujours remarqué la même choſe. Ils ont plongé dans l'eau la tête d'un Chat vivant, dont la prunelle peut ſe dilater extraordinairement, & auſſi-tôt elle s'ouvre toute entiere, quoique l'animal ſoit expoſé à des objets fort éclairés, & l'on peut voir alors diſtinctement les moindres parties qui ſont au fond l'œil.

J'entreprens donc d'expliquer ici par les loix de l'Optique:

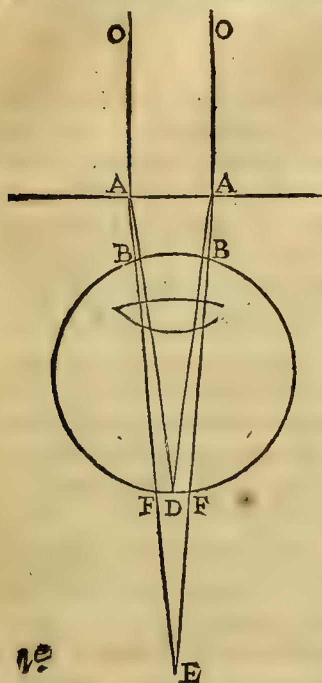
1°. Pourquoi les objets lumineux par leur preſence, n'obligent pas la prunelle de ce Chat de ſe fermer.

2°. Pourquoi l'on voit diſtinctement le fond de l'œil.

Soit dans la figure ſuivante un objet *O* lumineux ou fort éclairé, dont les raïons *OB* viennent comme paralleles entr'eux juſqu'à la cornée *BB*, l'objet *O* étant à une médiocre diſtance de l'œil. On ſçait que l'œil étant expoſé à l'air, la plus grande refraction des raïons *OB* ſe fait d'abord ſur la cornée, & qu'enſuite après deux autres refractions bien moindres que la premiere ſur les ſurfaces du cryſtallin, ces raïons s'aſſemblent en *D* ſur le fond de l'œil que nous appellons bien conformé.

Mais ſi l'œil *BBD* eſt plongé dans l'eau *AA*, en ſorte que ſa ſurface *AA* ſoit perpendiculaire aux raïons *OB*

qui viennent de l'objet *O* à l'œil, alors ces rayons *OB* rencontrant perpendiculairement la surface de l'eau *AA*, n'y souffriront aucune refraction, & ils entreront dans l'œil au travers de ses humeurs qui ne sont que peu differentes de l'eau en y souffrant peu de refraction; d'où il suit qu'ils auront une direction pour s'assembler vers *E* bien loin au delà de l'œil, & que par conséquent ils rencontreront le fond de l'œil en des points *FF* éloignés les uns des autres, au lieu de s'y assembler dans le même point *D*.



Mais les raïons du point lumineux *O* qui sont entrés dans l'œil occupant alors un espace fort considerable *FF* sur le fond de l'œil, n'y feront qu'une impression très-foible, au lieu qu'ils l'auroient touché très-vivement s'ils s'étoient rassemblés en *D*; c'est pourquoi cet objet lumineux *O* dans ce cas ne doit pas obliger la prunelle de se reserrer. De plus cet animal étant dans un état violent, fait attention à tout ce qui l'environne, ce qui doit encore l'obliger à tenir sa prunelle fort ouverte comme je l'ai remarqué cy-devant.

C'est pour cette raison que la nature a donné aux poissons qui vivent dans l'eau, un crystallin fort convexe & presque spherique, afin que les raïons des objets qui sont dans l'eau, lesquels ne souffrent que peu de refraction en passant par la cornée, pussent se détourner assés sur les surfaces du crystallin pour se rassembler sur le fond de l'œil. Et si l'on voit quelques plongeurs qui apperçoivent

dans l'eau des objets à une plus grande distance qu'ils ne feroient dans l'air, ce ne peut être qu'un cas particulier de la conformation de l'œil de ces Plongeurs, qui aïant la vûë fort courte à cause de la figure très-convexe de leur crystallin, peuvent voir très-distinctement dans l'eau comme les Poissons, des objets éloignés dont les raïons dans l'air concourroient entre le crystallin & le fond de l'œil, & rencontrant le fond de l'œil dans un espace considerable s'y confondroient, & par conséquent feroient une vision confuse.

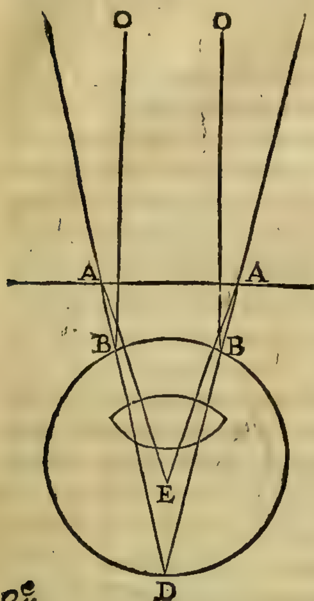
Il faut maintenant expliquer pourquoi l'œil du Chat étant plongé dans l'eau, on apperçoit distinctement toutes les parties du fond de l'œil comme s'il n'étoit point rempli d'humeurs.

Il est certain que plus les fenêtres d'une chambre sont grandes, les objets y seront d'autant plus éclairés, & qu'on pourra les voir plus distinctement; c'est pourquoi on pourra voir bien mieux les parties du fond de l'œil du Chat plongé dans l'eau quand la prunelle est fort dilatée, que si elle étoit reserrée. Mais ce n'est pas seulement la grande ouverture de la prunelle, qui fait qu'on peut voir distinctement les objets, puisque dans les hommes qui ont la goutte seréne, & dont la prunelle est fort ouverte, on ne peut rien appercevoir du fond de l'œil qui est exposé à l'air. C'est donc l'eau qui touche l'œil laquelle fait qu'on peut voir ces objets, & c'est ce qu'il faut expliquer par les mêmes principes d'Optique, dont nous nous sommes servis d'abord.

Lorsqu'un œil bien conformé est dans l'air, les raïons qui partent d'un point comme *D* de son fond, (*fig. suiv.*) aïant passé par les trois surfaces de ses humeurs, s'y détournent de telle maniere, qu'ils en sortent comme paralleles entr'eux; c'est pourquoi nous pourrions voir distinctement cet objet *D*, puisque des raïons paralleles ou comme paralleles font toûjours dans notre œil une vision distincte, cependant nous ne voïons pas cet objet *D*.

Examinons maintenant ce qui doit arriver à ces mêmes

raïons qui partent du point *D* du fond de l'œil dans l'animal lorſqu'il eſt plongé dans l'eau.



Soit comme cy-devant l'œil de l'animal *BBD* plongé dans l'eau, dont la ſurface eſt *AA*. Il s'enſuit que les raïons *DB* qui partent du point *D* du fond de l'œil, s'étant un peu détournés ou rompus ſur les deux ſurfaces du cryſtallin, doivent rencontrer la cornée étant encore divergens : mais comme à la ſortie de la cornée en *BB* ils rencontrent l'eau *AA*, dont la refraction n'eſt pas ſenſiblement differente de celle de l'humeur aqueuſe où ils paſſoient en touchant la cordée, ils doivent continuer leur route par la même ligne droite & reſter encore divergens juſqu'à la ſurface de l'eau en *A*, d'où enfin ils doivent ſortir pour entrer dans l'air étant encore plus divergens qu'ils n'étoient dans l'eau par les loix de la Dioptrique ; & par conſéquent en quelqu'endroit que nous placions notre œil pour recevoir ces raïons divergens, qui ſont alors dirigés comme s'ils venoient du point *E* plus proche de la cornée que le point D, nous pourrons appercevoir très-diſtinctement le point *D* comme placé en *E* & dans l'air.

C'eſt là ce que produit la ſurface plane de l'eau ſur ces raïons ; mais il y a encore une autre remarque à faire, qui nous fait connoître pourquoi nous ne voïons pas l'objet *D* du fond de l'œil quand il eſt hors de l'eau, & pourquoi nous le voïons quand il y eſt plongé.

La ſurface de tous les corps polis renvoïe la lumiere, & la renvoïe ou la réflechit d'autant plus fortement qu'elle

eſt plus polie ; & ſi ces corps polis ſont auſſi tranſparens, une partie de la lumiere paſſera au travers du corps, & une autre partie ſe réflechira, & ce ſera toûjours à proportion de la tranſparence & du poli. Mais comme nous n'avons point de corps dont la ſurface ſoit plus polie que celle des liquides, on pourroit dire qu'il entreroit dans l'œil expoſé à l'air, bien moins de raïons de lumiere qu'il n'en entre dans l'eau, ſi la cornée n'étoit toûjours enduite d'une liqueur claire & onctueuſe. Ce n'eſt donc pas par cette raiſon qu'on ne voit pas le fond de l'œil dont la cornée eſt expoſée à l'air, & qu'on le voit quand l'œil eſt dans l'eau ; car s'il ſe réflechit des raïons de la lumiere ſur la cornée dans l'air, il s'en réflechit auſſi ſur la ſurface de l'eau & preſqu'en égale quantité ; ce qui eſt contre l'opinion de quelques-uns, qui ont prétendu qu'il s'en perdoit beaucoup ſur la cornée dans l'air, & qui n'ont point fait attention qu'il ne s'en perdoit pas moins ſur la ſurface de l'eau.

Mais ce n'eſt pas tant la quanrité des raïons qui ſe réflechiſſent ſur la cornée ou ſur l'eau qu'il faut conſiderer, dans ce qui peut apporter quelqu'empêchement à une viſion bien claire, quoique les raïons ſoient diſpoſés comme il faut pour la faire, que la direction de ces mêmes raïons réflechis. Car ſi ces raïons réflechis ſont paralleles ou à peu près à l'axe de l'œil qui rencontre le principal organe de la viſion où l'on voit le plus diſtinctement les objets & où eſt peint l'objet qu'on conſidere attentivement, on doit voir une aſſés grande lumiere en cet endroit, laquelle par ſon éclat empêchera de diſtinguer ces objets, qui d'ailleurs ſont d'une couleur obſcure ; & c'eſt ce qui arrivera à la cornée d'un œil, quoique la lumiere ne l'éclaire que de biais. Car la cornée étant de figure convexe, il peut y avoir des raïons qui fraperont deſſus obliquement, leſquels ſeront dirigés ou à peu près ſuivant l'axe de l'œil de celui qui regarde ; ce qui n'arrive pas à une ſuperficie plane laquelle ſeroit perpendiculaire à cet axe, où ces raïons ſe réflechiroient ſuivant

la même inclinaiſon à la ſuperficie, avec laquelle ils l'auroient rencontrée. C'eſt pourquoi on pourra voir bien plus diſtinctement & ſans le mélange de cette lumiere étrangere, les parties du fond de l'œil du Chat plongé dans l'eau, que s'il étoit expoſé à l'air. C'eſt auſſi pour cette raiſon, que lorſqu'on eſt à l'air hors d'une chambre & qu'on regarde au travers des vitres quoique fort nettes, les objets qui y ſont, on ne peut les entrevoir qu'avec peine, à cauſe de l'inégalité de la ſurface du verre qui réflechit la lumiere de tous côtés.

On pourra faire l'experience de ce que j'avance ici, en regardant un objet au travers d'une bouteille de verre qui ſoit ronde, & enſuite au travers d'un morceau de glace plan, la lumiere donnant de même maniere ſur les ſurfaces ſpherique & plane de ces deux verres : car la tête de celui qui regarde de près, empêcheroit les raïons qui tomberoient ſur le verre plan, & qui pourroient ſe réflechir dans l'œil vers l'axe de la viſion ; mais ce ne ſera pas la même choſe ſur la ſurface du verre de la bouteille, où il y en aura toûjours qui entreront dans l'œil à peu près paralleles à l'axe, à cauſe de la figure convexe de la bouteille.

Dans tout ce que j'ai dit cy-deſſus, je n'ai point marqué quelle partie de l'œil je prenois pour le principal organe de la vûë ; & je ne croïois pas après toutes les raiſons que j'ai raportées dans le Memoire dont j'ai parlé d'abord, qu'il pût reſter aucun lieu de douter quelle étoit la partie qui doit être le principal organe de la viſion. Cependant un des plus celebres Anatomiſtes de cette Compagnie aïant examiné le fait qui eſt le ſujet de ce Memoire, & en aïant rendu raiſon d'une maniere fort ſçavante par le mouvement des eſprits animaux dans l'œil du Chat, prend parti pour la choroïde contre la retine, en ſuivant à ce qu'il dit le ſentiment de M. Mariotte.

La découverte de M. Mariotte eſt une des plus curieuſes qu'on ait faites dans la Phyſique ; & comme l'expe-

rience en eſt très-facile à faire, on ne ſçauroit en douter. Cependant je dis encore ici, que le défaut de viſion à l'endroit où la retine eſt percée par la choroïde, ne prouve rien contre la retine, & que la choroïde ne peut être conſiderée que comme un organe moïen qui communique à la retine l'ébranlement ou le mouvement qu'elle reçoit de la lumiere avec ſes differentes modifications. En effet peut-on rechercher le principal organe d'un ſens autre part que dans les nerfs qui ont communication avec le cerveau, & qui peuvent faire connoître à l'ame ſous differentes apparences ce qui ſe paſſe hors du corps, & cela par l'entremiſe d'un certain milieu propre à les mouvoir; car les nerfs ſont des parties trop délicates pour être expoſées à découvert.

Ce ſera la même choſe pour les autres ſens que pour la vûë, & l'on ne dira pas que la peau qui couvre tout le corps, ſoit le principal organe du toucher, ni que la membrane du tambour de l'oreille le ſoit de l'ouïe, non plus que la peau de la langue eſt celui du goût, à cauſe que lorſque cette peau eſt brûlée, on n'a plus aucun ſentiment des ſaveurs.

La couleur noire de la choroïde eſt très-propre pour être ſenſiblement ébranlée par tous les differens & les moindres mouvemens de la lumiere, comme on voit dans l'experience du papier blanc expoſé à un miroir ardent, qui ne peut s'enflammer à moins qu'il ne ſoit noirci; car le mouvement des particules du corps qui tranſmet la lumiere, ou la lumiere elle-même, agit fortement entre les pointes heriſſées des corps noirs où elle s'engage; au lieu qu'elle ne fait que ſe réflechir ſur les corps blancs qui ne ſont compoſés que de parties fort polies comme de petit miroirs. La retine ne ſera donc pas ébranlée par une reflexion des raïons lumineux ſur la choroïde qui eſt noire, comme prétend notre Anatomiſte. Enfin la concluſion de ſon Memoire me fait connoître qu'il n'eſt pas du ſentiment de M. Mariotte comme il dit, mais qu'il a ſuivi le mien en changeant ſeulement la définition du

du principal organe de la viſion qu'il donne à la choroïde & moi à la retine. Ainſi toute la difference qu'il y aura entre lui & moi ne ſera que du nom du principal organe, à l'explication près qu'il met dans une reflexion des raïons lumineux ſur la choroïde, & moi dans un ébranlement des parties de la choroïde pour ſe tranſmette au nerf optique ou à la retine.

Pour ce qui eſt du ſentiment de M. Mariotte, il croit que la choroïde eſt le principal & le ſeul organe de la viſion, & que c'eſt cette membrane toute ſeule qui porte au cerveau les ſenſations des couleurs, puiſqu'étant une production de la piemere, elle accompagne le nerf optique dans tout ſon chemin juſqu'à l'œil, où étant parvenuë elle forme la choroïde; & enfin, que le nerf optique ne ſert qu'à contenir les eſprits & qu'il n'a point de filets. On peut voir ce ſentiment expliqué fort au long avec toutes les raiſons qu'il apporte pour le ſoûtenir dans ſes lettres écrites au ſujet de ſa découverte, & dans celles de MM. Pecquet & Perrault, qui lui marquoient les difficultés qu'ils trouvoient à abandonner l'opinion des Anciens.

Mais il me ſemble qu'il n'eſt pas aiſé de concevoir, comment l'ame peut avoir la ſenſation d'une très-grande quantité d'objets qu'on apperçoit tout à la fois & dans l'ordre où ils ſont, ſans imaginer une infinité de filets très-deliés qui compoſent le nerf optique & qui ſont diſpoſés par ordre ſur toute la ſurface de la retine, ce que la ſeule membrane de la piemere ou de la choroïde ne pourroit pas faire ſans une grande confuſion, quand même elle auroit des filets comme ceux du nerf optique. Mais on voit que les fonctions que j'attribuë à la choroïde & à la retine, ſont toutes deux enſemble neceſſaires à la viſion, & que l'une ſans l'autre elle ne peut pas ſe faire.

Je pourrois encore ajoûter ici qu'on n'apperçoit les couleurs que par un ſentiment de chaleur; car perſonne ne doute qu'il n'y a point de lumiere ſans chaleur, ſoit que cette lumiere vienne directement du corps lumineux

ou par réflexion. Mais comme cette chaleur eſt ordinairement ſi foible, ſur tout ſi le corps lumineux eſt fort éloigné du corps qu'il éclaire, il falloit qu'il entrât dans l'œil une aſſés grande quantité de ces raïons, & qu'à même tems ils ſe raſſemblaſſent en un point ſur le corps noir de la choroïde, pour y faire une plus forte impreſſion, & pour ne faire aucune confuſion avec ceux qui viennent d'autres points lumineux, & tout proche, & modifiés en des manieres differentes que le ſens du toucher ne peut pas appercevoir. C'eſt une penſée qu'on pourroit à ce qu'il me ſemble, appuyer de très-fortes raiſons.

SUITE DES ESSAIS

DE CHIMIE

Art. IV. du Mercure.

PAR M. HOMBERG.

POur éviter toute équivoque, je n'appellerai Mercure que ce que l'on appelle ordinairement Vif-argent, c'eſt à dire un liquide reſſemblant parfaitement à du métal fondu, qui péſe à peu près autant que l'argent, & qui ne moüille que les métaux. Quoique je ſois perſuadé que le Mercure n'a pas le caractere des principes, qui eſt que ſa ſubſtance ne puiſſe par aucune analyſe être réduite en des matieres plus ſimples, je le mets néanmoins au nombre de mes Principes Chimiques, parce que cette analyſe n'a pas encore été trouvée, bien qu'il y ait lieu de croire qu'on pourra dans la ſuite la trouver, & qu'alors il en ſera rejetté, toutes les apparences étant que le Mercure eſt un composé.

La raiſon qui me le fait ſoupçonner, eſt qu'on le peut détruire; ce qui n'arrive jamais à un corps ſimple, & d'ailleurs après ſa deſtruction il ne reſte qu'une matiere

qui paroît ſimplement terreuſe, ſans laiſſer aucune marque des parties qui peuvent être entrées dans ſa compoſition, & ſans que je voïe encore aucun moïen pour les découvrir. Je ne ſuis donc aucunement inſtruit des parties qui le composent, & par conſéquent le Mercure eſt à mon égard comme un eſtre ſimple, qui doit trouver place parmi mes Principes Chimiques, juſques à ce qu'on ait découvert les parties qui le compoſent.

La maniere dont je me ſuis ſervi pour le détruire, eſt de changer premierement le Mercure coulant en métal parfait, en introduiſant dans ſa ſubſtance une quantité ſuffiſante de la matiere de la lumiere, ce qui ſe fait par une fort longue operation & avec beaucoup de dépenſe, comme je l'ai enſeigné dans mon article du Soufre principe, & quand il eſt devenu métal, il faut l'expoſer au verre ardant, où en peu de tems preſque toute ſa ſubſtance s'en va en fumée; & il ne reſte qu'une poudre terreuſe & legere, ſi c'eſt de l'argent qu'on a expoſé au verre ardant; ou un peu de terre, qui à la fin devient auſſi une matiere terreuſe & friable, ſi c'eſt de l'or qu'on a expoſé.

J'ai montré dans mon Article du Soufre principe, que le métal parfait n'eſt autre choſe que du Mercure très-pur, dont les petites parties ſont percées de toutes parts & remplies de la matiere de la lumiere, qui les lie & qui les unit enſemble en une maſſe; de ſorte que les parties du Mercure coulant, que j'ai ſuppoſé être des petites boules polies & ſolides, deviennent dans leur métallification des petits corps raboteux & percés de toutes parts, dont à la verité les trous ou les pertuis ſont remplis de la matiere de la lumiere, mais qui ne laiſſent pas de perdre par là leur premiere conformation & la poliſſure de leurs ſurfaces, qui eſt une des principales cauſes de la fluidité du Mercure.

Ainſi la ſubſtance du Mercure aïant changé abſolument de figure en devenant métal, il doit s'enſuivre, qu'après la deſtruction du métal au verre ardant, le réſidu

ne doit pas être du Mercure coulant, mais une matiere qui ne sera ni métal ni Mercure, & qui m'a paruë une matiere simplement terreuse; car il y a toute apparence, qu'il n'arrive autre chose au métal parfait pendant cette operation au Soleil, que la séparation seulement de la matiere de la lumiere d'avec les petites boules de Mercure que cette matiere avoit percé de toutes parts, & s'étoit logée dans les trous qu'elle y avoit faits, puisque l'union des deux faisoit le métal.

Or cette matiere aïant été chassée de ces trous, ils doivent rester vuides, & par conséquent ce qui étoit autrefois des petites boules solides de Mercure, doit devenir de petits corps spongieux ou percés à jour de toutes parts, que l'on pourroit comparer en quelque façon à la matiere des pierres ponces, & que l'on pourroit appeller le squelete ou les restes du Mercure; de sorte que l'on peut vraisemblablement conclure, que cette destruction du métal ne consiste pas en une séparation analytique des parties dont chaque petite boule de Mercure est composée, mais seulement en un simple brisement de ces petites boules par l'action violente des raïons concentrés du Soleil, qui néanmoins ne laissent pas de détruire absolument la figure de ces petites boules, en quoi consiste uniquement la forme & la substance du Mercure; car la solidité de ces petes boules étant un atribut essentiel du Mercure coulant aussi bien que la polissure, qu'elles perdent absolument & pour jamais par l'action que la matiere de la lumiere fait sur elles, ce qui étoit Mercure coulant avant la métallification, ne peut plus paroître sous la même forme après la destruction du métal, & n'est plus qu'une matiere simplement terreuse, qui se vitrifie au grand feu, comme c'est en effet ce que nous voïons arriver aux matieres qui restent après la destruction de l'or & de l'argent au verre ardant, dont les unes se fondent aisément & sans y ajoûter aucun fondant; & les autres ne se fondent qu'en y en ajoûtant, de la même maniere que se font les vitrifications de toutes les autres matieres terreuses les plus communes.

Nous pouvons donc considerer la figure du Mercure en trois états differens ; le premier est, lorsqu'il est en sa forme de Mercure coulant ; le second est, lorsqu'il est devenu métal ; & le troisiéme est celui qu'il prend après la destruction du métal. Dans le premier état sa matiere consiste en petites boules solides & fort polies ; dans le second elle consiste en ces mêmes petites boules que la matiere de la lumiere peu à peu a percées de toutes parts de trous fort fins, & qui s'est logée à demeure dans les trous qu'elle y a faits ; dans le troisiéme état elle consiste en ces mêmes petites boules percées de toutes parts, mais dont les trous sont vuides, & au travers desquels il a passé une si grande quantité de matiere de la lumiere tout à la fois pendant la destruction du métal ; que les petits trous dont ces boules avoient été percées d'abord, se sont confondus, & sont devenus si grands, qu'ils n'ont pû arrêter & retenir la matiere de la lumiere, comme ils avoient fait étant encore dans leur premiere petitesse, à peu près comme l'eau qui se soûtient & reste dans des tuïaux fort fins & capillaires, s'écoule promptement & ne sçauroit s'arrêter dans des tuïaux un peu larges.

Dans le premier cas ces boules sont du vrai Mercure, dans le second ce n'est plus du Mercure, mais du métal, qui a été autrefois du Mercure ; & dans le troisiéme cas, ce sont les fragmens & les parties ruinées du Mercure qui étoit entré dans la composition du métal, & que l'on doit prendre en cet état pour une matiere simplement terreuse, aussi peu disposée de redevenir Mercure ou métal, que l'est la terre glaise ou toute autre sorte de terre.

Tout ce que nous venons de dire de la destruction de l'or & de l'argent, étant vrai, c'est à dire, que la grande quantité de raïons du Soleil qui partent du verre ardant, chassent la matiere de la lumiere qui s'étoit arrêtée dans les petits pertuis des boules du Mercure, qu'ils les élargissent trop & les corrompent, de sorte que ces pertuis ne retiennent plus la matiere de la lumiere, & que ces

boules ainſi corrompuës reſtent après la deſtruction du métal en forme d'une matiere ſimplement terreuſe, il ſembleroit que cette matiere devroit égaler à peu près en poids la quantité du métal qui a été détruit, parce que le Mercure qui fait la plus grande partie du métal, aura toûjours ſon même poids, qu'il ſoit briſé en fragmens, ou qu'il ſoit conſervé en boules entieres; cependant nous voïons qu'il ne reſte après la deſtruction d'une certaine quantité d'or, qu'environ un trentiéme d'une terre vitrifiée, & un ſoixantiéme environ d'une poudre terreuſe après la deſtruction de l'argent; mais on n'en ſera pas étonné quand on conſiderera, que les raïons de lumiere, paſſant avec une viteſſe extrême au travers de la maſſe du métal fondu, emportent avec eux en forme de fumée la plus grande partie du métal, à meſure qu'il ſe détruit, comme tous ceux qui ont vû faire cette operation au verre ardant, l'ont pû obſerver; & comme la fumée qui s'éleve de l'argent eſt beaucoup plus épaiſſe, & par conſéquent en plus grande quantité que celle qui s'éleve de l'or, la diſſipation des parties détruites de l'argent doit être plus grande que celle de l'or; auſſi voïons-nous, que l'un laiſſe deux fois autant de matiere terreuſe après ſa deſtruction que l'autre, & qu'il n'en reſte entre les mains de celui qui conduit l'operation, qu'une très-petite partie, qui a échapé à l'effort violent & prompt des raïons concentrés du Soleil.

Mais pour mieux concevoir de quelle maniere le Mercure devenu métal, peut être détruit par la pénetration des raïons du Soleil, qui ſont la même matiere de la lumiere, qui par une autre pénétration, avoit changé ce même Mercure en métal parfait, il ſera bon d'établir nettement ce que j'entens par métal. Je dis donc que le métal parfait eſt du Mercure très-pur, dont les petites boules ont été percées peu à peu de toutes parts par la matiere de la lumiere; que les trous ou les pertuis qu'elle y a faits, ſont entierement pleins de cette matiere; que ces pertuis ſont ſi menus, que la matiere de la lumiere

qui s'y eſt introduite, y eſt reſtée attachée par ſon gluten naturel; que les extremités des pertuis d'une petite boule de Mercure, touchant les extremités des pertuis de pluſieurs autres boules de Mercure, les attachent enſemble par la partie de la matiere de la lumiere qui ſe trouve aux extremités des pertuis qui ſe touchent immédiatement, & que de cette maniere toute la maſſe du Mercure ſe doit attacher enſemble. J'appelle métal la maſſe du Mercure dont les parties ſont ainſi attachées & unies enſemble par la matiere de la lumiere : Et j'appelle Soufre métallique la matiere de la lumiere qui a penetré les globules du Mercure, & qui par ſon gluten naturel, eſt reſtée dedans les pertuis qu'elle y a faits, ſans que cette matiere ait changé en aucune façon; de ſorte que ſi par quelque accident elle peut reſſortir de ces pertuis, elle rentrera dans la grande maſſe de la matiere de la lumiere qui occupe tout l'eſpace de l'univers; & en cet état elle ne fera plus la fonction de Soufre métallique, mais ſimplement celle du Soufre principe, juſques à ce qu'elle ſe ſoit réintroduite de nouveau dans d'autres globules de Mercure, & elle ſera auſſi propre à devenir un Soufre animal, vegetal ou bitumineux, qu'à redevenir un Soufre métallique, comme je l'ai expliqué amplement dans mes Memoires du Soufre principe.

Cette deſcription du métal ne convient pas aux moindres métaux comme nous le ferons voir dans la ſuite de ce Memoire, mais ſeulement aux métaux parfaits, c'eſt à dire à l'or & à l'argent. La difference de ces deux métaux me paroît ne conſiſter, qu'en ce que les petites boules du Mercure qui entrent dans la compoſition de l'un, ſont percées d'outre en outre par la plus grande quantité de trous ou de pertuis que les ſurfaces de ces boules ſont capables de recevoir; & que celles de l'autre n'ont pas été percées d'outre en outre par la matiere de la lumiere, qui n'y a fait ſeulement que des trous aſſés profonds pour s'y loger ſimplement, & en bien moindre quantité que dans le premier; de ſorte que toute la ſur-

face de ces boules n'en eſt pas percée, mais ſeulement en autant d'endroits qu'il étoit neceſſaire pour qu'elles ſe puiſſent coller ou s'attacher enſemble & devenir métal; ainſi dans l'un il ſe trouve une très-grande quantité de matiere de la lumiere ou de Soufre métallique, qui traverſe de toutes parts la ſubſtance des boules du Mercure, & qui en couvre toutes les ſurfaces; & dans l'autre il ſe trouve peu de Soufre métallique, qui ne traverſe pas toute la ſubſtance des boules du Mercure, & qui ne les perce que peu profondement, & en peu d'endroits; de ſorte qu'il n'y a que peu de Soufre métallique ſur leurs ſuperficies, & par conſéquent qu'il en entre beaucoup moins dans la compoſition de celui-ci que dans la compoſition de l'autre; c'eſt l'or qui eſt ſi riche en Soufre métallique, & c'eſt l'argent qui en a moins; auſſi leur en eſt-il reſté des marques inconteſtables, car la quantité de Soufre métallique qui ſe trouve dans l'or, aïant couvert preſque toutes les ſurfaces des boules de ſon Mercure, il en a effacé la couleur naturelle, & les a teints de ſa propre couleur, ce qui fait la couleur jaune de l'or; & cette même quantité de Soufre aïant penetré & rempli toute la ſubſtance de ce Mercure, a ajoûté ſon poids à celui du Mercure; & comme les parties de ce Soufre ſont les plus petites de tous les corps que nous connoiſſons, elles ſe ſont introduites dans le Mercure ſans en augmenter le volume, ce qui fait le grand poids de l'or en ſi peu de volume, mais le Soufre métallique qui entre dans la compoſition de l'argent, étant en très-petite quantité, il n'a pas augmenté le poids du Mercure & n'en a pû changer la couleur naturelle, ce qui fait la blancheur de l'argent, & ſon peu de poids en le comparant à l'or.

La matiere de la lumiere qui penetre peu à peu les boules du Mercure pour les mettre en état de ſe pouvoir lier enſemble & devenir métal, ne peuvent pas faire cette pénetration qu'en emploïant beaucoup de temps; & comme nous avons ſuppoſé que dans l'argent, la matiere

tiere de la lumiere n'a penetré les boules du Mercure que peu avant dans la ſubſtance de ces boules, & que les trous qu'elle y a faits ſont en petit nombre, & qu'au contraire dans l'or les boules du Mercure ont été percées d'outre en outre, & que les pertuis qui y ont été faits, y ſont en auſſi grand nombre que les ſurfaces de ces boules ont été capables d'en recevoir, il doit s'enſuivre que pour la perfection de l'argent, la matiere de la lumiere doit emploïer bien moins de tems que pour la perfection de l'or; & que par la même raiſon tout or pourroit bien avoir été argent avant que d'avoir pû atteindre à ſa propre perfection, & par conſéquent auſſi que tout argent peut devenir or, pourvû qu'il ſoit en telle ſituation, que la matiere de la lumiere y puiſſe continuer ſon action; on en pourroit même tirer encore cette conſéquence, qu'il doit ſe trouver un métal mitoïen entre l'or & l'argent; car il eſt bien difficile qu'on rencontre toûjours préciſement dans les mines la perfection de l'or ou celle de l'argent; les experiences ſuivantes confirmeront & éclairciront ces idées.

Prenez un marc ou deux d'argent; faites-en le départ, pour être aſſuré qu'il ne contienne pas quelques parcelles d'or, fondez cet argent une centaine de fois de ſuite, en le tenant à chaque fois au moins une heure en fonte; faites-en après le départ, vous en ſéparerez une quantité très-ſenſible d'or qui n'y étoit pas auparavant, puiſqu'en premier lieu par la même épreuve du départ, on en avoit ſeparé tout ce qu'il pouvoit contenir d'or.

La matiere de la lumiere qui compoſe avec l'huile du charbon la flame qui met l'argent en fonte, touche & frappe immédiatement chaque petit globule de l'argent pendant tout le tems qu'il eſt en fonte, & s'y enfonce de plus en plus; & comme tous ces globules dans cette maſſe d'argent ne ſont pas également penetrés par la matiere de la lumiere, c'eſt à dire que quelques-uns approchent plus de la perfection de l'or, ceux qui ſont les plus proches achevent pendant ces differentes fontes

d'être penetrés au point qu'il faut pour paroître de l'or, & ils en sont séparés par le départ, & sont du veritable or à toutes épreuves.

Cette operation est longue & pénible, mais convaincante. En voici une seconde qui se fait en moins de tems, & qui ne laisse pas de prouver fort bien que dans l'argent il y a des parties qui ne sont pas encore de l'or, mais qui le deviennent aisément. Prenez un marc d'argent, dissolvez-le dans l'eau forte, séparez-en tout ce qui n'a pas été dissous & qui est resté au fond du vaisseau; précipitez cette dissolution par le sel commun, édulcorez le precipité & séchez-le; ajoûtez à cette chaux d'argent la moitié de son poids de Régule de Mars bien rectifié & en poudre; mêlez bien & distillez au feu de sable par la cornuë, il en sortira environ trois onces ou plus de beure d'antimoine; poussez le feu jusques à la derniere rigueur, l'argent restera au fond de la cornuë mêlé d'une partie de Régule; mettez cet argent dans un creuset ouvert au feu de fonte; laissez-le fumer jusqu'à ce qu'il n'en sorte plus de fumée, c'est à dire, jusques à ce que tout le Régule en soit évaporé; refondez cet argent encore une fois ou deux dans des creusets neufs avec un peu de borrax & de salpêtre, il sera plus beau & plus doux que l'argent de coupelle; mettez cet argent en grenailles; dissolvez-le dans l'eau forte, il vous restera beaucoup de pailletes noires, fondez-les, ce sera de l'or: faites cette operation une seconde fois avec ce même argent & du semblable Régule, il vous restera très-peu de paillettes noires: réïterez cette operation pour la troisiéme fois avec le même argent, vous n'en aurez plus de paillettes noires. Dans la premiere operation tous les globules qui sont fort proches de la perfection de l'or, achevent de se perfectionner, & tombent en paillettes noires: Dans la seconde, il s'en acheve encore quelques-uns; & dans la troisiéme il ne s'en trouve plus, ayant été épuisés par les deux premieres operations. On ne pourra pas dire ici, que le Régule de Mars ait produit ces pail-

lettres noires, car il s'en feroit trouvé une auſſi grande quantité dans la ſecoude & dans la troiſiéme operations, qu'il en eſt reſté dans la premiere ; cependant il n'y en a que très-peu dans la ſeconde ; & il n'y en a point du tout dans la troiſiéme.

Ajoûtez, que l'on trouve très-ſouvent de l'or dans les mines qui eſt plus pâle que l'or fin ne doit être, ſans qu'on en puiſſe ſéparer aucunes parties d'argent, & qui par quelques fontes acheve de ſe perfectionner ; & pour lors il paroît de la couleur qu'il doit avoir. L'on trouve donc dans l'argent une matiere qui devient or, & dans l'or une matiere blanchâtre, qui par le feu acheve de prendre la vraïe couleur d'or. Ce ſont ces deux matieres qui font le métal moïen entre l'or & l'argent, mais qui ne demeurent pas long-tems dans cet état, chaque fonte les approchant de plus en plus à la perfection de l'or.

Nous avons remarqué ci-deſſus, que les extrémitez des trous, dont les boules du Mercure ſont percées, en ſe touchant immediatement, joignent ces boules enſemble par le moïen du ſoufre métallique, qui ſe trouve aux extrémites de ces trous, & que ce ſont là les ſeuls liens par où les parties du métal ſont liées enſemble ; Nous venons de remarquer auſſi, que dans l'or toute la ſuperficie des boules du Mercure eſt percée de trous, c'eſt-à-dire, qu'ils y ſont fort près les uns des autres, & que dans l'argent ces trous ſont plus rares, il doit donc s'enſuivre, que les interſtices de ces trous, ou les eſpaces entre les liens dont les parties de l'argent ſont liées, ſont plus grands que les eſpaces qui ſont entre les liens dont les parties de l'or ſont liées ; j'appelle ces interſtices, ou les eſpaces qui ſe trouvent entre les liens dont les parties d'un métal ſont liées enſemble, les pores du métal ; & comme la diſſolution d'un corps n'eſt autre choſe que l'introduction dans les pores de ce corps d'un liquide étranger, qui ſoit capable d'en deſunir ou d'en écarter les parties : ce liquide étranger ou ce diſſolvant, pour pouvoir faire la deſunion des parties, doit être proportionné

aux pores dans lesquels il doit entrer; & par conséquent le dissolvant de l'or sera different du dissolvant de l'argent, puisque l'un a les pores fort grands, & que l'autre les a fort petits; aussi voïons-nous que les eaux-fortes, qui sont les dissolvans de l'argent, ne dissolvent pas l'or; & que les eaux regales, qui dissolvent l'or, ne dissolvent pas l'argent.

Ces dissolvans, ne pénetrant pas dans la substance même du métal, ne sçauroit le détruire; car la matiere qui lie les parties du métal, étant la plus petite de toutes celles qui existent, & étant logée dans des pertuis aussi petits qu'elle, le dissolvant n'y sçauroit entrer pour l'en faire sortir & la séparer d'avec le mercure, ce qui seroit détruire le métal. Ils ne font donc autre chose en s'introduisant dans les pores du metal, que d'écarter seulement les petites boules de mercure les unes des autres, le soufre métallique qui les avoit collées ou liées ensemble restant toûjours dans le même état, en la même quantité & aux mêmes endroits où il étoit auparavant, & par conséquent les parties du métal desunies par le dissolvant, sont toujours disposées à se rejoindre ensemble lorsqu'elles peuvent se retoucher immédiatement; & alors elles reparoissoient dans la même forme de métal qu'elles avoient avant leur dissolution.

Il arrive dans la fonte du métal par le grand feu, à peu près la même chose que ce que nous venons de remarquer dans la dissolution faite par les liqueurs aqueuses; la flame qui y sert de dissolvant, s'introduit dans les pores du métal & en écarte simplement les parties, sans détruire en aucune façon le soufre métallique qui les avoit liées ensemble; & cela par la même raison que nous venons d'alleguer tout à l'heure. Il y a cependant cette différence entre la fonte & ces autres dissolutions, que tout aussi-tôt que la flame cesse, le métal cesse aussi d'être fondu, & les parties se rejoignent ensemble dans la même forme qu'elles étoient avant la fonte; ce qui n'arrive pas au métal dissous par une liqueur aqueuse, parce que

ſes parties détruites reſtent mêlées avec le diſſolvant, juſques à ce que par une induſtrie on en ſépare tout le diſſolvant, & que par là les parties du métal ſe puiſſent retoucher immédiatement & ſe rejoindre.

La raiſon de cette différence eſt que la flame, qui eſt le diſſolvant dans la fonte, eſt plus legere que l'air qui eſt à l'entour de nous; & comme elle eſt un liquide auſſi-bien que l'air, ces deux liquides ſe rangent ſelon les loix de l'équilibre des liqueurs, où le plus leger eſt toûjours enlevé par le plus peſant; ainſi l'air ambiant aïant enlevé la flame qui s'étoit introduite parmi les parties du métal & qui les enveloppoit, rien ne les empêche plus de ſe toucher immédiatement; & comme la flame n'eſt pas capable de détruire ou d'enlever le ſoufre métallique qui ſe trouve aux extremités des pertuits creuſés dans les boules du Mercure, ce ſoufre ſe touchant immédiatement, ſe réprend & rejoint de nouveau les boules du Mercure en une maſſe de métal.

Mais dans la diſſolution faite par une liqueur aqueuſe, cette liqueur étant plus peſante que l'air qui l'environne, elle reſte toûjours dans le même lieu & enveloppe les parties du métal, & les empêche par-là de ſe toucher immédiatement & de ſe rejoindre en une maſſe de métal, juſques à ce que par le grand feu on la réduiſe en vapeurs, qui ſont plus legeres que l'air, & en ſont enlevées comme dans le cas précédent, & les parties du métal ſe rejoignent de la même maniere en une maſſe ſolide, comme elles avoient été auparavant.

J'examinerai les moindres métaux dans un autre Memoire, & j'y ajoûterai le reſte de mes obſervations ſur le Mercure.

PROBLEME GEOMETRIQUE

PAR M. PARENT.

1709. 23. Mars.

TRouver des Cylindres, des Cônes circulaires, elliptiques, paraboliques, entiers ou tronqués; des Segmens de sphére, des Paraboloïdes, &c. égaux en même tems en surface courbe & en solidité avec une même sphére.

1°. Soit EB le raïon de la Sphére proposée $ACBDE$ $=r$, (1. *fig.*) $ACBD$ sa circonference $=c$, on aura sa surface $=2rc$, & sa solidité $=\frac{2}{3}cr^2$, ce qui est connu de tous les Geométres.

Prenant donc pour la valeur d'r, le nombre 100,000, par exemple, on aura pour le circuit $ACBD$, 628, 318, suivant la proportion de Ludolphe de Cologne, à moins d'une unité près; pour la surface de la sphére, 125, 663, 600,000, & pour sa solidité, 4,188,786,666,666,666.

2°. Soit maintenant $AGDCE$ (2. *fig.*) un Cylindre circulaire droit, qui doive avoir le raport proposé avec la sphére cy-dessus. Soit nommé le raïon AF de sa base (m), & sa hauteur AG, l, qui marquent deux quantités inconnuës. On trouvera le circuit $AECA$ de cette bâse par cette analogie $r.c::m.\frac{cm}{r}$. D'où l'on tirera $\frac{cml}{r}$ pour la surface convexe du Cylindre qui doit être égale à la surface sphérique proposée $2rc$. D'où l'on tire pour une premiere valeur de l'inconnuë l; $\frac{2r^2}{m}$.

On aura aussi pour bâse du Cylindre; $\frac{cm^2}{2r}$, ce qui donnera sa solidité $=\frac{cm^2l}{2r}$, qui doit être encore égale à celle de la même sphére; $\frac{2}{3}cr^2$, d'où l'on tire une 2e valeur de l'inconnuë $l=\frac{4r^3}{3m^2}$.

Egalant donc maintenant ces deux valeurs de l, on en tire l'égalité déterminée $\frac{4r^3}{3m^2} = \frac{2r^2}{m}$, & enfin $m = \frac{2}{3} r$, ou $AF = \frac{2}{3}\ EB$; $AC = \frac{2}{3}\ AB$: d'où l'on tire $l = \frac{2r^2}{\frac{2}{3}r} = 3\ r$, c'est à dire $AG = 3\ BE$, & $\frac{2}{3}\ AG = 2\ BE = AB$. Donc $AC :: AB :: AG$, qui est une proprieté singuliere de la Sphére & du Cylindre ainsi comparez. Il est évident qu'on a aussi $AC . AG :: AC^2 . AB^2 :: 4 . 9$, ce qui détermine ce Cylindre à être unique en son espéce. Aïant donc une telle Sphére, rien n'est plus aisé, que de trouver un tel Cylindre, & tout au contraire.

Delà on tire AF de 66,666 centmiliémes du raïon de la Sphére, $AECA$ de 418,874, & AG de 300,000, sçavoir à moins d'une unité près. La surface du Cylindre sera donc $= 125, 663, 700,000$, qui ne differe de celle de la Sphére que de $\frac{1}{1,256,637}$; & sa solidité sera de 4,188,790, 000,950,000, qui n'est différente de celle de la même Sphére que de $\frac{1}{418,879}$; ce qui vient de ce que la proportion de r, à c, qu'on a prise, n'est juste qu'à environ une unité près.

3°. Si l'on suppose un Segment sphérique $ACBG$ (3. *fig.*) dont C soit le pôle, $AGBA$ la bâse, qui ait AB pour diametre, & F pour centre, en sorte que CF soit l'axe du Segment; soit aussi CB la distance de son pôle à sa bâse. Le cercle dont CB seroit raïon sera égal à la surface convexe du Segment $ACBG$; ce qui est connu de tous les Geométres. Si l'on suppose donc que ce Segment soit égal en surface convexe & en solidité avec la Sphére précedente, dont la surface vaut 4 fois celle de son grand cercle, il est évident que CB sera double du raïon de ce grand cercle, ou $= 2r$, tels que soient la hauteur CF, & le diametre AB, ce qui est déja une proprieté singuliere. Il ne reste donc que de nommer CF par une inconnuë (u) par exemple; ce qui donnera $BF^2 = 4r^2 - u^2$, & $AB^2 = 16r^2 - 4u^2$. Donc $\overline{2CB^2 + FB^2} \times \frac{1}{3} CF \times \frac{c}{8r}$ (que j'ai

démontré l'année derniere en cette Assemblée valoir toûjours la solidité d'un Segment sphérique) vaudra $\frac{\overline{6r^2u-u^3}\times c}{6r}$, qui doit être égale à la Surface sphérique, $\frac{2}{3}cr^2$. D'où l'on tire l'égalité $u^3=6r^2u-4r^3$, qui est dans le cas de la Trisection de l'angle, & qui ne laisse pas de donner pour les 2 valeurs de (u) ou de CF, $2r$, &, $r\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, ce qu'il est aisé à voir en sustituant ces valeurs d'u, & d'u^3, dans l'équation cy-dessus. Or la derniere valeur de $CF=2r=CB$, fait voir que la Sphére proposée est elle-même un des Segmens cherchés renfermés dans l'équation $u^3-6r^2u-4r^3$.

On tire de l'autre valeur de CF cette proprieté singuliere; sçavoir, que le raïon de la Sphére proposée, a même rapport au côté du quarré inscrit dans son grand cercle; que le côté du 12 gône inscrit au même cercle, à la hauteur CF. De sorte que l'on peut trouver en divisant un arc en deux également, la valeur de CF qui vient sous la forme de l'arc à diviser en 3.

Cette derniere valeur de CF donne $CF=73205$ 100,000 émes du raïon de la Sphére proposée : $BF=$ 186,121 ; $AB=372,242$; le circuit $AGBA=1,169,431$; $CB=200,000$; son circuit$=1,256,636$; ce qui donne pour la surface du Segment proposé 125,663,600,000 précisement comme pour la Sphére proposée ; & pour sa solidité 4,188,723,938,741,433, qui ne differe de celle de la Sphére que d'environ $\frac{1}{66,000}$ du raïon.

On trouvera aussi le diametre CD de 546,417, & le raïon CE de 273,208.

Toutes ces lignes sont toûjours à moins d'une unité près, & à l'égard de la difference de la solidité, elle vient en partie du raport $\frac{c}{r}$ qui n'est pas exact, & en partie de l'unité cy-dessus, à cause des racines qu'il faut tirer.

4°. Soit un Cône droit circulaire $ABEC$ (4. & 5. *fig.*) qu'il faille comparer de même avec la Sphére proposée. Soit sa hauteur ou axe AD, $=p$, & le raïon BD de sa

bâse

bâſe $BECB = n$, qui ſont deux quantitez inconnuës ; on aura encore le circuit $BECB$ de la bâſe, par la même analogie ; $r. c :: n. \frac{cn}{r}$, lequel circuit étant multiplié par le côté $AB = \sqrt{p^2 + n^2}$, donnera ; $\frac{cn}{2r}\sqrt{p^2+n^2}$, pour la ſurface de ce cône, qui doit être égale à celle de la Sphére propoſée, ſçavoir $2rc$, ce qui donne une premiére égalité $\frac{16r^4 - n^4}{n^2} = p^2$.

On a auſſi pour la bâſe du cône $\frac{cn^2}{2r}$, & pour la ſolidité $\frac{cpn^2}{6r}$, laquelle doit être égale à celle de la Sphére propoſée, $\frac{2}{3}cr^2$, ce qui donne une 2e égalité, $\frac{16r^6}{n^4} = p^2$.

Comparant maintenant ces 2 valeurs de p^2, on en tire l'équation déterminée, $16r^4n^2 - n^6 = 16r^6$. Et ſuppoſant $n^2 = rq$, on change cette derniére en cette autre, $q - 16r^2q + 16r^3 = 0$, qui eſt dans le cas de la Triſection de l'arc circulaire.

C'eſt pourquoi pour la réſoudre, je fais les trois analogies ſuivantes :

Comme la racine du tiers du Coëfficient, $\frac{4r\sqrt{3}}{3} =$ 230, 940 milliémes de r,
Et au ſinus total 10, 000, 000 ;
Ainſi l'Abſolu diviſé par les $\frac{2}{3}$ du Coëfficient, ſçavoir $\frac{3}{2}r = 150, 000$,
A un quatriéme terme 6, 495 190,

Qui eſt le ſinus de 40 deg. $\frac{1}{2}$, dont le $\frac{1}{3}$ eſt 13 deg. $\frac{1}{2}$ qui a pour ſinus 2, 334, 454 ; dont le double 4, 668, 908 eſt la corde des trois côtez du 40 gône inſcrit. Ce qui me donne la 2e analogie ;

Comme le ſinus total 10, 000, 000,
Eſt à 230, 940 ci-deſſus ;
Ainſi 4, 668, 908 trouvé par la premiére analogie,
A un quatriéme terme 107, 823, qui eſt la moindre valeur de q.

J'ôte ensuite 13 deg. $\frac{1}{2}$ cy-dessus de 60 deg. (nombre absolu) il reste 46 deg. $\frac{1}{2}$ qui a pour sinus 7,253,744, dont le double est 14,507,488 ; & je fais la troisiéme analogie :

Comme le sinus total 10,000,000,
Est à 230,940, cy-dessus ;
Ainsi 14,507,488, trouvé par la 2e analogie,
A un quatriéme terme 335,035, qui est la plus grande valeur de q.

On tire de ces deux valeurs de q, deux valeurs de p ou de AD, sçavoir 370,978, &, 119,390. Et deux valeurs de AB, sçavoir 385,237, &, 218,534 : on a pour celles de BD, 103,838, &, 183,039 : pour les circuits $BECB$, 652,432, &, 1,150,066, à moins d'$\frac{1}{100,000}$ de r. Les surfaces sont 125,670,565,810, &, 125,663,700,000, dont les différences sont $\frac{1}{18,000}$, & $\frac{1}{125,000}$; les soliditez sont 4188,788 896,797,941, & 4,188,737,073,538,310, dont les différences sont $\frac{1}{2,000,000}$, & $\frac{1}{83,000}$, tant à cause des racines à tirer, que du rapport $\frac{r}{c}$ que l'on n'a pas exact.

5°. Soit $AHKF$ un Paraboloïde droit, (*6. & 7. fig.*) qu'il faille égaler de la même maniere avec la même sphére. Soit son parametre p, sa hauteur $AC = s$, qui sont toûjours deux inconnuës. On aura donc pour le raïon CH de sa bâse, $\sqrt{ps}$ (par la nature de la Parabole simple) ; ce qui donnera $\frac{c}{r}\sqrt{ps}$ pour le circuit de la même bâse. Donc la surface de cette même bâse $= \frac{cps}{2r}$, & la solidité du Paraboloïde $= \frac{cps^2}{4r}$, (ce qui est connu de tous les Geométres), laquelle doit être égale à celle de la sphére proposée, sçavoir $\frac{2}{3}cr^2$, ce qui donne l'égalité ; $p = \frac{8r^3}{3s^2}$.

Si l'on décrit aussi du pôle A deux cercles paralleles, & indefiniment proches GN, IP sur la surface de ce Solide, ils comprendront une espace qui aura la figure d'un Cône tronqué, & qui sera le produit de son côté CI ou

NP par ſon circuit moïen, ou par un des deux GN, IP; à cauſe qu'ils ſont infiniment égaux. Soient donc L, R, les centres des cercles GN, IP; LG, RI, leurs raïons; GO une perpendiculaire au petit côté GI, qui rencontre l'axe AC en O : on aura (en nommant AL, x,) $GL = \sqrt{px}$, & $LO = \frac{1}{2}p$. Et menant la perpendiculaire GQ ſur IR; on aura $GQ = LR = dx$. De plus les triangles GQI, GLO, rectangles en Q & L, ont encore les angles IGQ, OGL, égaux, ce qui donnera l'analogie : ($GL = \sqrt{px}. GO = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2} :: GQ = dx. GI = \frac{dx}{\sqrt{px}} \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$). On aura auſſi le circuit $GRN = \frac{c}{r}\sqrt{px}$, qui étant multiplié par GI, donnera, $\frac{dxc}{r}\sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$, pour la valeur de la petite zône GP, & de toutes ſes pareilles, qui couvrent la ſurface du Paraboloïde; dont il faut trouver la ſomme infinie.

Pour cet effet appellant (u) $x + \frac{1}{4}p$, on aura $u - \frac{1}{4}p = x$, & $du = dx$; ce qui changera la valeur de cette zône en cette autre, $\frac{c}{r}\sqrt{p}\, u^{\frac{1}{2}} du$, dont l'Intégrale $= \frac{2}{3}\sqrt{p}\frac{c\sqrt{u^3}}{r} \pm g$. Et pour trouver la valeur de la conſtante inconnuë g, je conſidere que l'abſciſſe (u) commence au-deſſus de A en M; en ſorte que $AM = \frac{1}{4}p$; & que quand $u = \frac{1}{4}p$, ou, $u^3 = \frac{p^3}{64}$; alors l'intégrale $\frac{2c}{3r}\sqrt{pu^3} \pm g$, doit être $= 0$; ce qui donne légalité $\frac{2c}{3r}\sqrt{\frac{p4}{64}} = g = \frac{cp^2}{12r}$; donc l'Intégrale cy-deſſus $= \frac{c}{12r} \times \overline{8\sqrt{pu^3} = p^2}$; ou remettant la valeur de u, ſçavoir $\frac{1}{4}p + x$, on la change en cette autre . . . .
$\frac{c}{12r} \times \sqrt{p \times \overline{p + 4x^3}} - p^2 = \frac{c}{12r} \times \overline{\overline{p + 4s}\sqrt{p^2 + 4sp} - p^2}$, pour tout le Paraboloïde, en changeant x en s; laquelle doit être égale à la ſurface de la Sphére, $2rc$; ce qui donne l'égalité $144r^4 + 12r^2p^2 = 3p^3s + 12s^2p^2 + 16s^3p$; dans laquelle ſubſtituant les valeurs de p, tirées de la 1e équation, il vient l'égalité déterminée, $s^6 - \frac{27s^5}{8} + 25s^3 - 25 + \frac{4}{5} = 0$, laquelle a deux racines vraïes, ſçavoir, 319,418, &, 77,043,

cent milliémes de r. D'où l'on tire $p = 26,136,\&,449,265$; $HC = 91,370$, & $186,045$; $HKFH = 574,094$, & $151,079$; ce qui donne pour les ſurfaces des deux Solides, $125,662,164,653$, & $125,667,416,062$, qui ne différent de celle de la Sphére propoſée que de $\frac{1}{62,831}$, ou $\frac{1}{31,000}$, & pour leurs ſoliditez, $4,188,765,304,442,510$, & , $4,188,790,292,404,997$, qui ne différent de celles de la même Sphére que d'environ $\frac{1}{209,000}$, ou $\frac{1}{418,000}$; ce qui vient des cauſes qu'on a apportées cy-devant pluſieurs fois.

6°. Pour trouver une infinité de Cônes tronquez, (9. & 8. *fig.*) tous égaux en ſurface en ſolidité à la même Sphére propoſée; ſoit leur hauteur $ef = z$; ſoit la ſomme des raïons des deux bâſes ae, df, $= x$; & leur différence $= y$, qui ſont trois quantitez variables, on aura donc pour le plus grand df des deux raïons, $\frac{x+y}{2}$; & pour le moindre ae, $\frac{x+y}{2}$, ce qui eſt connu de tous les Géométres. On aura auſſi pour le raïon gi moïen arithmétique entre ces deux, $\frac{x}{2}$, & pour ſon circuit gmh, $\frac{x}{2} \times \frac{c}{r}$, & ſuivant les analogies des articles précédens. Et menant la droite an, perpendiculaire ſur df, elle ſera $= ef = z$; & dn ſera $= y$; ce qui donnera $ad = \sqrt{z^2+y^2}$; donc la ſurface du tronquement ſera $\frac{\sqrt{z^2+y^2} \times cx}{2r}$, qui doit être égale à celle de la Sphére, $2rc$; ce qui donnera l'égalité $\frac{48r^4}{z^2+y^2}, = 3x^2$.

On aura auſſi pour la ſolidité du Tronquement $\frac{3x^2z+y^2z}{24r} \times c$, (qui eſt une régle connuë de la plûpart des Géométres) laquelle ſolidité doit être égale à celle de la Sphére, $\frac{2}{3}cr^2$, ce qui donne une 2e égalité $\frac{16r^3 - y^2z}{z} = 3x^2$. Et comparant ces deux valeurs de $3x^2$, il en réſulte une troiſiéme égalité, $y^4 + z^2 - \frac{16r^3}{z} x y^2, + 48r^4 = 0$, délivrée
$$- 16xr^3$$
des x. Et prenant $y^2 = ur$, & y ſuſtituant u, au lieu de y,

on la change en une autre du ſecond degré, d'où l'on tire $u = \pm\frac{8}{z} \mp \frac{z^2}{2} \pm \sqrt{\left(\pm\frac{8}{z} \mp \frac{z^2}{2}\right)^2 - 48}$, en prenant r pour l'unité.

Je prends préſentement z (par exemple) $= r$, ce qui donne $u = \frac{15 \pm \sqrt{97}}{2} =$ 1,242,443, &c, 257,557, cent millémes de r : $y =$ 332,483, &c, 160,485 : $x =$ 209,172, &c, 211,538 : dc, ou, $x + y =$ 372, 023, $x - y = ab =$ 51,053 : $ef = z = r =$ 100,000 ; $dkcd =$ 1,168,743 ; $alba =$ 160, 387 ; $gmbg =$ 664,565 ; $ad = \sqrt{z^2 + y^2} =$ 189,093. On aura la ſurfaces = 125,664,589,545 ; dont la différence $= \frac{1}{139{,}000}$, & la ſolidité = 418,896,372,982,065, dont la différence $= \frac{1}{23{,}000}$.

Prenant encore $z = \frac{16}{5} r$, il vient $ab =$ 47,432 ; $dc =$ 196,086 ; $ad =$ 328,519 ; $alba =$ 149,015 ; $dkcd =$ 616,021, $gmgh =$ 382,518, & $ef =$ 320,000, toujours à moins d'une unité près. Ce qui donne pour la ſurface 125,664,430,842, dont la difference $= \frac{1}{157{,}000}$; & pour la ſolidité 4,188, 800,258,651,082, dont la difference $= \frac{1}{41{,}000}$.

Il eſt a remarquer que ſi l'on eût pris $z = 3r$, on auroit eu $y = 0$, ce qui auroit donné le Cylindre de l'article ſecond. Car on tire de cette ſuppoſition, $x = \frac{4}{3} r = ab$, comme dans ce ſecond article.

Et ſi l'on eût ſuppoſé $y = x$, ou $ae = 0$; & y ou $x = df$; on auroit eu les deux égalitez $\frac{\sqrt{16r^4 - x^4}}{x} = z = \frac{16r^3}{4x^2}$; d'où l'on tire la ſeule, $16r^4x^2 - x^6 = 16r^6$, qui eſt l'équation des Cônes du quatriéme article. Ce qui auroit donné $z =$ 370, 978 = 119,390. Et ce qui fait voir que pour les Cônes rronquez on peut prendre z à volonté entre 370,978, & 300,000 ; & au-deſſus de 119,390, comme nous avons fait : ce qui donnera une infinité de tels Tronquemens.

7°. Soit encore un Cône Elliptique, $abgei$, (10. *fig.*) dont a ſoit le ſommet ; $bgei$, ſa bâſe qu'on ſuppoſe être

une Ellipse, laquelle ait pour son grand axe *be*; *gi* pour son petit, & *h* pour son centre. Soit *adme* le Cône droit rectangle sur lequel le proposé ait été retranché; *a* son sommet; *dmed* sa bâse circulaire, dont *de* soit un diamettre: Et soit *dae* le triangle par l'axe de ces deux Cônes; dans lequel triangle on ait mené par *h* la droite *cf* parallele à *de*, laquelle *cf* soit le diametre d'un cercle *cgfi* mené par *gi* parallelement à la bâse *dme* sur la surface du Cône. Enfin soit *al*, une perpendiculaire menée de *a* sur *be*, qui sera la hauteur du Cône Elliptique *abgeb*. Pour comparer ce Cône avec la Sphére proposée, comme les Solides précedens, je suppose le côté $ad = y = ae$, & $al = x$; ce qui donne $bd = y - x$, & les paralleles *cf*, *de*, donnent l'analogie, $bc . cd :: bh . he$; donc $bc = dc = \frac{y-x}{2}$, $ac = \frac{y+x}{2}$. On aura aussi $be = \sqrt{x^2 + y^2}$, & $de = y\sqrt{2}$, à cause de l'angle droit *dae*; & à cause des paralleles, $bh . be :: ch . de$, donc $ch = \frac{y}{\sqrt{2}}$. De plus, $da = y . ca = \frac{y+x}{2} :: de = y\sqrt{2} . cf = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$. Donc $hf = \frac{x}{\sqrt{2}}$, & $ch \times hf = gh^2 = \frac{yx}{2}$ (par la nature du cercle *cgfi*, Donc $gi = \sqrt{2yx}$. Donc la bâse $bgei = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{2yx} \times \frac{c}{8r}$, De plus (à cause de l'angle droit *bae*) les triangles rectangles *bal*, *bea*, étant semblables, on aura l'analogie, $be = \sqrt{x^2 + y^2} . ae = y :: ba = x . al = \frac{yx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Donc $bgei \times \frac{al}{3} = \frac{cyx\sqrt{2yx}}{24r} = \frac{2}{3} cr^2$. Donc $yx\sqrt{2yx} = 16r$ ($y^3x^3 = 128r^6$) & $y = \frac{4\sqrt[3]{2} \times r^2}{x}$.

On aura de plus (comme je l'ai démontré en même tems en cette Academie) l'analogie, $\sqrt{x^2 + y^2} = be . bae = x + y :: bgei = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2yx} \times \frac{c}{8r} . \overline{x+y} \sqrt{2yx} \times \frac{c}{8r}$, qui sera la surface du Cône Elliptique, qui doit être égale à celle de la Sphére, $2rc$. Or prenant la valeur d'*y* de la premiére équation, on aura $x + y = \frac{x^2 + 4\sqrt[3]{2}\, r^2}{x}$, & $\sqrt{2yx} = 2r\sqrt[3]{4}$. D'où l'on tire l'égalité determinée, $x^2 - 4r\sqrt[3]{2}x + 4\sqrt[3]{2}r^2 = 0$

qui donne $x = 2r \times \sqrt[3]{2} \pm \sqrt{\sqrt[3]{2} - 1} \times \sqrt[3]{2} = y = 137,534$, & $= 366,434$, ce qui donne $be = 391,395$; $gi = 317,481$; $al = 128,763$: d'où l'on tire la surface de ce Cône, $= 125,663,807,822$: dont la différence $= \frac{1}{628,000}$ environ ; & la solidité $= 4,188,821,334,504,448$, dont la différence $= \frac{1}{104,720}$ par les raisons rapportées cy-devant.

Comme la valeur d'y se trouve la même qu'une des deux valeurs d'x, il est manifeste que ce Cône est unique en son espece.

8° Enfin soit *abdh* un Cône Parabolique (11. & 12 *fig.*) dont soit le sommet, *dbh* la bâse qui a *bg* pour son axe, & *dh* pour sa derniére ordonnée ; lequel Cône ait été retranché sur le Cône droit *caid*, dont *a* est aussi le sommet, le cercle *cdi*, la bâse, laquelle a *ci* pour diametre : *cai* est le triangle par l'axe commun aux deux Cônes : *bg* est parallele au côté *ai* ; & *dh* est une ordonnée au diametre *ci*. *af* est l'axe du Cône circulaire rencontrant *bg* en *l*, *be* une perpendiculaire menée du sommet *b* de l'axe *bg*, sur *ci* en *e*. De plus *ab* est la hauteur du Cône parabolique *abdh*, lequel doit être égal à la Sphére proposée comme les précédens. Menez les droites *fd*, *fh* ; & si vous voulez encore *ld*, *lh*.

Soit donc $cg = u$, $gi = z$, $ci = z + u$, $fi = fc = \frac{u+z}{2}$. On aura à cause de l'angle droit *cai*, $\frac{u+z}{\sqrt{2}} = ac$, ce qui donnera l'analogie (à cause des paralleles *bg*, *ad*) $ci = u + z$. $ia = \frac{u+z}{\sqrt{2}} :: \sqrt{2} . 1 :: cg = u . gb = \frac{u}{\sqrt{2}}$. On aura aussi (par la nature du cercle) $dg = \sqrt{uz}$, & $dh = 2\sqrt{uz}$, & $\frac{2}{3} bg \times dh = \frac{2}{3} u\sqrt{2uz} = dbhd$; & à cause des paralleles *bg*, *ai* : ($ci = u + z$. $ca = \frac{u+z}{\sqrt{2}} :: \sqrt{2} . 1 :: gi = z . \frac{z}{\sqrt{2}} = ab$) ; & $\frac{2uz\sqrt{uz}}{9}$ pour la solidité du Cône parabolique, laquelle doit être égale à celle de la Sphére $\frac{2}{3} cr^2$, ce qui donne la premiere égalité, $z = \frac{r\sqrt[2]{9c^2r}}{u}$.

Soit encore *dehd* la Parabole qui eſt la projection droite de la bâſe *dbh*; & *dfh* le triangle qui eſt celle des triangles *dah*, *dlh* : Il eſt évident que la différence *dehfd*, eſt la projection de la ſurface du Cône parabolique, ou de la différence *dbhld*. Or $eg = \frac{1}{2} cg = \frac{u}{2}$ (à cauſe des angles égaux *c*, *i*, & *bgc*. Donc la Parabole $dehd = \frac{2u\sqrt{uz}}{3}$ De plus $fg = fi - gi = \frac{\mp u \pm z}{2}$, ſelon que *g* tombera. Donc le triangle $dfh = \frac{\mp u \pm z\sqrt{uz}}{2}$. Donc le reſte $dehfd = \frac{\overline{u + 3z}\sqrt{uz}}{6}$ D'où l'on tire l'analogie : $cf = \frac{z+u}{2}$. $ca = \frac{z+u}{\sqrt{2}}$: : 1. $\sqrt{2}$: : *dehfd*. $\frac{\overline{u+3z}\sqrt{uz}}{3\sqrt{2}}$, qui eſt la ſurface du Cône parabolique $=$ *dbhld*; laquelle doit être égale à celle de la même Sphére, $2rc$. D'où l'on tire $u + 3z = \frac{6cr\sqrt{2}}{\sqrt{uz}}$. Or $u + 3z = \ldots$ $\frac{u^2 + 3r\sqrt[3]{9c^2r}}{u}$; & $\sqrt{uz} = \sqrt[3]{3cr^2}$, par la 1e égalité. Donc $u^2 + 3r\sqrt[3]{9c^2r} = 2u\sqrt{2}\sqrt[3]{9c^2r}$. D'où l'on tire $u = \sqrt{2}\sqrt[3]{9c^2r} \pm \sqrt[2]{2\sqrt[3]{9c^2r} - 3r \times \sqrt[3]{9c^2r}}$, ou $u = 112,366 = 1,890,894$; & $z = 630,316 = 37,458$. ce qui donne $bl = 445,702 = 26,486$, $bg = 79,454 = 1,337,068 = 366,248 = 310,582$; $dh = 532,264 = 532,274$. Les ſurfaces $= 125,663,807,822$; & $125,663,326,688$; leurs différences $= \frac{1}{628,000}$, & $\frac{1}{300,000}$; & les ſoliditez $= 4,188,821,334,504,448$; & $4,188,865,445,181,631$, & leurs différences $= \frac{1}{41,000}$, & $\frac{1}{41,000}$ environ, & par les raiſons rapportées cy-devant.

9°. Remarquez 1. qu'on peut auſſi égaler à la même Sphére des Segmens ou des Tranches à Arétes de Sphéres, de Paraboloïdes &c. comme ſi *IHLBNOM* (*fig.* 15. & 16.) eſt un Exagône circonſcrit au cercle *AGBGA*, & qu'on faſſe paſſer par les pôles *C*, *D*, des Ellipſes *CLD*, *CHD*, *CLD*, *CND*, *COD*, *CMD*, & par les angles de ce polygône, elles compoſeront avec ce polygône un Segment ſphérique à Arétes, dont *C* ſera encore le pôle, & le polygône

lygône *IHLNOM*, la bâſe, & qui ſe meſurera comme le Segment ſphérique inſcrit *CAGBGA* : à cauſe de leurs proprietez communes.

Soit donc *CB* nommée x, & *CF* toûjours u, on aura par la nature de l'Exagône, dont *CB* eſt le raïon droit $= x$ la moitié de ſon côté $= \frac{x}{\sqrt{3}}$, lequel étant multiplié par $6x$, donnera $\frac{6x^2}{\sqrt{3}}$ pour la ſurface de cet Exagône, qui doit être égale à celle de la Sphére propoſée $= 2rc$, ce qui donne $x^2 = \frac{rc}{\sqrt{3}}$. De ſorte que de quelque grandeur que ſoient *CF*, & *BF*; *CB* ſera toûjours encore de la même grandeur, $\sqrt{\frac{rc}{\sqrt{3}}}$, comme pour le ſegment ſphérique, ce qui eſt certainement digne de remarque. On aura de plus $BF = \sqrt{x^2 - u^2}$; & $AB^2 = 4x^2 - 4u^2$: ce qui donnera pour la ſolidité du Segment à Arétes dont la bâſe eſt un quarré circonſcrit au même cercle *AGBA*, & qui a auſſi *C* pour ſon pôle, $\overline{6x^2 - 4u^2} \times \frac{u}{3}$. Faiſant donc l'analogie : Comme le circuit du quarré circonſcrit au cercle dont $CB = x$ eſt raïon, ſçavoir $8x$, Eſt au circuit de l'Exagône circonſcrit au même cercle, ſçavoir $\frac{12x}{\sqrt{3}}$; ou, Comme 2 eſt à $\sqrt{3}$; ainſi $\overline{6x^2 - 4u^2} \times \frac{u}{3}$ à un 4e terme, qui ſera la ſolidité du Segment propoſé, laquelle doit être égale à celle de la même Sphére, ſçavoir $\frac{3ux^2 - 2u^3}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} cr^2$. D'où l'on tire $u^3 = \frac{\sqrt{3}urc}{2} - \frac{cr^2}{\sqrt{3}}$, qui eſt encore dans le cas de la Triſection de l'angle : c'eſt-pourquoi je la réſous par la méthode de l'article 4e, ce qui me donne pour les deux valeurs de $u = CF$, 74,168; & 187,165; & pour celle de $x = \sqrt{\frac{rc}{\sqrt{3}}}$, 190,463. Subſtituant auſſi la valeur d'x^2, dans la ſolidité du Segment $\frac{3ux^2 - 2u^3}{\sqrt{3}}$, on la change en cette autre $urc - \frac{2u^3}{\sqrt{3}}$, dans laquelle ſubſtituant la 1e valeur de $u = 74,168$, il vient 4, 189, 002, 248, 498,432, pour cette ſolidité; qui ne differe de celle de

la Sphére cy-dessus, que d'environ $\frac{1}{10,000}$ partie, ce qui vient des fractions négligées, & ce qui suffit pour faire voir que nous avons rencontré la verité. On aura aussi l'axe $CD = \frac{x^2}{u} = 489,108$, le diametre $AB = 350,858$, & le raïon $FB = 175,429$. ce qui suffit pour former ce Segment.

Si on substituë la 2e. valeur de u, sçavoir 187, 165, il vient 4,189,083,983,360,155, pour la solidité d'un 2d Segment à Arétes, pour l'axe $CD = 193, 819$, le diametre $AB = 70, 580$, & le raïon $FB = 35, 290$.

10°, Remarquez 2. Que si l'on suppose une tranche de Sphére ai, (13. *fig.*) dont abc, ghi soient les deux bâses également distantes du centre de leur Sphére; ac, gi leurs diametres; am, gn leurs raïons; def son plus grand parallele, dont df soit le diametre; que l'on nomme al, x, & am, y, & que l'on égale cette tranche à la même Sphére proposée tant en surface, qu'en solidité; il en viendra l'égalité déterminée $x^4 - \frac{2}{3}rx^3 - \frac{r^4}{3} = 0$, qui a pour ses équations composantes $x - r = 0$, & $x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = 0$, dont la derniere ne renferme aucunes racines vraïes, comme il est évident. De sorte qu'il reste la seule valeur de x, ou de $al = r$. Ce qui fait voir que la Sphére proposée est elle-même la Tranche spérique centrale cherchée, & qu'il n'en faut point chercher d'autre; comme on a vû dans le 3e art. cy-devant, que la même Sphére est elle-même un des Segmens sphériques qui lui est égal en surface convexe, & en solidité, ce qui est encore une propriété singuliere de la Sphére.

11°. On pourroit encore ajouter à toutes ces figures, un anneau AD circonscrit à la même Sphére (14. *fig.*) formé par la révolution du quarrré $ABCD$ circonscrit à son grand cercle autour de l'axe LI de la Sphére parallele aux côtez AC, BD de ce quarré, en ajoûtant sur ces 2 mêmes côtez les deux Segmens de cercle AEC, BFD, dont le centre G est le même que celui de cette Sphére,

Car la surface intérieure de cet anneau eſt en continuelle égalité avec celle de la Sphére inſcrite, comme Archimédes l'a démontré : en retranchant l'une & l'autre par des plans perpendiculaires à l'axe commun *Ll*; & en même tems la ſolidité de l'un & de l'autre ont entre eux la même égalité continuelle, ce qui n'eſt pas difficile à démontrer & même connu, & ce qui eſt une comparaiſon encore beaucoup plus parfaite, qu'aucune des précedentes.

Dans cet anneau, *AB* ou *AC* vaut 200, 000 (comme il eſt évident) puiſque *LB* vaut 100,000; & par conſéquent le circuit *AKBA* vaut 628, 318 comme pour la Sphére; ſon grand diametre *EF* vaut 282,842; & ſon grand raïon *GF*, 141,421; ſon grand circuit *EHFE* vaut 888,574; ſon bouge *MF* vaut 41,421; ſa ſurface = 125, 663,600,000, comme dans la Sphére; & ſa ſolidité 4,188, 748,243,600,000, dont la différence eſt environ $\frac{1}{104,000}$.

12°. Enfin on en pourroit ajoûter quantité d'autres tant convexes que concaves, que nous laiſſerons aux Curieux des queſtions purement Géométriques.

On trouve toutes ces Figures en relief dans les Cabinets de M. de la Faye l'aîné; du R. P. Sebaſtien, Carme; & chez l'Auteur.

EXAMEN

D'une difficulté conſiderable propoſée par M. Hughens contre le Syſtême Carteſien ſur la cauſe de la Peſanteur.

PAR M. SAURIN.

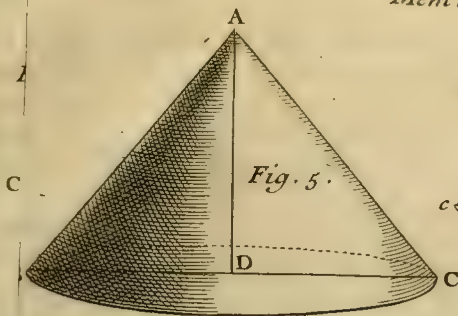
LEs effets de la Nature les plus ordinaires, & qui frappent le moins le commun des hommes, ne ſont pas toûjours ceux qui donnent le moins d'exercice aux Philoſophes. Tel eſt le Phénomene de la Peſanteur. Une pierre jettée en l'air retombe à plomb ſur la ſurface de la Terre; on ne s'aviſe gueres dans le monde d'en être

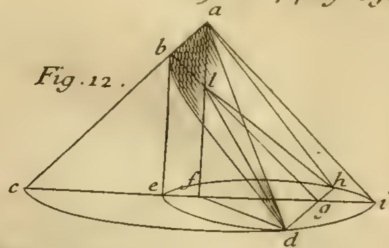
10. Avril 1709.

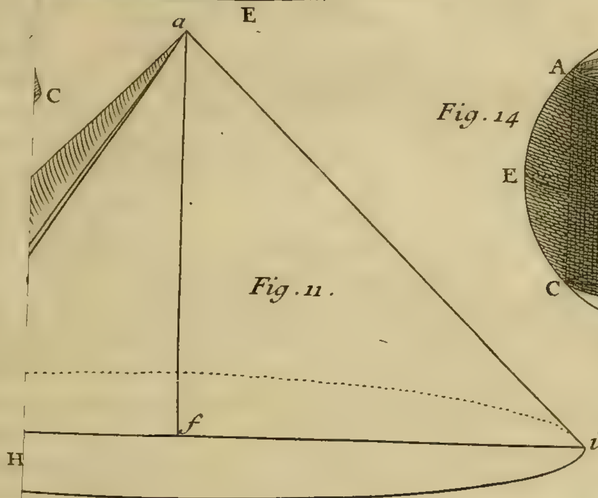
surpris : cependant trouver la cause de cette chûte est un des plus difficiles Problêmes que la Physique ait à résoudre ; & l'on n'est point encore parvenu à en donner une solution suffisamment démontrée, & qui répande une pleine lumiere sur toutes les difficultez.

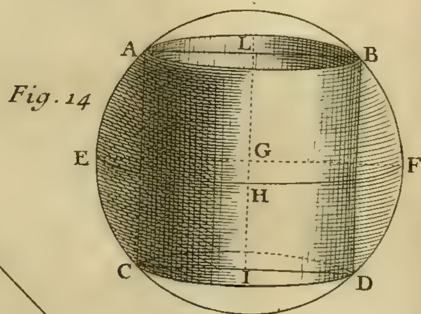
J'ai entrepris sur cette matiere un petit Traité que j'ai commencé à lire dans nos Assemblées particulieres. L'Académie a pû voir, que je mets la cause de la Pesanteur dans l'effort centrifuge de la matiere céleste qui nous environne ; & que je fais naître en elle cette effort, du mouvement circulaire qu'elle a autour de l'axe de la Terre, selon l'idée des Tourbillons Cartésiens. Un des principaux objets que je me suis proposez dans le petit Traité dont je parle, est de défendre ce sentiment contre les difficultez qui ont fait rejetter l'hypothese des Tourbillons à deux des plus célebres Géometres de notre tems, M. Hughens & M. Newton.

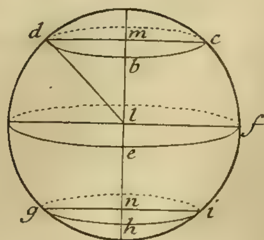
Pour ne parler ici que de M. Hughens ; il fait trois Objections contre cette hypothese dans son Discours sur la cause de la Pesanteur ; mais il n'y en a que deux qui me paroissent dignes de considération. C'est de l'une de ces deux fort repetée après lui par quantité d'autres Auteurs grands & petits, que l'on voit une Solution dans le 2e Journal des Sçavans de 1703. Je fus bien aise d'exposer ainsi par avance cette Solution à la critique des Sçavans, pour m'assurer si je ne me faisois point illusion en la croyant appuïée sur une démonstration véritable ; & pour mettre à profit les nouvelles lumieres que leurs réflexions pourroient me donner. Elle a mérité l'attention de deux Auteurs, qui se piquent, & sans doute avec raison, d'être profonds dans ces sortes de matiéres, peu disposez d'ailleurs à me faire grace ; mais quoiqu'ils l'aïent combattuë avec beaucoup de vivacité, l'un dans ses *Recherches de Physique & de Mathématique*, & l'autre dans les Memoires de Trevoux ; j'oserai dire qu'ils n'ont point troublé la confiance où je pouvois être que la solution est hors d'atteinte.

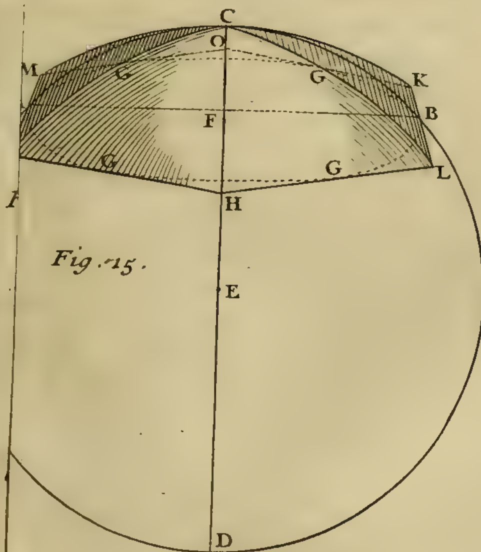

A
C
Fig. 5.
D
C
E

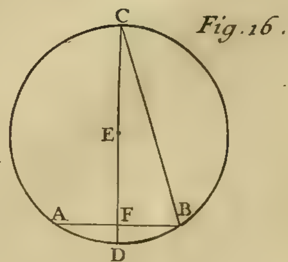

a
b
Fig. 12.
l
c
e
f
h
g
i
d


a
C
Fig. 11.
f
i
H

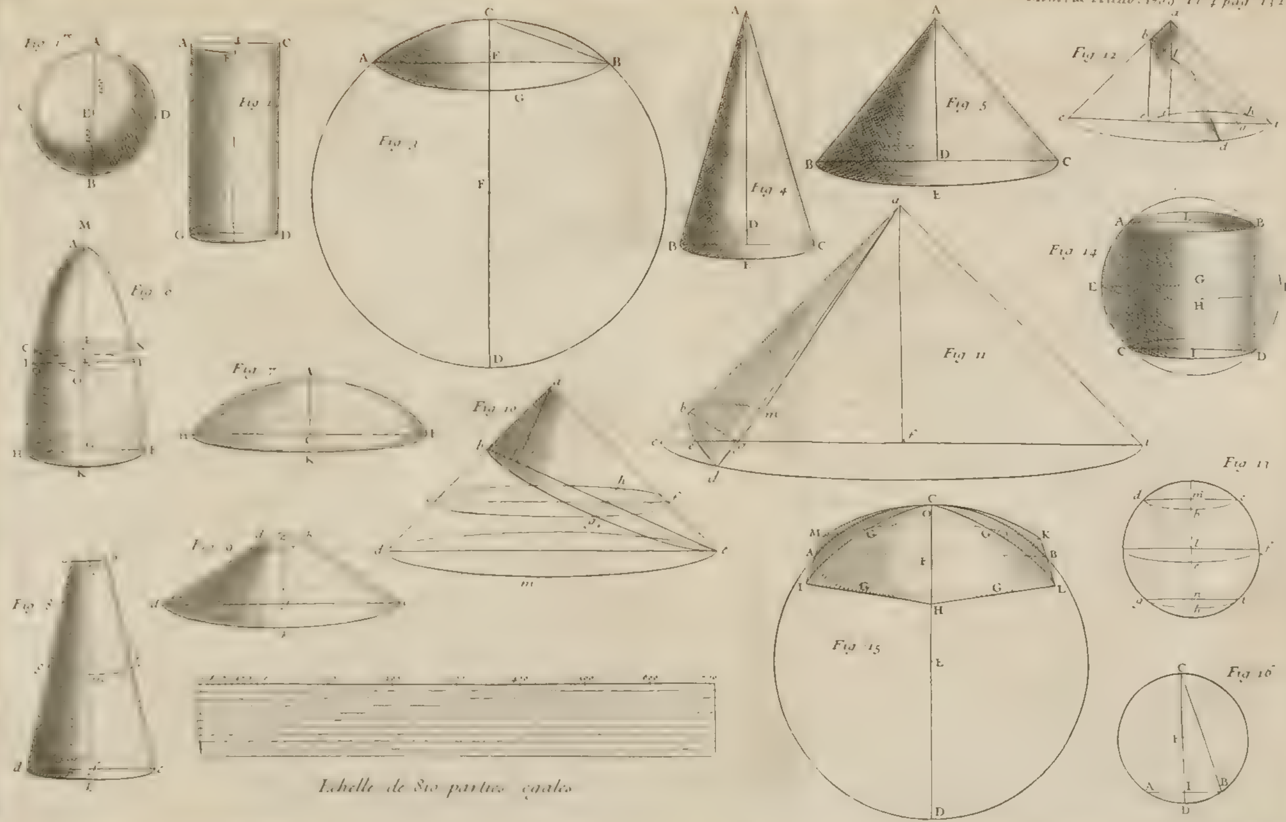

A
L
B
Fig. 14
E
G
F
H
C
I
D


Fig. 13.
d
m
c
b
l
f
e
g
n
i
h


C
O
M
G
G
K
F
B
G
G
L
H
Fig. 15.
E
D


C
Fig. 16.
E
A
F
B
D

Berey fecit


Fig. 1re
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Echelle de 810 parties égales

L'autre objection de M. Hughens eſt celle qui doit faire le ſujet de ce Memoire, & ſur laquelle j'avoüerai d'abord que je n'ai point encore pû me ſatisfaire parfaitement. Auſſi ne donnai-je pas à cette recherche, comme à la précédente, le titre de Solution, mais celui d'*Examen.* C'eſt un point de Phyſique à méditer, que je propoſe aux Philoſophes qui m'écoutent. Sur ce pied-là, j'expoſerai ſimplement l'objection ; ce que je crois qu'on peut y répondre ; & ce qui me paroît reſter de difficultez ; & j'attendrai de leurs lumiéres, & de celles de l'Academie, ce qui manque aux miennes.

Comme j'ai l'honneur de parler dans une Aſſemblée publique où tout le monde ne peut pas être au fait de ces queſtions, je crois devoir reprendre les choſes de plus haut. On n'apperçoit clairement dans les corps peſants que deux choſes ; l'une qu'étant lâchez en l'air, ils ſe meuvent ſuivant une direction qui tend à peu près au centre de la Terre ; l'autre, qu'ils font effort pour ſe mouvoir ſuivant la même ligne, lorſqu'ils ſont retenus: & c'eſt préciſément cette effort avec lequel ils preſſent ou pouſſent ce qui les retient, qu'on appelle *Peſanteur.*

Il eſt évident que ces deux choſes ſont l'effet d'une ſeule & même cauſe. La force, de quelque nature qu'elle ſoit qui fait mouvoir les corps peſants ſuivant la direction conſtante qu'ils obſervent, eſt celle-là même qui fait que ces corps preſſent ſuivant la même direction, le plan qu'on leur oppoſe pour les retenir.

Il ne s'agit donc dans la queſtion de la Peſanteur ; que de rendre raiſon d'un certain mouvement, ſçavoir, de ce mouvement particulier qui porte vers le centre de la Terre les corps à qui cela même fait donner le nom de peſants.

Si nous conſultons nos idées ſur la cauſe phyſique du Mouvement, elles ne nous preſenterons rien de clair, rien de diſtinct que le choc, ou l'impulſion : ainſi c'eſt par ce principe qu'il faut rendre raiſon du Mouvement

dont nous cherchons la cauſe, ou abandonner cette recherche, & renoncer à l'eſperance de pouvoir jamais expliquer d'une maniere intelligible & raiſonnable le Phénomene de la peſanteur ; & ſi nous ne réüſſiſſons pas à l'expliquer par ce principe, cela marquera ſans doute l'inſuffiſance de nos lumieres, mais non pas celle du principe.

Voici donc ſuivant cette idée, de quelle maniere nous philoſophons ſur la peſanteur avec M. Hughens. Les corps peſants ſe meuvent vers le centre de la Terre ; ils y ſont donc pouſſez. Les corps ne peuvent être pouſſez que par d'autres corps en mouvement qui les choquent ; il y a donc d'autres corps en mouvement, qui heurtent ceux que nous appellons peſants, & qui par ce choc les pouſſent où nous les voïons tendre. Ces autres corps ne ſont point apperçus ; c'eſt donc une matiere ſubtile, que la délicateſſe de ſes parties dérobe à notre vûë ; & comme on ſçait d'ailleurs par mille autres effets, que la Terre nage dans un fluide d'une ſubtilité inconcevable ; qui l'environne de toutes parts ; il n'y a pas lieu de douter que ce ne ſoit à cette matiere fluide qu'il faut attribüer l'impulſion qui produit le mouvement des corps peſants.

Mais comment le produit-elle ? Pour l'expliquer avec ordre, il faudroit faire de longues déductions ; je les franchis, & je viens tout d'un coup au fait. C'eſt qu'elle circule autour de la Terre avec une extrême rapidité : en circulant ainſi elle fait effort pour s'éloigner de la Terre ; & les corps groſſiers n'aïant pas le même mouvement, & ne faiſant pas le même effort, doivent être chaſſez néceſſairement vers la Terre. Juſqu'ici nous avons marché de compagnie, & philoſophé de concert avec M. Hughens ; mais nous allons nous diviſer : voici le point de ſéparation. M. Hughens fait mouvoir circulairement la matiere celeſte en tous ſens autour du centre de la Terre ; c'eſt-a-dire, que dans ſon Syſtême le centre de la Terre eſt le centre commun de tous les cercles

que décrit la matiere celeste : au lieu que selon Descartes, elle se meut toute en même sens autour de l'axe d'Occident en Orient, & décrit des cercles dont les plans sont paralleles à celui de l'Equateur. C'est cette hypothese que je défens contre les deux objections de M. Hughens dont il s'agit.

La 1[e]. est tirée de la direction qu'observent dans leurs chûtes les corps pesants. M. Hughens prétend, que dans la supposition des cercles paralleles décrits par la matiere celeste, les corps devroient tomber suivant des lignes perpendiculaires à l'axe de la Terre, & qu'ils ne seroient poussez vers le centre que dans le plan de l'Equateur, au lieu que l'expérience nous apprend qu'ils suivent par tout une même direction qui tend au centre. C'est l'objection que je crois avoir suffisamment résoluë dans le Journal des Sçavans.

Voici la seconde, qui est celle que j'ai à examiner presentement. M. Hughens observe que pour produire le degré de pesanteur que nous éprouvons dans les corps terrestres, la vitesse de la matiere celeste qui se meut circulairement, doit être beaucoup plus grande que la vitesse du mouvement journalier de la Terre autour de son axe. D'où il conclut que si la matiere celeste se mouvoit en même sens avec une telle vitesse, il ne seroit pas possible que par le continuel effort d'un mouvement si rapide, elle n'entraînât avec elle tous les corps qui sont sur la surface de la Terre, ce qui n'arrive pas.

On sentira toute la force de cette objection par l'exposition que j'en vais faire. Les corps qui sont sur la Terre étant emportez avec elle autour de son axe dans 24 heures, font eux-mêmes necessairement effort pour s'éloigner du centre, & leur effort est proportionné à la vitesse qui les emporte. Si la matiere celeste ne se mouvoit circulairement qu'avec la même vitesse que la Terre tourne, elle ne feroit pas plus d'effort pour s'éloigner du centre de la Terre, que n'en font les corps qui sont sur la Terre, & par conséquent il n'y auroit pas de pesanteur;

ces corps jettez en l'air ne retomberoient point. Dans quelque lieu du Fluide environnant qu'ils fussent portez, & ensuite lâchez, ils y demeureroient suspendus & en repos; puisqu'ils y seroient en équilibre avec un égal volume de la matiere celeste.

Les corps qui sont sur la Terre ne sont donc pesants, & jettez en l'air ne retombent, que parce que la matiere celeste fait plus d'effort pour s'éloigner du centre commun qu'ils n'en font de leur part : Et si l'on retranche leur effort de celui de la matiere celeste, la quantité d'effort qui restera, & qui est le degré de force avec lequel ils sont poussez vers le centre, sera justement égale à leur degré de pesanteur. Ainsi la matiere celeste doit circuler plus vîte que la Terre ne tourne, & l'excès de sa vitesse pardessus celle de la Terre doit être tel, qu'il en puisse résulter cette quantité d'effort égale au degré de pesanteur des corps terrestres.

M. Hughens a trouvé par une recherche exacte, qu'il falloit pour cela que le mouvement circulaire de la matiere celeste fût environ 17 fois aussi vîte que celui de la Terre. Son calcul est fondé sur une proposition curieuse; mais il est un peu embarrassé. On peut faire le même calcul d'une maniere plus aisée en supposant la verité d'un autre Theorême, qui est trés-facile à démontrer. Ce Theorême est, qu'en tems égal, l'espace parcouru par un corps qui tombe perpendiculairement est à l'espace ou à l'arc parcouru par la matiere celeste qui se meut circulairement, & produit la pesanteur, comme ce même arc est au diametre du cercle qu'elle décrit : Et par conséquent si le nombre de pieds que contient ce diametre, est multiplié par le nombre de pieds qu'un corps qui tombe perpendiculairement parcourt dans une Seconde, ce produit sera égal au quarré de l'arc parcouru aussi dans une Seconde par la matiere celeste. On sçait par des experiences faites avec beaucoup d'exactitude, qu'un corps qui tombe perpendiculairement, parcourt dans une Seconde environ 15 pieds : le diametre du cercle décrit par

la

la matiére celeste proche de la Terre n'étant pas sensiblement différent de celui de la Terre même, est de 39′ 231′ 600 pieds : Donc par le Theorême ces deux nombres multipliez l'un par l'autre, donneront un produit égal au quarré de l'arc parcouru par la matiére celeste ; & la racine quarrée de ce produit, laquelle est 24258, sera le nombre de pieds égal à l'arc parcouru. Il faut donc que pour produire le degré de pesanteur que nous éprouvons sur la Terre, la matiére celeste parcoure 24258 pieds dans une seconde.

La Terre faisant une révolution en 23 heures 56 minutes, ou en 86160 secondes, & le cercle qu'elle décrit étant de 123′ 249′ 600 pieds, ce qu'elle en parcourt dans une seconde doit être de 1430 pieds & $\frac{1}{2}$. Ainsi la vitesse de la matiére celeste, qui lui fait parcourir dans une seconde 24258 pieds, est à celle de la Terre qui n'en parcourt dans le même tems que 1430, comme le premier de ces nombres est au second. Or si l'on divise ces deux nombres l'un par l'autre, on trouvera qu'ils sont entr'eux environ comme 17 à 1. En mesurant donc le degré de pesanteur par le seul effort centrifuge de la matiére celeste, qui vient de son mouvement circulaire, il est démontré que la vitesse de ce mouvement doit être 17 fois aussi grande que celle du mouvement journalier de la Terre, ou la sur passer 16 fois.

Mais pour connoître plus précisément encore jusqu'où va la difficulté, examinons quelle impression peut faire sur les corps terrestres cette prodigieuse vitesse que nous sommes obligez de donner à la matiere céleste, & nous verrons ensuite s'il s'offrira quelque moyen de la rendre insensible.

Feu M. Mariote, un des plus habiles & des plus exacts observateurs en Physique qu'ait eu l'Académie, a fait quantité d'expériences sur la force du choc des Fluides, & en particulier de l'Eau & de l'Air. Il a trouvé * que l'eau allant avec une vitesse qui lui fait parcourir 3 pieds & $\frac{1}{2}$ dans une seconde, & heurtant

* *Mouvement des Eaux, pag. 187. & 195.*

perpendiculairement avec cette viteſſe une ſurface d'un demi-pied en quarré, ſoûtient un poids de 3 livres $\frac{3}{4}$. Il a auſſi déterminé que l'air allant 24 fois auſſi vîte, faiſoit préciſément le même effort. Ainſi l'Air parcourant 78 pieds dans une ſeconde, & choquant avec cette viteſſe une ſurface d'un demi-pied en quarré, opposée perpendiculairement à ſon cours, ſoûtiendroit un poids de 3 livres $\frac{3}{4}$: Mais ſi nous lui donnons la viteſſe dont la matiere celeſte ſurpaſſe celle de la Terre, quel poids ſoûtiendra-t'il? Il eſt aiſé d'en faire le calcul. Les efforts d'un même Fluide qui va avec differentes viteſſes ſont entr'eux comme les quarrez des viteſſes: la viteſſe de l'air qui lui fait ſoûtenir 3 livres $\frac{3}{4}$. eſt de 78 pieds dans une ſeconde; celle de la matiére celeſte, la viteſſe de la Terre en étant retranchée, eſt de 22827 pieds & $\frac{1}{2}$; tout eſt connu; il n'eſt plus beſoin que d'une regle de proportion; on dira, comme le quarré de 78 eſt au quarré de 22827 & $\frac{1}{2}$, de même le poids de 3 livres $\frac{3}{4}$ eſt à un 4e terme: ce 4e terme donnera l'effort de l'air, ou le poids cherché. En faiſant cette opération on trouve que ſi l'air alloit avec la vîteſſe de la matiere celeſte, il ſoûtiendroit un poids de plus de * trois cens ving mille livres.

* Il eſt au juſte de 321187 liv. & $\frac{14308}{24336}$.

Nous avons ſuivi dans ce calcul la détermination de M. Mariote, qui ne donne à l'air qu'une viteſſe 24 fois auſſi grande que celle de l'eau, pour lui faire ſoûtenir le même poids que l'eau ſoûtient; mais d'autres expériences prouvent qu'il doit aller 30 fois auſſi vîte; & ſi nous voulons ſuivre ces experiences, le poids que ſoûtiendra l'air avec la viteſſe de la matiére celeſte, diminuëra, mais il ſera encore * de plus de deux cent mille livres.

* au juſte de 205560 liv. & $\frac{2240}{38025}$.

Telle ſeroit la force de l'air emporté avec la viteſſe qui convient à la matiere celeſte pour produire la peſanteur. D'où l'on voit que quand l'effort de la matiere celeſte mûë avec cette rapidité ne ſeroit que la deux-cent-milliéme partie de celui de l'air, elle ne laiſſeroit pas de ſoûtenir le poids d'une livre, en agiſſant contre une ſur-

face d'un demi-pied en quarré, & que s'il étoit prés de deux millions cinq cent mille fois plus foible, il soûtiendroit encore le poids d'une once : de sorte que si l'on suspendoit en l'air au bout d'un fil un corps qui ne pesât qu'une once, & qui opposât une surface d'un demi-pied en quarré au cours de la matiere celeste, elle le pousseroit d'Occident en Orient avec un effort qui lui feroit faire en ce sens-là un angle de 45 degrez, en faisant abstraction de toute autre résistance que de celle du corps suspendu.

Il seroit impossible à cause de la résistance, & de l'agitation continuelle de l'air, & de plusieurs autres considérations, de déterminer au juste combien l'effort de la matiere celeste avec vîtesse égale, devroit être plus foible que celui de l'air pour devenir insensible; mais il me paroît qu'il devroit l'être du moins trois ou quatre millions de fois plus : il reste à sçavoir si on peut le supposer sans absurdité; ou si l'on ne pourroit point donner de la foiblesse de cet effort quelque raison du moins vraisemblable.

On sçait que les Fluides sont plus ou moins fluides les uns que les autres, & qu'ils font plus ou moins de résistance au mouvement des corps; & par conséquent plus ou moins d'effort contre les corps en repos, lorsque ce sont les Fluides mêmes qui se meuvent. Ainsi nous venons de voir que l'air doit aller 30 fois plus vîte que l'eau, pour avoir une égale force de choc : d'où il s'ensuit qu'allant avec la même vitesse que l'eau, il doit faire 900 fois moins d'effort que l'eau, 900 étant le quarré de 30. La Regle que l'on donne sur ce point, est que les efforts de differens Fluides qui vont avec une même vitesse sont comme leurs densitez ; aussi est-ce sur ce principe que l'on fait l'air 900 fois plus rare que l'eau. Cette conséquence néanmoins pourroit être fausse; car la Regle sur laquelle on la fonde, n'est exactement vraïe que lorsque les Fluides que l'on compare ne différent qu'en densité. Dans ce cas-là il est aisé de comprendre, que si de deux Flui-

S ij

des emportez avec une même vitesse, l'un est par exemple deux fois moins dense que l'autre, il doit faire deux fois moins d'effort ; car à chaque tems le corps contre lequel il agit est choqué par deux fois moins de particules, & par conséquent deux fois moins choqué : La Regle est donc certaine & évidente, mais elle est défectueuse, parce qu'il y a dans les Fluides bien d'autres differences ausquelles il faut avoir égard. La force du choc dans ceux qui vont également vîte, ne dépend pas seulement de ce qu'en tems égal ils choquent avec la somme des efforts d'une plus grande ou d'une plus petite quantité de particules, mais encore de ce qu'ils font plus ou moins de résistance à la division ; c'est-à dire du plus ou du moins de facilité qu'ont les particules à se séparer, à se déplacer. Or une plus grande ou une moindre facilité au déplacement peut avoir plusieurs causes, & par le concours de toutes ces causes devenir aussi considerable que l'on voudra.

La premiere cause qui se présente, est le different degré même de densité. J'ai déja emploïé la densité ; c'est un double emploi que j'en fais, mais il n'est pas vicieux ; elle vient ici sous une autre considération. Il est clair qu'un Fluide doit être d'autant plus facile à diviser que ses particules sont moins serrées, moins près les unes des autres : c'est-à dire d'autant plus qu'il est moins dense. Le plus ou le moins d'âprets, d'inégalitez dans les surfaces des particules, & leurs figures plus ou moins irrégulieres & embarrassantes sont deux autres causes dignes d'attention & qui peuvent produire à l'égard de la facilité des Fluides à se diviser, & par conséquent dans la force de leur choc, de grandes differences.

J'avois crû d'abord pouvoir ajoûter à ces articles le different degré de subtilité. Et en effet il étoit assez naturel de penser que, supposé d'ailleurs toutes choses égales, le Fluide qui avoit les particules les moins grossieres. devoit se diviser avec plus de facilité, & faire moins d'effort contre les obstacles opposez à son cours. Cette pensée

m'accommodoit tout-à-fait : elle me fourniſſoit le moïen du monde le plus aiſé de réduire à rien la force du choc de la matiére celeſte qu'il eſt permis de faire auſſi ſubtile qu'on voudra : mais en cherchant à démontrer une propoſition qui me paroiſſoit ſi vrai-ſemblable, j'ai trouvé contre mon attente, quoiqu'après M. Newton, qu'elle étoit fauſſe, & que deux Fluides de même nature, & de même denſité, & qui ne different qu'en ce que les particules de l'un ſont plus petites que celles de l'autre, ſont une égale réſiſtance au mouvement des corps, ou ſi les Fluides ſe meuvent eux-mêmes, ont une égale force de choc. J'avoüe que j'ai eu grand regret de cet article, & que ce n'eſt qu'après avoir bien chicané contre ma propre démonſtration que j'ai conſenti à le raïer.

Cependant quelque fauſſe que ſoit l'idée dont j'avois crû pouvoir tirer un ſi grand avantage ; le plus ou le moins de ſubtilité ne laiſſe pas d'être ici d'une extrême conſidération par un autre endroit ; car un Fluide qui ſeroit ſi ſubtil que tous les corps lui donneroient un libre paſſage par leurs pores, choqueroit ces corps ſans doute avec bien moins de force que ne feroit un autre Fluide de même nature, mais dont les particules ſeroient trop groſſieres pour pouvoir paſſer à travers les pores des corps. Il eſt évident qu'encore que ces deux Fluides fuſſent d'une même denſité, ils tomberoient par rapport à l'effet du choc dans le cas de deux Fluides inégalement denſes ; tout ce qui dans le Fluide ſubtil continuë ſon cours par les pores des corps, librement & ſans les choquer, ne devant point être compté. Or où cela ne peut-il point aller ?

La tiſſure des corps les plus ſolides, eſt peut-être infiniment plus rare qu'on ne penſe. Ce qu'il y a de bien certain, c'eſt que les ſens & l'imagination nous trompent là-deſſus. A les conſulter, qui diroit que ce qu'un morceau de bois de chêne contient de ſa matiere propre, ne fait pas la 20e partie du volume ſous lequel il paroît ? Peut-être s'en faut-il beaucoup qu'il n'en faſſe la milliéme,

ou la cent-milliéme; mais au moins eſt-il facile de démontrer qu'il n'en fait pas la 20e. Le bois de chêne peſe moins que l'eau, & l'eau peſe à peu près 19 fois moins que l'or. Un morceau de bois de chêne peſe donc plus de 20 fois moins qu'un morceau d'or de même volume; mais c'eſt un principe démontré par M. Hughens même, que la Peſanteur ſpécifique des corps ſuit exactement la proportion de la quantité de matiere propre qu'ils contiennent ſous un volume égal. Sur ce principe, un morceau de bois de chêne contient 20 fois moins de matiere propre qu'un morceau d'or égal en volume; & par conſéquent, en ſuppoſant même l'or parfaitement ſolide & ſans pores; ce qui eſt bien éloigné d'être vrai; la quantité de matiere propre que contient un morceau de bois de chêne, n'eſt pas la 20e partie de ſon volume: certainement les yeux ne diſent pas cela. Par le même raiſonnement un corps qui peſera 20 fois moins qu'un égal volume de bois de chêne, & 400 fois moins qu'un même volume d'or, contiendra auſſi 20 fois moins de ſa matiere propre que le chêne, & 400 fois moins que l'or: Les yeux en jugent-ils ainſi?

Je n'ai aucunes lumieres ſur la ſolidité abſoluë des corps: je connois bien par le poids les differens rapports de denſité ou de rareté qu'ils ont entr'eux; mais ſi l'on conſidére un corps en lui-même, & ſans le comparer à d'autres, il eſt impoſſible de connoître quel eſt ſon degré abſolu de ſolidité, c'eſt-à-dire, de déterminer quelle proportion il y a entre la quantité de matiere propre qu'il contient, & ſon volume: ainſi je ſçai qu'un morceau de bois de chêne eſt 20 fois moins ſolide qu'un égal morceau d'or; mais ce morceau d'or juſqu'à quel point eſt-il ſolide? Combien a-t-il de pores, combien de matiere propre? c'eſt ce que j'ignore profondément; ou plûtôt c'eſt ce que je ſçai avec la derniére évidence qu'on ne peut pas ſçavoir; & j'oſe avancer cette propoſition qui va paroître un paradoxe, c'eſt que ſi l'on vouloit ſoûtenir, que dans un morceau d'or il n'y a pas de matiere

propre la cent-millionéme partie du volume, on le soûtiendroit à la verité sans preuve positive, mais on pourroit défier hardiment les Physiciens de démontrer le contraire.

Je ne doute point que l'imagination de ceux qui jugent de tout par les sens, ne se révolte. L'or est le plus pesant de tous les corps que nous connoissons : il leur a toujours paru fort lourd, & par cela même fort massif; ce sentiment confus passera toûjours chez eux pour une experience aussi évidente qu'une démonstration : mais quand nous soûtenons un poids, le sentiment de pesanteur que nous éprouvons est relatif au degré de force que nous avons pour le soûtenir : ce qu'un homme trouve leger, est pour un enfant un poids énorme, & nous pourrions avoir une telle force, que la plus pesante masse nous paroîtroit aussi légere que nous paroît une plume. Ainsi à juger par sentiment ; des hommes mille fois plus forts que nous, trouvant l'or mille fois moins pesant que nous ne le trouvons, le jugeroient aussi mille fois moins solide que nous ne le jugeons. Venons à conclusion ; les sens ni l'imagination ne devant pas être écoutez sur ce point, & la raison ne nous y fixant aucunes bornes, il est permis de donner à la tissure des corps toute la rareté, comme à la matiére celeste toute la subtilité dont on a besoin ; pourvû seulement que la supposition que l'on fera pour l'effet qu'on veut expliquer, ne se trouve pas combatuë par d'autres effets.

Encore un article sur lequel on ne sçauroit trop appuïer, & qui se rapporte à celui des figures plus ou moins embarrassantes ; c'est que les particules de la matiere celeste n'ont ni figure ni grosseur déterminée ; chaque particule pouvant se diviser, & se divisant à l'infini, selon les besoins, & avec la derniere facilité, elles s'accommodent sans peine à toutes sortes de places ; ce qui diminuë infiniment dans le fluide la résistance au déplacement, & qui affoiblit d'autant son effort.

A tout ce que nous avons dit sur les causes qui peuvent

contribuër à rendre insensible l'effort de la matiere celeste, nous pourrions ajoûter des experiences de M. Newton qui nous sont favorables. M. Newton les a faites pour s'assurer si la matiere celeste qui pénétre tous les corps, & remplit leurs pores, avoit quelque part à la résistance que ces corps souffrent lorsqu'ils sont mûs dans un Fluide; & il n'a pas trouvé plus de résistance de ce côté-là, que si cette matiere n'existoit pas, & que les pores fussent entiérement vuides. Nous ne nous prévaudrons pourtant point de sa découverte : quelle conséquence pourrions-nous tirer d'une résistance insensible dans d'aussi foibles mouvemens que ceux des experiences que nous pouvons faire ? Mais quel sujet d'étonnement qu'un aussi habile homme que M. Newton en ait conclu, ou ait été tout près d'en conclure le vuide, nous invitant même à répeter les expériences pour nous convaincre de plus en plus de la solidité prétenduë de cette conclusion.

Quand après toutes les considerations que l'on vient de faire, on ne seroit pas moins frappé comme d'une absurdité, de cette rapidité prodigieuse que nous donnons à la matiere celeste proche de la Terre, quoiqu'elle ne s'y fasse pas sentir, il semble qu'il n'y auroit pas d'autre parti à prendre, que de la digerer cette absurdité, comme on est obligé d'en digerer tant d'autres dans la plûpart des sujets de Physique, & generalement dans presque tous les objets de nos connoissances : car enfin cette absurdité soit prétenduë, soit vraïe, où conduit le sentiment que je défends, se trouve être une suite nécessaire des plus certaines observations des Astronomes, ainsi que je le vais démontrer.

Les Planetes qui tournent autour du Soleil à différentes distances, vont plus vîte les unes que les autres : le fameux Kepler a remarqué le premier, que leurs vitesses gardent entr'elles la raison renversée des racines quarrées de leurs distances. Supposons par exemple que la distance de Venus au Soleil soit à celle de Mercure comme 9 à 4 ;

je

je prends ces nombres, parce qu'il ſont commodes, & qu'ils ne s'éloignent pas beaucoup du rapport exact qu'ont entr'elles ces deux diſtances, la racine quarrée de 9 eſt 3, celle de 4 eſt 2 : la racine quarrée de la diſtance de Venus étant donc à la racine quarrée de la diſtance de Mercure comme 3 à 2 ; on trouve ſelon la regle de Kepler, qu'en raiſon renverſée la viteſſe de Venus eſt à celle de Mercure comme 2 à 3.

Toutes les obſervations confirment cette regle ; elle n'eſt pas ſuivie ſeulement par les Planetes principales qui tournent autour du Soleil ; elle l'eſt encore exactement par les petites Planetes qui font leurs révolutions autour d'une Planete principale ; c'eſt ce qu'a pleinement vérifié dans les Satellites de Jupiter M. Caſſini qui nous en a donné la Theorie, & qui par ſes ſçavantes & ſes utiles découvertes a une ſi grande part à la gloire des progrez que l'Aſtronomie a faits de nos jours, & de ſi grands droits à la gloire même de ceux qu'elle pourrra faire après lui. Il en eſt de même des 5 Satellites de Saturne que des 4 de Jupiter. C'eſt donc une Loi inviolablement obſervée par les corps celeſtes dans les petits Tourbillons particuliers ainſi que dans le grand : & comme l'hypotheſe la plus raiſonnable ſur le mouvement des Planetes, ou pour mieux dire, la ſeule raiſonnable, eſt qu'elles ſuivent le cours de la matiere celeſte qui les emporte, c'eſt aux differentes viteſſes de la matiere celeſte priſe à differentes diſtances du centre du Tourbillon, que doit s'appliquer la regle de Kepler.

Pour venir preſentement à la Démonſtration que j'ai promiſe ; Si par cette regle nous cherchons la viteſſe qui convient à la matiere celeſte proche de la Terre, nous trouverons qu'elle doit être à celle de la Terre à peu près comme 17 à 1, telle préciſément que nous avons déja vû que la demandoit le degré de peſanteur des corps terreſtres : le calcul n'en eſt ni long ni difficile.

La Lune étant éloignée de nous ou du centre de notre Tourbillon particulier d'environ 60 demi diametres de la

Terre, le cercle qu'elle parcourt autour de ce centre, est 60 fois aussi grand que celui qui décrit un point de la surface de la Terre sous l'Equateur ; & par conséquent elle a 60 fois autant de chemin à faire pour achever sa révolution, que ce point pour achever la sienne. Ainsi quand la Lune n'acheveroit sa révolution qu'en 60 jours, elle iroit aussi vîte que la Terre qui tourne en un jour : Si la révolution de la lune s'achevoit en 30 jours, sa vitesse seroit double de celle de la Terre sous l'Equateur, la Lune n'emploïant qu'un peu plus de 27 jours & demi à faire son tour, il s'ensuit que sa vitesse est un peu plus que double de celle de la Terre. Cela posé, la distance de la matiere celeste qui circule ici bas, & qui n'est éloignée du centre du Tourbillon que d'un demi-diametre de la Terre, & la distance de la Lune que nous avons faite de 60 de ces demi-diametres, sont l'une à l'autre comme 1 à 60, & leurs racines quarrées à peu près comme 1 à 8, ou comme 2 à 16, ou comme un peu plus de 2 à 17 ; donc en raison renversée, conformement à la regle de Kepler, la vitesse de la matiere celeste proche de nous, est à la vitesse de celle qui emporte la Lune comme 17 à un peu plus de 2 ; mais nous avons trouvé que la vitesse de la Lune, ou de la matiere celeste dont elle suit le cours, étoit en effet à la vitesse de la Terre, comme un peu plus de 2 à 1 ; donc la vitesse de la matiere celeste ici bas, est à la vitesse de la Terre environ comme 17 à 1 *; ce que j'avois à démontrer.*

Tel est le parfait accord entre ce qu'exige de vitesse dans la matiere celeste le Phenomene de la pesanteur, & ce que nous trouvons d'ailleurs qu'elle en doit avoir en vertu d'une loi établie par les Observations, & démontrée comme la loi fondamentale de tout le Systême de l'Univers, par l'ingénieux Auteur de *la nouvelle Explication du Mouvement des Planettes*. Si un accord si merveilleux ne delivre pas entierement l'esprit de la peine que lui fait ce mouvement rapide de la matiere celeste proche de la Terre, dont cependant on n'apperçoit aucun

effet ſenſible ; il doit au moins le diſpoſer à recevoir plus favorablement les conſidérations que nous avons propoſées pour réſoudre , ou pour affoiblir l'objection de M. Hughens.

Il eſt vrai qu'il ſe préſente bien de nouveaux embarras ; & je n'ai garde de diſſimuler que cette loi même que ſuivent les viteſſes des Planetes, quand on la conſidere dans la matiere celeſte, eſt environnée de difficultez ; il y en a pluſieurs qu'un peu d'attention fait évanoüir ; il ſeroit ennuïeux & inutile de s'y arrêter : il y en a d'autres plus conſidérables, & parmi celles-ci deux principales, que je vais toucher en peu de mots.

La premiere s'offre d'abord, & il eſt impoſſible de n'en être pas frappé. Selon la regle de Kepler jointe à l'hypotheſe de nos Tourbillons, la matiere celeſte fait autour de la Terre 17 révolutions en un jour, d'où vient que la Terre n'en fait qu'une ? Pourquoi ne ſuit-elle pas la regle ? Cette difficulté eſt commune aux autres Tourbillons; Jupiter, & Saturne tournent chacun autour de ſon centre ; & tous deux infiniment moins vîte qu'ils ne devroient ſelon la regle. Le Soleil qui occupe le centre du grand Tourbillon, tourne de même autour de ſon axe, & met environ 27 jours & $\frac{1}{2}$ à tourner, au lieu que ſuivant la regle, il n'y devroit emploïer qu'un peu plus de 3 heures. J'avoüe que je ne ſuis pas content de mes lumieres ſur cette difficulté, & que je n'ai pas de plus ſolide réponſe à y faire que celle qu'on peut voir dans la nouvelle Explication du Mouvement des Planetes, Ouvrage qui eſt plus aiſé de critiquer qu'il ne le ſeroit d'en faire un meilleur.

L'autre difficulté eſt de M. Newton. Au milieu d'un Fluide uniforme, & en repos ; c'eſt-à-dire, qui n'a d'autre mouvement que l'agitation même en tous ſens de ſes parties, qui le rend fluide, il conçoit une Sphére ſolide qui tourne autour d'un axe à peu près comme la Terre. Cette Sphére en tournant fait une continuelle impreſſion ſur une premiere ſurface du Fluide, & celle-ci ſur une

autre, & cette autre sur une autre encore, & ainsi de suite. Dans cette supposition arbitraire, il cherche géométriquement avec quelle proportion le mouvement se communique aux surfaces de proche en proche, ou quel doit être le rapport des vitesses à différentes distances du centre commun: & son Analyse lui donnant un rapport different de celui qui s'observe dans les Planetes, il conclut qu'elles ne sont point emportées par le Fluide, & que les Tourbillons Cartesiens seroient incompatibles avec la loi qu'établit la regle de Kepler.

Je passe un grand nombre de réflexions qu'il y auroit à faire sur la Démonstration de M. Newton: je veux bien la recevoir; mais en la recevant je ne laisse pas de rejetter la conclusion qu'il en tire contre nos Tourbillons. Elle n'a de force qu'en vertu de la supposition gratuite que M. Newton fait, d'un Fluide parfaitement uniforme, & par tout d'une égale fluidité, & d'une résistance de la part des Surfaces, dans la raison de la vitesse. Mais si l'on suppose que la Fluidité augmente à mesure que l'on s'éloigne du centre, ou que l'on suppose une résistance plus grande que dans la raison de la vitesse, on retrouvera sans peine le même rapport que donne la Regle.

Ce que nous disons ici n'a pas échapé à l'exactitude de M. de Newton; il l'a trés expressément remarqué; mais il se contente de dire que ces suppositions ne seroient pas raisonnables; & quoique la derniere soit incontestable, il aime bien considerer la pesanteur comme une qualité inhérente dans les corps, & ramener les idées tant décriées de qualité occulte, & d'attraction. Il ne faut pas nous flatter que dans nos recherches de Physique nous puissions jamais nous mettre au dessus de toutes les difficultez; mais ne laissons pas de philosopher toûjours sur des principes clairs de Méchanique; si nous les abandonnons, toute la lumiere que nous pouvons avoir est éteinte, & nous voilà replongez de nouveau dans les anciennes ténébres du Peripathetisme, dont le Ciel nous veüille préserver.

METHODE GENERALE

Pour déterminer le point d'interſection de deux Lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté ſous des angles égaux moindres, ou plus grands qu'un droit: Et pour connoître la nature de la Courbe décrite par une infinité de tels points d'interſection.

PAR M. DE REAUMUR.

D'Illuſtres Géometres ont donné, avec le ſecours des nouvelles Méthodes, des formules pour trouver les raïons des Dévelopées; ou, ce qui revient au même, ils nous ont appris des expreſſions générales, par le moïen deſquelles il eſt aiſé de déterminer le point d'interſection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque ſous un angle droit. Ils ont auſſi trouvé la nature des Courbes décrites par une infinité de telles interſections; mais je ne ſçai perſonne, qui ait cherché à déterminer le point d'interſection de deux lignes droites infiniment proches qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté ſous des angles égaux, moindres, ou plus grands qu'un droit, & la nature des Courbes engendrées par une infinité de pareilles interſections, quoique ce Problême paroiſſe aſſez digne de la curioſité des Géometres, & qu'il ſurpaſſe autant par ſon étenduë celui des raïons des Dévelopées, qu'il eſt d'angles differens de l'angle droit: c'eſt en partie ce qui m'a excité à en chercher la Solution que je vais donner. 1709. 4 May.

PROBLÊME GENERAL.

FIG. I. *Une Courbe quelconque* AMmG *étant donnée, si l'on conçoit qu'une infinité de Lignes droites* FM, fm, *rencontrent cette Courbe en* M, m, *en faisant avec les Tangentes en ces points les angles* FMT, fmt *égaux à un angle quelconque donné* IOL *moindre ou plus grand qu'un droit; il est clair que les droites* FM, fm *se couperont quelque part en* N. *Or on demande* 1°, *ce point d'intersection* N *de ces deux lignes indéfiniment proches* FM, fm: 2°, *la nature de la Courbe* BNK *décrite par une infinité de semblables intersections.*

SOLUTION.

I. Aïant pris l'arc *Mm* infiniment petit, soient menez aux points *M*, *m* les raïons *MC*, *mC* de la Developée de la Courbe *AMG*, lesquels se rencontrent au point *C*; & soient de plus tirées les droites *MT*, *mt* perpendiculaires en *M*, *m*, aux raïons *CM*, *Cm*, ou tengentes de la Courbe en ces points. Si l'on suppose à présent que les droites *FM*, *fm*, qui font avec la Courbe les angles constans *FMT*, *fmt*, se croisent en *N*; & que du centre *N*, du raïon *Nm* on décrive le petit arc *mR*, on formera le secteur *NmR* semblable au secteur *CMm*; ce qu'il est aisé de voir, puisque les triangles *MSC*, *NmS* sont semblables, aïant les angles *MSC*, *mSN* égaux, & aussi les angles *CMS*, *SmN*; car si des angles *NMT*, *Nmt*, égaux par la supposition (puisqu'ils sont les complemens à deux droits des angles égaux *FMT*, *fmt*) on ôte les angles droits *CMT*, *Cmt*, les angles restans *CMS*, *SmN* seront égaux; par conséquent l'angle *MCm* est égal à l'angle *mNM*, & les secteurs *MCm*, *mNR* sont semblables.

On abaissera encore les perpendiculaires *MP*, *mp* sur l'axe *AP*, & on lui tirera la parallele *MV*; après quoi aïant nommé *MC*, r; *MN*, z; *Mm*, ds; les secteurs semblables *MCm*, *m NR* donneront l'analogie suivante,

$MC(r) . MN(z) :: Mm(ds) . mR = \frac{zds}{r}$. Mais il eſt clair que tous les angles du triangle infiniment petit *MmR* ſont donnez, l'angle *mMR* étant égal à l'angle donné *FMT*, & l'angle *mRM* droit. Ainſi nommant le ſinus de l'angle donné *mMR*, *m*; celui de l'angle *MmR*, *n*; on aura cette autre analogie; $m . n :: mR\left(\frac{zds}{r}\right) . MR = \frac{nzds}{mr}$.

On a encore $MR = \sqrt{Mm^2 - mR^2} = \frac{ds\sqrt{rr-zz}}{r}$. Ces deux valeurs étant comparées, donnent l'égalité ſuivante, $\frac{nzds}{mr} = \frac{ds\sqrt{rr-zz}}{r}$, ou $nz = m\sqrt{rr-zz}$; & après avoir quarré, tranſpoſé $mmzz + nnzz = mmrr$; ce qui donne enfin $z = \frac{\pm mr}{\sqrt{mm+nn}}$. De ſorte que pour déterminer le point *N*, il faut prendre *MN* 4ᵉ proportionelle au ſinus total, au ſinus de l'angle donné, & au raïon de la Dévelopée.

Car on aura $\sqrt{mm+nn} . m :: r . z = \frac{mr}{\sqrt{mm+nn}}$. On ſeroit arrivé par un chemin ſemblable à la même expreſſion de *MN*, ſi on eut pris l'angle *FMT* obtus, au lieu qu'on l'a fait aigu. C'eſt pourquoi il ſeroit inutile de repeter ici la même analyſe, & une autre figure pour ce 2ᵉ cas. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

L'équation $z = \frac{\pm mr}{\sqrt{mm+nn}}$ apprend, que ſi on joint le point d'interſection *C* des raïons de la Dévelopée, & le point d'interſection *N* des droites *FM*, *fm* par une droite *NC*, cette ligne ſera perpendiculaire ſur *FMN*. Car ſoit élevée une perpendiculaire au point *N*, je dis qu'elle rencontrera le raïon de la Dévelopée en *C*. Ce qui eſt viſible, ces triangles *MmR*, *CMN*, étant ſemblables, aïant l'un & l'autre un angle droit, & les angles *CMN*, *MmR* égaux. Car l'angle *CMT* étant droit, les angles *FMT*, *CMN* pris enſemble, ſont auſſi égaux à un droit: de même que les angles *RMm*, & *MmR*. L'on a

donc $FMT + CMN = RMm + MmR$; d'où ôtant d'un côté l'angle FMT, & de l'autre ſon égal RMm, on aura $CMN = MmR$. Partant ces deux triangles rectangles ſont ſemblables, & leurs angles ont les mêmes ſinus. D'où l'on tirera l'analogie ſuivante : le ſinus (m) de l'angle MCN, eſt au ſinus ($\sqrt{mm+nn}$) de l'angle droit : : MN (z) . $MC = \frac{z\sqrt{mm+nn}}{m} = r$. Par conſéquent la ligne MC eſt le raïon de la Dévelopée ; & la ligne CN qui joint les points C & N, eſt perpendiculaire ſur FM en N. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II.

On tire du Corollaire précédent une maniere bien ſimple de déterminer le point N, puiſqu'on n'aura qu'à tirer du point C une perpendiculaire ſur FM prolongée, elle la rencontrera au point cherché N ; ou, ce qui revient au même, on décrira ſur le diametre MC, un demi-cercle MNC, qui ſera rencontré par FM prolongée au point cherché N.

COROLLAIRE III.

Il eſt évident que le cercle $MNCDM$, décrit ſur le raïon MC de la Dévelopée pour diametre, eſt le lieu qui contient tous les points d'interſection de deux droites FM, fm infiniment proches, qui font avec le même arc infiniment petit Mm de la Courbe AMG les angles égaux FMT, fmt, quels qu'ils ſoient : ou, ce qui eſt la même choſe, que ſi l'on faiſoit mouvoir les droites FM, fm, ſur les points M & m pris pour poles, de maniere que l'angle FMT fut toûjours égal à l'angle fmt ; leur point d'interſection N décriroit un cercle $MNCDM$, qui a le raïon MC de la Dévelopée pour diametre.

COROLLAIRE IV.

D'où il ſuit 1°, que le point N d'interſection eſt toujours du côté concave de la Courbe, c'eſt-à-dire, du même

côté

côté que le raïon de la Dévelopée. 2°, Que lorſque l'angle FMT ſera aigu, le point d'interſection doit ſe trouver par de-là MC par rapport à T. 3°. Que lorſque l'angle FMT ſera obtus, que le point N ſera placé en deçà de MC par rapport à T. 4°. Que lorſque l'angle FMT ſera droit, alors le point d'interſection N deviendra le point C qui eſt celui où ſe croiſent les raïons de la Dévelopée.

COROLLAIRE V.

On voit encore par les Corollaires précédens, que MN eſt toujours moindre que MC; ce qui eſt auſſi viſible par l'équation $z = \frac{+ mr}{\sqrt{mm + nn}}$, qui ſert auſſi à faire voir que lorſque MC (r) ſera nul ou infini, z ſera auſſi nul ou infini.

COROLLAIRE VI.

L'équation $z = \frac{+ mr}{\sqrt{mm + nn}}$ détermine non ſeulement le point d'interſection N; mais encore un autre point F, f, poſé de l'autre côté de la Courbe, qui ſera auſſi éloigné du point M, que l'eſt le point N.

COROLLAIRE VII.

Deux de ces trois choſes étant données, l'angle FMT, le raïon CM de la dévelopée, & la ligne MN, il ſera toûjours facile de trouver la 3ᵉ. 1°. L'angle FMT & le raïon MC de la dévelopée étant donnés, on trouve (*Corol.* 1. & 2.) la grandeur de MN. 2°. L'angle FMT, & la droite NM étant données, il ſera aiſé d'avoir le raïon de la dévelopée MC, il n'y aura qu'à prendre l'angle NMC égal au complement à l'angle droit de l'angle FMT, & élever au point N la perpendiculaire NC, elle ira rencontrer MC en C; de maniére que CM ſera le raïon de la dévelopée, ce qui eſt évident, (*Corol.* 1. & 2.) 3°. La grandeur des lignes MC, MN étant donnée, on trouvera aiſément celle de l'angle FMT, puiſqu'on ſçait que l'angle MNC eſt droit, il n'y aura donc qu'à faire cette propor-

tion : Comme $MC . MN$, ainſi le ſinus de l'angle droit eſt au ſinus de l'angle MCN, ou de ſon égal FMT. *Ce qu'il falloit trouver.*

Equation de la Courbe formée par une infinité de points d'interſections N.

II. Pour avoir à préſent une équation qui exprime la nature de la Courbe BNK, formée par une infinité de points d'interſection tels que le point N, on tirera les perpendiculaires NQ ſur l'axe AQ de la Courbe donnée AMG, & TF ſur FM. On joindra les points, T, N, par la droite TN. On menera enfin par le point N une parallele à l'axe AQ qui rencontrera MP en E. Cette préparation faite, tout reſtant nommé comme art. 1. on nommera de plus les indéterminées de la Courbe AMG, AP, x; PM, y; celles de la Courbe BNK, AQ, u; QN, s; la ſoûtangente TP, p; la tangente TM, t; d'où on aura $PQ = NE = AQ - AP = u - x$; $ME = PM - PE = y - s$. Or $MN^2 = ME^2 + NE^2$, ce qui étant exprimé algébriquement donne l'équation (A) $zz = yy - 2sy + ss + uu - 2ux + xx = \frac{mmrr}{mm+nn}$ (*art.* 1.). On a encore $NT^2 = QT^2 + QN^2 = TF^2 + FN^2$; ce qui donnera une autre équation algébrique, après qu'on aura trouvé les expreſſions des lignes FM, FT; ce qui eſt facile, l'angle TFM étant droit, l'angle FMT donné, & par conſéquent les triangles FMT, RMm ſemblables. Ainſi leurs angles ont les mêmes ſinus ; ce qui donnera les deux analogies ſuivantes (*art.* 1.) Le ſinus de l'angle droit ($\sqrt{mm+nn}$). au ſinus de l'angle FTM (n) : : TM (t). $FM = \frac{nt}{\sqrt{mm+nn}}$. Et le ſinus de l'angle droit ($\sqrt{mm+nn}$). au ſinus de l'angle FMT (m) : : TM (t). $TF = \frac{mt}{\sqrt{mm+nn}}$. Partant $FN = FM + MN = \frac{nt+mr}{\sqrt{mm+nn}}$. On a auſſi $QT = PT + PQ = p + u - x$. On a donc $QT^2 + QN^2 = pp + 2pu + uu - 2ux$

$-2px+xx+ss$; & $FT^2+FN^2=\frac{nntt+2mntr+mmrr+mmtt}{mm+nn}$ ce qui donne l'équation (B) $tt+\frac{mmrr+2mntr}{mm+nn}=ss+pp+2pu+uu-2px-2ux+xx$: De sorte que soustraïant le premier membre de l'équation A de ce membre de l'équation B, & l'autre de l'autre, on aura l'équation (C) $\frac{2mntr}{mm+nn}=pp-tt+2pu-2px-yy+2sy$, dans laquelle substituant pour $pp-tt$ sa valeur $-yy$, on a enfin l'équation (D) $\frac{mntr}{mm+nn}=pu+sy-px-yy$, qui avec l'équation ($A$) $\frac{mmrr}{mm+nn}=yy-2sy+ss+uu-2ux+xx$, & celle de la Courbe $AMmG$, seront suffisantes pour en trouver un 4e qui ne contiendra que les coordonnées u, s de la Courbe BNK. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

Il est clair que la Courbe d'intersection BNK sera géometrique, lorsque la Courbe génératrice $AMmG$ le sera.

COROLLAIRE II.

Il suit de la génération de la Courbe BNK que MN est la Tangente en N de cette Courbe. Car 1°, il est évident, qu'avant de la rencontrer en N comme en S, elle est hors de cette Courbe, puisque si elle la rencontroit en S, il faudroit qu'elle s'y croisât avec une ligne infiniment proche mS, (car on peut toujours mener du point S une droite mS sur un petit arc Mm, qui fasse avec lui un angle égal à FMT); & alors le point N seroit en S contre la supposition. 2°. Elle ne la rencontre pas par-delà le point N (ce qu'on apperçoit aisément en tirant une droite GK, avec les conditions requises par le Problême) infiniment près de mN, leur point d'intersection K devant déterminer un de ceux de la Courbe : Mais il est visible que GK coupe MN prolongée en H, avant de couper mN en K; d'où il suit que le point H est hors de la Courbe BNK; & à plus forte raison les autres points

de *MN* en sont aussi dehors ; par conséquent elle rencontre la Courbe au seul point *N*, où est sa Tangente en ce point.

COROLLAIRE III.

Il suit du Corollaire précédent, que *CN* est perpendiculaire à la Courbe *BNK*, puisque (*art.* 1. *Corol.* 1.) elle est perpendiculaire à *NM* Tangente de cette Courbe.

COROLLAIRE IV.

On pourroit regarder la Courbe *BNK* comme une espece de Caustique par refraction dont on n'a point encore parlé, formée par l'intersection des raïons infiniment proches qui rencontreroient *AMmG* sous un même angle : car si on imagine que l'espace renfermé par cette Courbe, est un verre éclairé par une infinité de points lumineux *Z*, *Y*, &c. il est clair que tous les raïons *ZM*, *YM* qui rencontreront cette surface sous des angles *ZMT*, *Ymt* égaux continuëront leur route après la réfraction sous les angles égaux *FMT*, *fmt* ; par conséquent ils se couperont en *N*, & par une infinité de pareilles intersections la Caustique *BNK* sera décrite.

COROLLAIRE V.

L'espace renfermé entre la Courbe *AMmG*, & la Courbe *BNK*, est à l'espace renfermé entre la Courbe *AMmG* & sa Dévelopée dans le rapport de $mm . mm + nn$: car la somme infinie des Secteurs *mRN* remplira ce 1^r^ espace, celle des Secteurs *MmC* le 2e ; or ces sommes contiendront chacune un égal nombre de Secteurs, chaque *NmR* aïant un *CMm* qui lui correspond ; comme aussi chaque *CMm*, un *NmR*. Mais ces Secteurs sont entr'eux dans le rapport constant de $mm . mm + nn$, leurs sommes sont donc aussi entr'elles dans le même rapport. Il est aisé de démontrer que le Secteur *NmR*, est au Secteur *CMm* : : $mm . mm + nn$. *NmR* étant $= mR \times \frac{1}{2} NM =$ (*art.* 1.)

$\frac{zds}{r} \times \frac{1}{2} z = \frac{mmrds}{2 \times \overline{mm+nn}}$, & $CMm = Mm \times \frac{1}{2} CM = \frac{rds}{2}$. Partant $NmR . CMm :: \frac{mmrds}{2 \times \overline{mm+nn}} . \frac{rds}{2} :: mm . mm + nn$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXEMPLE I.

Soit la Courbe donnée un quart de cercle $AMmG$, qui est rencontré par une infinité de droites Fm, fm, qui font avec lui des angles FMT, fmt, égaux à un même angle donné. Si on veut avoir l'équation qui exprime la nature de la Courbe décrite par une infinité d'interſections, ſemblables à celle des droites FM, fm, infiniment proches; on aura (tout reſtant nommé comme art. 1. & 2.) & nommant de plus le raïon du cercle donné a; $x = a - \sqrt{aa - yy}$; le raïon de la dévelopée (r) ſera auſſi $= a$, la dévelopée de cette Courbe étant ſon centre C; l'expreſſion de la ſoûtangente (p) deviendra $= \frac{yy}{\sqrt{aa-yy}}$; & celle de la Tangente $(t) = \frac{ay}{\sqrt{aa-yy}}$: leſquelles valeurs de x, r, p, t, ſubſtituées dans les deux équations générales (A) $\frac{mmrr}{mm+nn} = yy - 2sy + ss + uu - 2ux + xx$: (D) $\frac{mntr}{mm+nn} = pu + sy - px - yy$; elles ſe changeront en celles-cy : . . . .

$$(E)\ \sqrt{aa-yy} = \frac{ss - 2sy + uu - 2au + 2aa - \frac{mmaa}{mm+nn}}{2a - 2u},$$

$$(F)\ \sqrt{aa-yy} = \frac{ay - uy - \frac{mnaa}{mm+nn}}{s}$$

: égalant le 2e membre de l'équation E au 2e membre de l'équation F, on en tirera,

$$y = \frac{s^3 + 2aas - 2aus + suu + \frac{-mmaas - 2mnaau + 2mna^3}{mm+nn}}{2aa - 4au + 2uu + 2ss},$$

On tirera auſſi l'équation F par les voïes ordinaires,

$$y = \frac{\frac{mna^3 - mnaau}{mm+nn} \pm \sqrt{aas^4 + a^4ss - 2a^3uss + aauuss - \frac{mmnna^4ss}{\overline{mm+nn}^2}}}{aa - 2au + uu + ss}.$$

Fig. 11.

& après avoir égalé les deux valeurs d'y quarré, transposé, effacé les termes qui se détruisent, on aura l'équation suivante, qui ne contient que des u, & des s,

$$u^4 - 4au^3 \begin{matrix} +4aauu \\ +2uuss \\ \underline{-2mmaauu} \\ mm+nn \end{matrix} \begin{matrix} -4assu \\ \underline{+4mma^3u} \\ mm+nn \end{matrix} \frac{-2mmaass}{mm+nn} + s^4 - \frac{3m^4a^4}{mm+nn^2}, = 0.$$

Si on divise cette derniere équation par l'équation (G) $uu - 2au + ss - \frac{3mmaa}{mm+nn} = 0$, on aura pour quotient l'équation (H) $uu - 2au + ss + \frac{mmaa}{mm+nn} = 0$, qui exprime la nature de la Courbe d'intersection BNK, qui est aussi un quart de cercle dont le raïon $BC = \frac{na}{\sqrt{mm+nn}}$; il est visible que l'équation G est aussi une équation au cercle; mais il reste à sçavoir de quels points ce cercle est le lieu; ce qu'on trouvera aisément pour peu qu'on se souvienne que (*art.* 1. *corol.* 6.) l'équation $z = \pm \frac{mr}{\sqrt{mm+nn}}$ donne non-seulement le point d'intersection N des droites FM, fm, mais encore les points F, f, aussi éloignez des points M, m, où elles rencontrent la Courbe, que l'est celui d'intersection des mêmes point M, m, & comme la premiere équation générale A, contient le quarré de $z = \frac{mmrr}{mm+nn}$, il suit qu'on doit non-seulement trouver par le moïen de ces deux équations, celle qui exprime la nature de la Courbe décrite par les points d'intersections N; mais encore une autre qui donnera l'équation d'une Courbe qui contient tous les points F tels que $FM = MN$. Aussi est-ce ce que donne l'équation (G) $uu - 2au + ss - \frac{3mmaa}{mm+nn} = 0$, qui est un cercle, dont le raïon $CH = a\sqrt{\frac{4mm+nn}{mm+nn}}$.

La seule analyse de l'article 1[r] suffit pour faire voir, que la Courbe d'intersection BNK est un cercle. Car la dévelopée de la Courbe $AMmG$ étant le point C, il est évident que toutes les lignes CN qui joignent les points d'intersections N, & les extrémitez des raïons de le dévelopée se termineront au point C; il n'est pas moins

clair que la grandeur de CN eſt conſtante, puiſque (*art.* 1. & *corol.* 1.) CM eſt à MN dans un rapport conſtant, & que tous les angles du Triangle rectangle CMN ſont conſtans. On voit avec la même facilité que le lieu des points F pris tels que $FM = NM$ eſt auſſi un cercle, puiſque la droite $FC = \sqrt{FN^2 + NC^2}$ eſt de grandeur conſtante. Le ſeul article 1. ſuffira auſſi dans l'Exemple qui ſuit, pour faire ttouver la nature de la Courbe d'interſection N.

EXEMPLE II.

Soit la Courbe donnée $AOMG$ une Logarithmique ſpirale, dont la proprieté eſt que ſi du point A (qu'elle environne par une infinité de tours) on lui mene une appliquée quelconque AM; & au point M, la Tangente MT, qui rencontre en T la Soûtangente AT perpendiculaire à AM, le rapport de AM à AT eſt conſtant; ou, ce qui eſt la même choſe, l'angle AMT eſt toujours le même. Si l'on conçoit que deux lignes infiniment proches FM, fm, font avec cette Courbe des angles FMT, fmt, égaux à un angle donné, on déterminera aiſément le point d'interſection N de ces deux lignes, en décrivant le cercle MNC ſur le raïon MC de ſa dévelopée pris pour diametre, FM prolongée rencontrera ce cercle en N qui eſt le point d'interſection des droites FM, fm, (*art.* 1. *corol.* 1.) pour connoître la nature de la Courbe décrite par une infinité de points d'interſections ſemblables au point N, on décrira la dévelopée ACR de la Logarithmique AMG, qu'on ſçait être la même Logarithmique miſe dans une poſition differente; après quoi on joindra les points N, A, par la droite NA; on menera de plus ſur NA la perpendiculaire AF, & on prolongera MN Tangente (*art.* 2. *corol.* 2.) de la Courbe cherchée, juſques à ce qu'elle rencontre AF au point F. Cette préparation ſuppoſée, il eſt aiſé de démontrer que la Courbe d'interſection ANK eſt elle-même une Logarithmique ſpirale, 1°, différente de la Logarithmique FIG. III.

AOMG, lorſque l'angle *ANF* eſt plus grand, ou moindre que l'angle *AMT*; 2°, qu'elle ſera la même Logarithmique ſpirale miſe dans une autre poſition lorſque l'angle *ANF* ſera égal à l'angle *AMT*. Pour le démontrer, il ne faut que faire voir que l'angle *ANF* eſt conſtant, ce qu'on peut faire de la maniere ſuivante : Dans le triangle *AMN*, l'angle *NMA* eſt conſtant; car il eſt compoſé des angles conſtans *NMC* (complement à l'angle droit de l'angle donné *FMT*) & *CMA* (complement à l'angle droit de l'angle *AMT* conſtant par la proprieté de la ſpirale donnée). Or les côtez *AM*, *MN*, qui forment l'angle conſtant *AMN*, ſont entr'eux dans un rapport conſtant; d'où il ſuit que les deux autres angles du même triangle, ſont auſſi conſtans. Il s'agit ſeulement de démontrer que *AM* eſt à *MN* dans un rapport conſtant, ce qui eſt viſible, puiſque *AM* eſt à *MC* dans un rapport conſtant par la proprieté de la Logarithmique *ACR*, & que *MC* eſt auſſi à *MN* dans un rapport conſtant (*art.* 1.) $:: \sqrt{mm+nn} . m$. Donc il eſt auſſi évident que *AM* eſt à *MN* dans un rapport conſtant; par conſéquent les angles *MNA*, *MAN* ſont conſtans, & la Courbe d'interſection *ANK* eſt une Logarithmique ſpirale; car l'angle *NAF* étant droit, *NA* ſera à *AF* dans un rapport conſtant, ce qui eſt la proprieté de cette Courbe. Auſſi ſemble-t-il que ce lui en ſoit une de ſe reproduire, puiſqu'outre toutes les manieres dont on a fait voir qu'elle ſe reproduiſoit, en voici encore une nouvelle. Car toutes les fois que l'angle *FNA* ſera égal à l'angle *TMA*, elle ſe reproduira elle-même.

COROLLAIRE I.

Pour faire l'angle *FNA* = *TMA*, ou pour avoir un angle *FMT* tel que la Courbe d'interſection *ANK*; ſoit la même Logarithmique ſpirale *AOMG* dans une poſition differente : on n'aura qu'à faire l'angle *FMT* = *TMA*; & on aura ce qu'on cherchoit. Pour le démontrer, ſoient joints les points *N*, *C*, par la droite *NC*; il eſt

eſt évident que l'angle *NCM* = *FMT* (puiſqu'étant joints l'un ou l'autre au même angle *NMC*, ils forment un angle droit) = (*hypot.*) *TMA* = *MCA*. D'où il ſuit que les triangles rectangles *MNC*, *CAM*, ſont ſemblables & égaux ; partant *NC* = *AC*, ou l'angle *CND* = l'angle *CAD*, & l'angle *NDC* = l'angle *CDA* ; par conſéquent les angles en *D* ſont droits. Or le triangle rectangle *NDC*, eſt ſemblable au triangle rectangle *MDN* ; d'où il ſuit enfin que l'angle *MND* = l'angle *NCD* = *FMT* = (*Conſt.*) *TMA*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE II.

Il ſuit du Corollaire précedent, que la poſition de *AOMG*, lorſqu'elle deviendra la Courbe d'interſection *ANK*, ſera telle 1°, que menant par un point quelconque la Tangente *NF* à cette Courbe, elle coupera la Logarithmique *AOMG* en *M*, après quoi ſi on méne par le point *M*, une Tangente *MT*, à la Logarithmique *AOMG*, la Soûtangente *A F* de la Logarithmique *ANH*, ſera perpendiculaire à la Tangente *MT*, au point *B* où elles ſe rencontrent : 2°, que *AF* ſera parallele au raïon *MC* de la dévelopée de la Courbe *AOMG* ; car les angles *MDA*, *DAB*, *BMD*, étant droits, l'angle *MBA* ſera droit auſſi, & *MBAD* un parallelogramme rectangle : 3°, que les Appliquées *AN* de cette Logarithmique ſont paralleles aux Tangentes *MT* de la Logarithmique *AOMC* : 4°, que *MN* = *MA* ; ainſi pour conſtruire la Logarithmique d'interſection *ANH*, dans ce cas il ne faut que prendre ſur *FM* prolongée *MN* = *MA*, Appliquée de la Spirale donnée *AOMG*.

COROLLAIRE III.

Si l'angle donné *FMT* eſt égal au complement à deux droits de l'angle *AMT* ; c'eſt-à-dire, ſi on conçoit que les droites *HM* rencontrent la Logarithmique *AOMG* en *M*, de maniere que l'angle *HMT* = à l'angle *MTA* + l'angle *MAT*, la Courbe d'interſection deviendra le

point *A*, auquel la Spirale logarithmique *GMO*, arrive après une infinité de tours ; ce qui est évident, puisqu'alors *HM* est l'Appliqué *AM* prolongée, & que toutes les *AM* partent du point *A*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXPERIENCES

SUR LES METAUX,

Faites avec le Verre ardent du Palais Royal.

PAR M. GEOFFROY.

8. Mai 1709.

Comme Monseigneur le Duc d'Orleans, par le zele qu'il a pour le progrez des Sciences, veut bien permettre à ceux de cette Academie qui ont quelques expériences à faire au feu du Soleil, de se servir de son verre ardent, j'ai profité de cet avantage pour examiner les différens changemens qui arrivent aux Métaux exposez au foyer de ce verre, dont l'ardeur & l'efficace surpassent de beaucoup la force de nos feux ordinaires.

Lorsque j'avançai dans mon Mémoire du 21 Mai 1707, que tous les Métaux ou leurs cendres exposées à un feu violent tel que le feu du Soleil, se réduisoient en verre, je ne parlai point des différentes manieres dont les Métaux se vitrifioient, & des autres circonstances qui accompagnoient cette vitrification, parce que je n'avois pas encore examiné pour lors ces choses avec toute l'attention qu'elles méritoient ; mais aïant eu occasion de le faire depuis, j'entrerai aujourd'hui dans le détail de ces expériences, & je rapporterai ce que j'ai observé sur les quatre métaux imparfaits, le Fer, le Cuivre, l'Etain & le Plomb, exposez au foyer du verre ardent. Je ne parlerai point encore ici ni de l'Or ni de l'Argent, parce que, comme leur analise m'a paru beaucoup plus difficile que celle des autres métaux, je me suis reservé d'y travailler lors-

Fig. 1.re

Fig. 3.

Fig. 1re

Fig. 2

Fig. 3

que j'aurai approfondi autant qu'il me ſera poſſible, la nature & la compoſition des autres.

Dans les experiences que j'ai voulu faire au foyer du verre ardent, une des choſes qui m'a le plus arrêté, ç'a été la difficulté de trouver des matieres pour y tenir les métaux en fonte.

Le charbon, dont on ſe ſert ordinairement, eſt à la verité une matiere trés commode ; mais il m'étoit impoſſible d'y vitrifier aucun des métaux. Les portions de métal qu'on tient long-tems en fonte au foyer du verre, ſe diſſipent en fumée, ou ſautent par petites parcelles, & tant qu'il y reſte quelque choſe, ce peu qui reſte eſt toûjours du métal juſqu'à ce qu'il ſoit entierement diſſipé.

J'en découvris bientôt la raiſon que j'ai rapportée dans les Memoires de 1707. Le charbon eſt une matiere toute penetrée des parties huileuſes ou ſulphureuſes (comme on voudra les appeller). Le premier effet du feu ſur le métal, c'eſt d'en enlever les parties huilleuſes. Or, ſi à meſure que cette huile eſt enlevée de la ſubſtance du métal, celle qui le ſoûtient lui en refournit de nouvelle, il reſtera toûjours le même qu'il étoit auparavant ; il n'y aura que la grande violence du feu qui l'enlevera peu à peu en parcelles trés petites.

Je cherchai donc une autre matiere, qu'on ne pût point ſoupçonner de contenir de parties huileuſes. M. Tshirnhaus, à qui on eſt redevable de la fabrique de ces grands verres & des premieres experiences qu'on y a faites, dit y avoir vitrifié les métaux en ſe ſervant de la porcelaine pour ſupport. En effet elle réüſſit aſſez bien, pourvû qu'on en ait des morceaux fort épais, & dont on ait emporté le vernis : mais la difficulté qu'il y avoit de trouver une aſſez grande quantité de pieces de porcelaines épaiſſes & commodes pour faire toutes mes expériences, m'obligea d'avoir recours à des matieres plus communes & encore plus difficiles à fondre s'il étoit poſſible.

Entre les differentes matieres que j'ai eſſaïées, celles

qui m'ont paru les meilleures sont les coupelles ordinaires & les tessons degrez. Les coupelles soûtiennent assez long-tems les métaux en fusion au foyer du verre à la réserve du plomb qui les pénetre assez promptement si-tôt qu'il se vitrifie, & qui leur sert ensuite de fondant. Les tessons de grez soûtiennent le feu du foyer plus long-tems qu'aucune autre matiere sans se fondre; mais il faut une grande précaution pour les échauffer jusqu'à les faire rougir sans qu'ils s'éclattent, & lorsqu'ils sont échauffez le moindre vent froid les fait fendre. C'est cependant la matiere dont je me suis servi avec le plus de succès pour tenir long-tems les métaux en fonte, en prenant d'ailleurs toutes les précautions possibles pour éviter les inconvéniens que je viens de rapporter.

Une autre chose encore qui m'a empêché de pousser mes recherches sur les Métaux aussi loin que je l'aurois souhaité, ç'a été le peu de Soleil favorable que j'ai eu depuis deux ans; car la plûpart de ces experiences demandent un Soleil net, fort & constant, sous lequel on puisse tenir long-tems les matieres dans une fonte parfaite: & à peine ai-je eu pendant l'Eté dernier trois ou quatre jours tels que je les souhaitois, le Ciel s'étant presque toûjours trouvé coupé de nuages vers l'heure de midy, qui est le seul tems de la journée propre pour ce travail.

Je viens maintenant au détail des experiences que j'ai faites, & je commence par le Fer.

DU FER.

J'ai exposé au foyer du verre ardent un morceau de Fer forgé pesant environ un gros; il a rougi, sa superficie s'est couverte d'une matiere noire comme une espece de poix ou de bitume liquide. Si on retire le Fer en cet état, cette matiere se fige sur la surface du métal, & y forme une petite pellicule ou écaille noirâtre trés mince, qui s'enleve quelquefois fort aisément en frappant dessus,

& la place du Fer que cette écaille couvroit, paroît plus blanche que le Fer n'eſt ordinairement. Cette écaille eſt une portion de la partie huileuſe du Fer, (comme M. Homberg l'a déja remarqué,) qui pouſſée à la ſuperficie du métal prêt à ſe fondre, y ſéjourne quelque tems avant que de s'exhaler. C'eſt apparemment cette partie huileuſe qui s'éleve ſur le Fer & ſur l'Acier poli qu'on fait échauffer, & qui leur donne toutes les couleurs depuis le jaune juſqu'au violet ou couleur d'eau, & juſqu'au noir.

Si on continuë à tenir ſur le charbon ce morceau de Fer, il s'y fond entierement, & il commence en même tems à jetter des étincelles fort vives, en trés grande quantité, & qui s'écartent quelquefois de plus d'un pied autour du charbon.

Quand on ramaſſe ce qui tombe pendant ce petillement en expoſant ſous le charbon des feüilles de papier, on trouve que ce ſont autant de globules de fer trés petits & creux pour la plûpart.

Tout le Fer qu'on tient en fonte ſur le charbon, ſe diſſipe en petillant de cette maniere ſans qu'il en reſte rien : quelquefois cependant ce métal ceſſe de petiller, lorſque le charbon s'étant en partie conſumé, il s'eſt couvert d'un lit de cendres ſur lequel ſe trouve poſé le Fer fondu ; car comme le petillement du Fer ne me paroît venir que de l'action des parties huileuſes du charbon ſur celles de ce métal, les cendres empêchant cette huile de paſſer du charbon dans le Fer, il doit reſter tranquillement en fuſion ; mais ſi par quelque ſecouſſe ou autrement, les cendres ſe dérangent en ſorte que le Fer vienne à toucher immédiatement le charbon, il commencera à petiller de nouveau. Quelquefois même la chaleur qui tient en fonte le métal, fond auſſi les cendres en verre ; alors ce verre ſe confond avec le métal, & il ſe fait un boüillonnement trés conſidérable. Si on retire dans cet inſtant le métal du foyer, il paroîtra à demi vitrifié ou réduit en une maſſe noirâtre & friable. D'au-

tres fois ce verre des cendres nage ſur le métal & s'y ramaſſe en gouttes tantôt claires & tranſparantes & tantôt obſcures, ſelon qu'il eſt plus ou moins mêlé de métal.

Bien plus, ſi après avoir laiſſé réfroidir ſur le charbon du Fer fondu, on l'expoſe de nouveau ſur le grez au foyer du verre, il y petille trés vivement & ſe diſſipe tout en éteincelles, ce que ne fait point le Fer ordinaire qui n'a point paſſé ſur le charbon. Ce petillement peut venir de la prompte rarefaction de l'huile du charbon, dont tous les pores du Fer ſe ſont chargez abondamment : peut-être auſſi eſt-ce l'effet de l'action des ſels du Fer ſur l'huile de charbon.

J'ai expoſé au foyer ſur le grez du Fer & de l'Acier, ils y ont rougi, ils s'y ſont fondus ſans petiller ni jetter d'étincelles; ils ont fumé aſſez conſidérablement, & le métal fondu eſt devenu peu à peu comme de l'huile. Après avoir retiré du foyer ces matieres fonduës, elles ſe ſont figées en une maſſe réguline, friable, & qui paroiſſoit quelquefois légerement ſtriée ou diſpoſée en aiguilles.

Quoique cette matiere ne paroiſſe point du tout tranſparente, on peut cependant la regarder comme un commencement de vitrification ou un état moïen entre le métal & le verre; elle pourroit ſe vitrifier à la fin comme les autres métaux, ſi on pouvoit la tenir aſſez long-tems expoſée au foyer ſans fondre ſes ſupports ni ſe mêler avec eux, mais en continuant de tenir cette matiere au foyer, la grande chaleur du Soleil qui eſt néceſſaire pour la tenir dans une parfaite fuſion, fond bientôt auſſi le grez ou la coupelle qui la ſoûtiennent, & il réſulte de ce mélange une eſpece d'émail brun ou griſâtre.

On peut donc regarder cette maſſe reguline comme un fer à demi vitrifié, parce qu'il a été dépoüillé de la plus grande partie de ſon huile. Si on rend à cette maſſe une huile ſemblable à celle dont on vient de la dépoüiller, de friable qu'elle étoit elle deviendra fort dure & malleable, & d'obſcure qu'elle paroiſſoit auparavant, elle

prendra l'éclat du métal. C'eſt ce que j'ai fait en reportant cette matiere ſur le charbon au foyer. Elle s'y eſt fonduë, elle y eſt reſtée même aſſez long-tems en fonte ſans petiller, mais à la fin elle a étincellé avec la même vivacité que le Fer même; & retirée du foyer, elle ne m'a point paru différente du Fer fondu, à la réſerve qu'elle eſt plus blanche & plus compacte.

J'ai tenté les mêmes expériences ſur différentes matieres qui proviennent du Fer, comme ſur la roüille ou pouſſiere rouge qui ſe trouve autour des barreaux qui ont ſouffert long-tems le feu, ſur la roüille du fer expoſée à la pluïe, ſur le ſafran de Mars préparé avec le ſoufre, & ſur le *Caput mortuum* du vitriol vert, calcinez long-tems & à grand feu : toutes ces matiéres, qui ne ſont que du Fer plus ou moins dépoüillé de ſa partie huilleuſe, expoſées au foyer ſur le grez, s'y ſont funduës parfaitement, en ſorte qu'elles paroiſſoient liquides comme de l'huile, ſans petiller ni jetter d'étincelles; & les aïant retirées du foyer, elle ſe ſont figées en une maſſe réguline de la même maniere que le Fer. Lorſqu'au contraire j'ai preſenté au foyer ſur le charbon ces mêmes matieres ou les regules qui en provenoient, elles s'y ſont funduës, & elles y ont reſté tranquillement en fonte pendant quelque tems ſans petiller; mais par la ſuite elles ont petillé & jetté des étincelles auſſi vives que le Fer même, & la maſſe fonduë & réfroidie hors du foyer, a paru un véritable Fer fondu. Il eſt à préſumer que ces matiéres ont repuiſé dans le charbon l'huile qui leur avoit été enlevée en les réduiſant en chaux ou ſafran.

J'ai fait encore les mêmes expériences ſur le machefer qui eſt du Fer vitrifié avec la cendre du charbon de terre. Pour cela je l'ai fait mettre en poudre fort fine & laver pluſieurs fois, en ſorte qu'il fût dépoüillé de la plus grande partie du charbon, des cendres de la terre qui y étoient mêlées, & qu'il ne reſtât que la partie la plus peſante ou qui eſt chargée d'une plus grande quantité de métal. J'ai expoſé cette matiere au foyer ſur le grez, elle

s'y eſt fonduë fort promptement en ſe bourſouflant beaucoup dans le commencement, & elle s'eſt figée en ſe refroidiſſant en un émail noir fort dur dont la ſuperficie paroiſſoit un peu rougeâtre ou cuivrée. Si on continuë de tenir cet émail au foyer, il ſert de fondant au grez & le perce.

J'ai fait fondre du machefer au foyer ſur le charbon, il s'y eſt fondu de même que ſur le grez, & il y eſt reſté long-tems en fonte ſans petiller. Enfin après l'y avoir laiſſé trés-long-tems, il a commencé à jetter des étincelles; & ſi dans ce tems-là on retire cette matiere du foyer, on trouve dans le morceau d'émail quelques parcelles de métal blanc & luiſant que je crois être du Fer reſſuſcité.

Il paroît par ces expériences, que le Fer contient un ſoufre ou une ſubſtance huileuſe qui le rend brillant, malleable & facile à fondre.

Que cette huile eſt enlevée par le feu du Soleil, lorſqu'on y tient ce métal en fonte pendant quelque tems.

Que cette même huile eſt enlevée par la flâme du feu ordinaire, qui n'étant pas aſſez forte pour fondre le Fer, l'eſt du moins aſſez pour le réduire en une chaux ou eſpece de roüille.

Que le Fer dépoüillé de cette partie huileuſe ſe fond en une maſſe réguline, caſſante & friable qui approche aſſez de l'antimoine pour la couleur, qu'on peut regarder comme une matiere à demi vitrifiée; & il eſt à préſumer que ſi on pouvoit tenir aſſez long-tems une ſuffiſante quantité de cette matiere ſeule au foyer ſans qu'elle fondît ſes ſupports ni qu'elle ſe mêlât avec eux, elle ſe vitrifieroit parfaitement.

Que ce verre ou régule métallique n'a beſoin que d'un peu d'huile pour reparoître ſous la forme de métal.

Qu'il ne reprend ſa forme métallique ſur le charbon, que parce qu'il y puiſe cette ſubſtance.

Et qu'enfin cette partie huileuſe renfermée dans le charbon, eſt peu différente de celle du Fer. On pourroit

croire

croire néanmoins qu'elle en differe en quelque chose, puisque le Fer fondu qui en est penetré pétille & étincelle beaucoup.

Comme le Fer est le seul métal dans lequel j'aïe observé ce pétillement, cela suppose une proprieté particuliére au Fer que n'ont point les autres métaux. Ne pourroit-on point l'attribuer au sel vitriolique qui y est en trés grande abondance, & qui est trés avide des soufres.

C'est aussi à cette même avidité avec laquelle le sel vitriolique du Fer absorbe la partie huileuse du charbon, qu'on pourroit attribuer la promptitude avec laquelle le Fer consume le charbon; car il n'y a aucun autre métal qui use si vîte le charbon au foyer du verre.

Une autre observation que j'ai faite sur le Fer, c'est qu'il est le seul des quatre métaux imparfaits, sur lequel il s'éleve des goutes de verre en le tenant en fonte sur le charbon, dont je n'ai encore pû découvrir la raison.

DU CUIVRE.

Le Cuivre exposé au foyer du verre ardent commence par blanchir à la surface, il noircit ensuite en se couvrant d'une maniere de peau ou d'écaille noire, ridée ou plissée, & enfin il se fond tout-à-fait.

J'ai retiré ce métal aussi-tôt que la couleur blanche a paru; & après l'avoir laissé réfroidir, je n'ai rien trouvé d'extrordinaire à la superficie qui avoit repris à peu près la même couleur qu'elle avoit auparavant.

Je ne découvre pas d'où peut provenir cette couleur blanche. Doit-on l'attribuer à quelque sel volatil arsenical contenu dans le Cuivre, que la forte chaleur chasse à la surface de ce métal? Ou bien seroit-ce simplement l'effet du changement qui arrive dans les parties grossieres de la superficie du métal qui commence à se fondre?

La couleur noire que le cuivre prend ensuite, paroît être l'effet d'une matiere huileuse qui se fond la premiere

dans ce métal comme dans le Fer, & qui est élevée jusqu'à sa superficie par la forte chaleur.

J'ai continué à tenir du Cuivre rouge au foyer sur le charbon, il s'y est fondu, il y a jetté un peu de fumée fort legere, & il a diminué peu à peu jusqu'à se dissiper entierement.

J'ai mis du Cuivre rouge dans une coupelle au foyer du verre; le métal s'est fondu, il a jetté quelques fumées legeres; & après avoir été quelque tems en fonte, il est devenu liquide comme de l'huile. J'ai retiré cette matiere fonduë, & en se réfroidissant elle s'est figée en une masse réguline d'un rouge brun. Cette matiere est cassante & ne s'étend plus sous le marteau. Si on l'écrase, elle se met en poudre rouge comme le cinabre d'antimoine. Si on observe avec un microscope cette poussiere, on verra que ce sont autant de petits grains rouge transparans comme des petits rubis; ensorte qu'on jugera aisément que ce régule est un verre rouge trés foncé.

J'ai voulu étendre ce verre de cuivre en le mêlant avec du verre blanc; pour cet effet j'ai pulvérisé de ce verre de cuivre & du verre blanc; & les ayant mêlez, je les ai fondus ensemble; mais le mélange a pris d'abord à la fonte une belle couleur verte, & en continuant de le tenir au foyer, il a tiré sur le bleu. Je croi qu'on peut attribuer ce changement de couleur à l'action des sels alcalis du verre sur les parties du Cuivre; car ces sels ont coûtume de tirer des teintures vertes ou bleuës de ce métal.

Pour conserver donc au Cuivre vitrifié sa couleur rouge en le joignant au verre ordinaire, je me suis servi d'un autre moïen. J'ai fait fondre au foyer un morceau de Cuivre dans une coupelle, & dans le tems qu'il commençoit à se vitrifier, j'y ai jetté du verre blanc; dés que le verre a été fondu, j'ai retiré les matieres avant qu'elles aïent pû se confondre: quand le tout a été réfroidi, j'ai séparé du verre la portion réguline le mieux qu'il m'a été possible, & j'ai retiré des parcelles de ce verre chargées

de quelques parties de ce régule fort minces, rouges & transſparentes.

Ce Cuivre vitrifié n'eſt donc autre choſe que le Cuivre dépoüillé par le feu du Soleil de la partie huileuſe qui lui donnoit la forme de métal. Une preuve que cette forme métallique ne vient que de cette partie huileuſe, c'eſt que ſi on expoſe ce régule ou verre de Cuivre au foyer ſur le charbon, il y reprend en peu de tems la couleur & la conſiſtance du Cuivre fondu, & le laiſſant réfroidir, il ſe fige en un bon Cuivre rouge malleable, auſſi beau & auſſi doux qu'il étoit avant que d'avoir été vitrifié.

Les écailles de Cuivre, la chaux de Cuivre ou *Æs uſtum*, expoſez quelque tems en fonte ſur la coupelle ou ſur le grez, ſe réduiſent de même que le Cuivre en un régule ou verre rouge. Si on les expoſe ſur le charbon au lieu du grez ou de la coupelle, ils ſe fondent en Cuivre. Si on fond ſur le charbon les régules qu'ils auront donnez ſur la coupelle ou ſur le grez, ils retourneront auſſi en Cuivre.

Il s'enſuit de ces expériences, que le Cuivre a pour bâſe une matiere rouge friable ſuſceptible de vitrification.

Que cette matiere reçoit la forme métallique d'une ſubſtance huileuſe, qui ne paroît point differente de l'huile des vegetaux & des animaux.

Qu'on peut priver le Cuivre de cette huile, en le tenant long-tems au feu du ſoleil, ou en le calcinant au feu de flâme.

Et que le charbon rend au Cuivre cette partie huileuſe, & lui rend en même tems ſa forme métallique.

Il paroît de plus que l'huile du charbon ne fait pas d'effet conſiderable ſur le Cuivre comme elle en fait ſur le Fer.

Le Cuivre expoſé long-tems au foyer ſur le grez ou ſur la coupelle fume beaucoup, & diminuë de poids trés conſidérablement. Je ne penſe pas que cette fumée ſoit ſeulement la partie huileuſe du métal dont l'évaporation

n'est peut-être pas sensible ; mais je crois qu'avec cette huile il se mêle beaucoup de la partie terreuse vitrifiable du métal que le feu du Soleil subtilise & éleve en fleurs.

DE L'ETAIN.

L'Etain fin exposé sur le charbon au foyer du verre ardent, se fond, jette une grosse fumée blanche fort épaisse & se dissipe tout en fumée.

Si au contraire on fait fondre l'Etain fin sur la coupelle au foyer du verre, il fume beaucoup, sa surface se couvre d'une chaux blanche qui se rarefie extraordinairement, & il se forme peu à peu dans cette chaux une houpe ou un amas d'aiguilles cristallines transparentes herissées d'une infinité de petites pointes.

Si on continuë à tenir cette masse sur le grez exposée au foyer, ces cristaux cessent enfin de fumer, & ils restent fixes pendant que le grez se fond & se vitrifie. Il n'en est pas de même quand on se sert de la coupelle ; car en fondant elle fond à la fin une portion de ces cristaux en un verre ou émail blanc ou rousâtre.

J'ai pris de la chaux d'Etain qui est de l'Etain réduit en une poudre grise par le moïen du feu qui en a enlevé dans la calcination une grande partie de la substance huileuse. J'ai exposé cette chaux sur la coupelle au foyer du verre, elle y a encore beaucoup fumé, & elle s'est réduite en aiguilles cristalines, herissées d'autres pointes.

En reportant au foyer sur le charbon ces aiguilles cristalines, elles s'y sont fonduës assez aisément, & elles ont repris la forme d'Etain. Le charbon a refourni aux cristaux d'Etain la partie huileuse que le feu en avoit enlevé. Tout le monde sçait d'ailleurs que si on jette quelque graisse ou matiere inflammable sur de la chaux d'Etain rougie dans le creuset, elle reprend aussi-tôt sa forme d'Etain.

Ces expériences prouvent que l'Etain fin contient une huile trés aisée à être enlevée, puisque le feu ordinaire

l'enleve avec tant de facilité, & puisque ce métal calciné ou dépoüillé de son huile, se recharge si aisément de la partie huileuse de quelque matiere inflammable que ce soit.

Elles prouvent encore que la terre métallique, qui fait la bâse de l'Etain, est une terre cristalline trés difficile à fondre, puisque le feu ordinaire ne peut point vitrifier ce métal seul, & que le feu du Soleil tel que nous l'avons au foyer du grand verre ardent du Palais Roïal ne peut fondre parfaitement la chaux dans laquelle ce métal se réduit. Il est à présumer que la cristallisation, qui se fait de cette terre en aiguilles, arrive parce que la force du Soleil ne peut qu'amolir ces petits cristaux, & les souder, pour ainsi dire, les uns aux autres à mesure que la partie huileuse les abandonne, au lieu de les fondre tout à fait en une seule masse.

DU PLOMB.

J'ai pris du Plomb que j'ai tenu en fonte sur le charbon au foyer du verre, il s'y est entierement dissipé en jettant beaucoup de fumée.

J'ai exposé une pareille quantité de Plomb sur le grez au même foyer, il a jetté beaucoup de fumée, il s'est peu à peu changé en une liqueur fluide comme de l'huile ou semblable à de la resine fonduë. Cette liqueur en se refroidissant s'est figée en une espece de verre qui a ceci de particulier qu'il est disposé par lames transparentes comme le Talc de Venise, & qu'il est mollasse, doux au toucher, & d'une couleur jaune verdâtre & rougeâtre en quelqu'autres endroits.

En continuant à tenir cette matiere au foyer du verre elle s'étend dessus le grez comme un vernix, elle le pénetre à la fin & lui aide à se fondre.

J'ai tenté la même experience sur la cendre du Plomb, qui est du Plomb calciné legerement en une poudre grise, sur le *Minium* qui est du Plomb poussé à un degré de

calcination plus fort, & ſur la litarge qui eſt le Plomb pouſſé juſqu'à la vitrification; toutes ces matieres ſe ſont fonduës trés promptement en une liqueur trés fluide, & ont donné en ſe réfroidiſſant un verre talqueux ou diſpoſé par petites lames ſemblable au premier.

J'ai preſenté au foyer ſur le charbon ce verre talqueux, il s'y eſt fondu, & peu de tems après il y a repris la forme de Plomb fondu; je l'ai retiré du foyer, & l'ayant laiſſé réfroidir, je ne l'ai point trouvé different du Plomb.

Si on fond immédiatement ſur le charbon la chaux de Plomb, le *Minium* & la Litarge, on les convertit auſſitôt en plomb.

Ces experiences nous font connoître, qu'il y a dans le Plomb de même que dans les autres métaux imparfaits une partie huileuſe qui s'en ſépare aiſément par le feu ordinaire ou par le feu du Soleil; & que ce métal a pour bâſe une ſubſtance foliée ou talqueuſe.

DU VIF-ARGENT.

J'ajoûterai ici quelques experiences que j'ai faites ſur le Vif-argent, quoique je n'en puiſſe encore rien conclure de poſitif, ne les ayant pas pouſſées auſſi loin qu'il le faudroit pour cela.

J'ai preſenté du Vif-argent au foyer du verre ardent ſur le charbon, ſur la coupelle & ſur le grez; il s'eſt bientôt diſſipé entierement; il s'eſt exhalé en une fumée trés épaiſſe.

J'ai expoſé au foyer ſur le grez du Mercure precipité par lui-même au feu de digeſtion, il ſembloit ſe fondre; mais auſſi-tôt il ſe diſſipoit en fumée. Il eſt ſeulement reſté ſur le grez en trés petite quantité une pouſſiere fort rarefiée en maniere de Mouſſe, puis en continuant de la tenir au foyer, elle s'eſt fonduë & ramaſſée en un verre jaunâtre dans lequel on diſtinguoit quelques parcelles de métal comme de l'argent.

J'ai expoſé ſur le charbon du Mercure precipité par

lui-même. Cette matiere fumoit beaucoup, & à meſure qu'elle ſe fondoit on la voïoit ſe réünir & former ſur le charbon même de petites boules de Mercure qui ſe diſſipoient auſſi bientôt après en fumée.

Ces experiences ſemblent prouver qu'il y a dans le Vif-argent une huile qu'on peut en ſéparer par un feu même fort doux, tel que le feu de digeſtion.

Que ſi-tôt que cette huile en eſt ôtée, il perd ſa fluidité & ſon brillant.

Que la bâſe du Mercure eſt une chaux ou terre rouge.

Que cette chaux ne ſe fond point en verre comme les chaux des autres métaux, parce qu'elle eſt trop volatile, & que ſi-tôt qu'elle ſe fond elle eſt emportée par le feu.

Que ſi on rend à cette chaux cette huile, en l'expoſant ſur le charbon au foyer du verre, elle reprend auſſi-tôt ſon brillant métallique, ſa fluidité, & devient Vif-argent.

Je ne puis pas dire ſi cette terre legere qui reſte après l'évaporation de la chaux mercurielle ſur le grez, ſeroit une portion de la terre du Mercure plus exactement dépoüillée de ſon huile, & par conſéquent plus fixe & plus propre à ſe vitrifier, ou bien ſi ce ſeroit quelque matiere étrangere au Mercure qui ſeroit fixe d'elle-même, & qui reſteroit après ſon évaporation. C'eſt un fait à examiner plus particulierement dans la ſuite.

Il résulte de toutes les Experiences que je viens de rapporter, que les métaux qu'on nomme imparfaits, ſçavoir, le Fer, le Cuivre, l'Etain, & le Plomb ſont compoſez d'un ſoufre ou d'une ſubſtance huileuſe & d'une matiere capable de ſe vitrifier.

Que c'eſt de ce ſoufre ou de cette huile que vient l'opacité, le brillant & la malleabilité du métal.

Que ce ſoufre métallique ne paroît point du tout different de l'huile des vegetaux ou des animaux.

Qu'il eſt le même dans les quatre métaux imparfaits & même dans le Mercure.

Que ces quatre métaux ont pour bâse une matiere susceptible de vitrification.

Que cette matiere est differente dans chacun de ces quatre métaux, puisqu'elle se vitrifie differemment :

Et que c'est de cette difference que dépend la difference des métaux.

Il reste à examiner plus particulierement la nature de ces matieres ou especes de verres métalliques, pour sçavoir si l'on en peut séparer d'autres principes ou substances. C'est ce que je tâcherai de faire dans la suite, en poussant l'analise de ces quatre métaux aussi loin qu'il me sera possible.

OBSERVATIONS

DE LA PESANTEUR DE L'ATMOSPHERE

Faites au Château de Meudon avec le Barometre double de M. Hugens.

PAR M. DE LA HIRE.

1709. 5. Juin.

MOnsieur l'Abbé de Louvois aïant eu la curiosité de voir les pratiques du nivellement, & comment on en concluoit la pesanteur de l'Atmosphere avec les observations du Barometre, je fis en sa présence avec toute l'exactitude possible celles qui sont rapportées ici. Nous nous servîmes d'un fort bon Niveau à lunette & du Barometre double de M. Hugens, qui étoit pour lors dans les appartemens du Château, & qui avoit été construit avec un trés grand soin.

Un matin au rez de chaussée du Château la liqueur étoit dans le tuyau du Barometre à 33 parties $\frac{1}{2}$. Ensuite on descendit à la grille de fer de l'avenuë du côté du grand chemin qui va à Versailles, & l'on trouva que la liqueur étoit descenduë dans le tuyau à 28 parties $\frac{1}{2}$, & l'on étoit

descendu

defcendu de 159 piés 3 pouces depuis la premiere ftation, & la liqueur étoit defcenduë de 5 parties.

Enfuite on continua à defcendre dans le grand chemin du côté de Paris jufqu'au commencement d'un petit fentier qui va à la riviere, & la liqueur étoit dans le tuyau à 24 parties $\frac{1}{2}$, & l'on étoit encore defcendu de 106 piés 3 pouces, & la liqueur étoit defcenduë depuis la ftation précedente de 4 parties.

Depuis cette ftation jufqu'à la riviere devant les Moulineaux, on defcendit 134 piés 3 pouces, & la liqueur étoit dans fon tuyau à 21 parties, la liqueur étoit donc encore defcenduë de 3 parties $\frac{1}{2}$.

L'après midy on porta le Barometre fur l'appuy du refervoir des moulins qui font dans le haut du Parc, & l'on y trouva la liqueur dans le tuyau à 38 parties $\frac{1}{2}$. Les nivellemens firent voir qu'on étoit monté depuis le rez de chauffée du Château jufqu'à l'appuy de ce refervoir, de 112 pieds 4 pouces.

Mais étant revenus le foir au rez de chauffée du Château, j'y trouvai la liqueur dans le tuyau à 36. parties, donc pour ces 112 piés 4 pouces la liqueur avoit changé de 2 parties $\frac{1}{2}$. Mais comme le matin elle avoit été dans le même endroit à 33 parties $\frac{1}{2}$, on connut que depuis le matin jufqu'au foir il étoit arrivé un changement de 2 parties $\frac{1}{2}$ dans la pefanteur de l'atmofphere.

Toute la hauteur depuis la riviere jufqu'au haut du refervoir des moulins, fut nivelée fort exactement par ftations, & elle fut trouvée comme il réfulte des obfervations précedentes, de 512 piés 1 pouce, ou de 85 toifes 2 piés 1 pouce; & c'eft la plus grande hauteur que nous ayons aux environs de Paris.

J'obfervai vers le foir au rez de chauffée du Château, que dans le Barometre dont je me fervois, la différence entre la fuperficie du mercure dans les deux boëtes, étoit de 29 pouces juftement, & la liqueur du tuyau étoit au deffus du mercure de la boëte d'embas de 12 pouces 6 lignes. Les parties de la divifion du tuyau pour mefurer la

hauteur de la liqueur, valoient 4 lignes & $\frac{5}{9}$, que je pose pour 4 lignes $\frac{1}{2}$ à cause du peu de difference & pour la facilité du calcul.

Maintenant pour tirer de ces observations une connoissance exacte de la pesanteur de l'atmosphere, il faut les réduire suivant la construction de ce Barometre, comme nous les avons expliquées dans le Mémoire sur les Barometres. Mais premierement pour comparer les hauteurs de la liqueur au bord de la riviere & au haut du reservoir des moulins, il faut en réduire les observations à la même heure à cause du changement qui étoit arrivé à la pesanteur de l'atmosphere du matin au soir ; & comme l'observation au bord de la riviere fut faite vers le midy, je la réduirai à celle du soir faite au reservoir des moulins où la liqueur étoit à 38 parties $\frac{1}{2}$, en supposant que l'atmosphere a diminué uniformement du matin au soir : c'est-pourquoy au lieu des 21 parties trouvées au bord de la riviere à midy, j'en poserai 22 $\frac{1}{4}$ en ajoûtant la moitié de la difference du matin au soir, & ôtant ces 22 parties $\frac{1}{4}$ des 38 $\frac{1}{2}$, il restera 16 parties $\frac{1}{4}$ pour le changement de la hauteur de la liqueur dans une élevation de 512 piés dans l'état où l'air étoit vers le soir de ce même jour.

Pour ce qui est de la réduction des parties du tuyau à la véritable hauteur du mercure qui répond à la pesanteur de l'atmosphere, elle sera facile par les regles que j'ay données & par l'observation que j'avois faite le soir de 29 pouces de difference entre les hauteurs du mercure, dans les boëtes, la liqueur étant alors à 12 pouces 6 lignes ou à 150 lignes au-dessus du mercure de la boëte inférieure. Car si l'on suppose comme je l'ai trouvé, que le mercure soit en pesanteur à la liqueur du tuyau comme 12 à 1, ayant divisé 150 lignes par 12, il viendra 12 lignes $\frac{1}{2}$ pour une hauteur de mercure équipollente aux 150 lignes de la liqueur ; il faudra donc ôter 12 lignes $\frac{1}{2}$ des 29 pouces observez entre les hauteurs du mercure dans ses boëtes, & il restera 27 pouces 11 lignes $\frac{1}{2}$ de hauteur de mercure qui peseront autant que l'atmosphere au jour

de l'obſervation vers le ſoir à la hauteur du rez de chauſſée du Château de Meudon qui eſt de 66 toiſes & près de 4 piés plus haut que la riviere de Seine devant les Moulineaux au mois de Septembre, qui eſt le tems où elle eſt ordinairement fort baſſe.

Il reſte donc encore à connoître la valeur des parties du tuyau de la liqueur, par rapport aux hauteurs de mercure qui repreſentent la peſanteur des parties correſpondantes de l'atmoſphere. Dans ces Barometres qui ſont conſtruits ſur les proportions données par M. Hugens où le diametre des boëtes eſt de 14 lignes & celui du tuyau d'une ligne, on aura par la regle que j'ay trouvée dans mon autre Memoire, comme 12 fois le quarré du diametre des boëtes eſt au quarré de ce même diametre plus 23 fois le quarré du tuyau de la liqueur, ainſi les parties du tuyau ou les hauteurs de la liqueur, aux hauteurs du mercure qu'elles repréſentent, ce qui eſt icy comme 2352 à 219: Ainſi les 16 parties $\frac{1}{4}$ que nous avons trouvées entre le plus haut & le plus bas, leſquelles ſuivant leur grandeur valent 73 lignes à très-peu près, à 6 lignes $\frac{3}{4}$ environ pour la vraye hauteur du mercure qui répond au changement de la peſanteur de l'atmoſphere depuis le bord de la riviere juſqu'au haut du reſervoir des moulins du Parc: C'eſt-pourquoy ſi l'on diviſe 512 piés qui eſt cette même hauteur par 6 $\frac{3}{4}$, on aura 75 piés & $\frac{23}{27}$, ou bien 12 toiſes & près de 4 piés de la hauteur de l'atmoſphere pour une ligne de mercure dans le tems où la peſanteur de toute cette atmoſphere étoit de 27 pouces 11 lignes $\frac{1}{2}$ à la hauteur du rez de chauſſée du Château de Meudon, & au-deſſus de la riviere quand elle eſt baſſe devant les Moulineaux au pié de la Montagne, à 66 toiſes & près de 4 piés. On n'a pas d'égard aux differentes peſanteurs de l'atmoſphere ſuivant les differens endroits de cette hauteur, ny aux differentes élevations des liqueurs qui auroient pû être cauſées par la chaleur differente en differens tems de la journée, qui dilate plus ou moins les liqueurs & même le mercure, car elle étoit à

peu près la même au commencement & à la fin de ces observations.

Mais comme dans la construction de ces Barometres on auroit pû s'être un peu écarté du raport que j'ai posé entre le diametre des boëtes & du tuyau de la liqueur, j'ay fait encore le calcul pour voir ce qui arriveroit dans d'autres raports, & j'ay trouvé que la difference n'étoit pas considerable lorsque les diametres des boëtes sont seulement plus grands ou plus petits d'une ou de deux lignes.

Quoyqu'on ne puisse pas douter que pour connoître la pesanteur de l'atmosphere, on operera bien plus justement sur des hauteurs considerables que sur de petites, lorsque d'ailleurs on connoît très-exactement ces hauteurs, à cause de la difficulté qu'il y a de mesurer bien justement les élevations du mercure dans les tuyaux, j'ay crû neanmoins que je ne devois pas négliger d'en faire quelques-unes pour voir comment elles s'accorderoient avec celles de Meudon.

J'ay donc observé plusieurs fois en differentes années & en differentes saisons l'élevation du mercure dans le Barometre simple sur le haut de la terrasse de l'Observatoire & au fond des caves ou carrieres, & en prenant un milieu entre toutes, lequel convient à l'une de ces observations que j'avois faite en 1705 au mois de Septembre, qui est le tems où l'air est à peu près au même degré de chaleur au fond des caves & au dehors, & le mercure du Barometre étant à 28 pouces dans la grande sale, c'est-à-dire que l'atmosphere étoit fort pesante, comme elle étoit au tems des observations de Meudon, & la saison étant aussi la même, j'ay trouvé pour 28 toises de hauteur ou 168 piés un changement d'élevation du mercure de 2 lignes $\frac{1}{4}$; c'est pourquoy pour une ligne de mercure on aura 74 piés $\frac{2}{3}$ ou 12 toises 2 piés $\frac{2}{3}$; & par les observations faites à Meudon, j'avois trouvé 12 toises 4 piés à peu près, dont la difference de 1 pié $\frac{1}{3}$ n'est pas considerable dans ces sortes d'observations.

L'observation que je fis en 1682 à Toulon sur le mont Clairet qui est élevé sur le niveau de la mer de 257 toises, comme elle est rapportée dans le Livre des Voyages de l'Academie, donna dans ce tems-là & dans les circonstances de l'air qui y sont marquées, en supposant l'air également condensé dans toute cette hauteur, 12 toises à très-peu près pour une ligne de hauteur de mercure.

Mais comme il est certain que la chaleur ou le froid peut faire quelques changemens dans les Barometres, sans que l'atmosphere change pour cela de pesanteur, comme je l'ai démontré au commencement de mon précedent Memoire, à cause que quelqu'espace d'air proche de la terre étant plus ou moins échauffé, fera changer de volume tant au mercure qu'aux liqueurs ; & de plus un air plus humide étant échauffé, fera un plus grand effort par sa dilatation que s'il étoit moins humide, & soûtiendra le mercure à une hauteur beaucoup plus grande que celle où il seroit par la seule pesanteur de toute l'atmosphere, & par les autres causes ; c'est pourquoy j'ai fait plusieurs observations & quelques experiences pour tâcher d'avoir quelques connoissances de tous ces effets.

J'ay placé dans une chambre un Barometre simple à côté d'un Barometre double à la maniere de M. Hugens, & j'ay mis tout proche un Termometre qui avoit été fait par M. Amontons, & pendant trois années j'ay observé exactement tous les jours, les hauteurs de ces Barometres & du Thermometre, & je n'ay rien négligé des circonstances qui pouvoient me donner quelque connoissance de ce que je cherchois. Mais comme dans tout ce tems il n'a point fait de froid considerable, mais seulement de très-grandes chaleurs en Eté, j'ay comparé l'état de ces Barometres dans le grand chaud, à celuy où ils étoient dans l'état moyen de chaleur de l'air, comme il est au fond des carrieres de l'Observatoire, ou tout au plus quand il a commencé à geler. J'ay observé que dans le Barometre simple le mercure ne change pas sensiblement de hauteur, soit qu'il soit exposé au grand Soleil

même en Eté, ou à l'ombre dans un lieu médiocrement frais.

Dans les obſervations ſuivantes je marque la hauteur du mercure dans le Barometre ſimple par pouces, lignes & points qui ſont des ſixiémes parties de lignes & pour les hauteurs de la liqueur dans le Barometre double, je les marque par les diviſions qui ſont ſur ce Barometre leſquelles valent chacune 4 lignes, & je les réduis enſuite en lignes.

I°.	Le Barometre ſimple marquant.	27^po. 6^l. 4^poi.
	Le Barometre double marquoit dans les grandes chaleurs	45^part. $\frac{2}{3}$
	& dans l'état moyen de chaleur	41 $\frac{1}{2}$
	Difference	4 $\frac{1}{6}$
	ou bien	16^li. $\frac{2}{3}$

II°.	Le Barometre ſimple marquant	27^po. 8^l. 0^poi.
	Le Barometre double marquoit dans les grandes chaleurs	42^part.
	& dans l'état moyen de chaleur	37 $\frac{1}{4}$
	Difference	4 $\frac{3}{4}$
	ou bien	19^li.

III°.	Le Barometre ſimple marquant	27^po. 11^l. 1^poi.
	Le Barometre double marquoit dans de très-grandes chaleurs	33^part.
	& dans l'état moyen de chaleur	28 $\frac{1}{4}$
	Difference	4 $\frac{3}{4}$
	ou bien	19^li.

IV°.	Le Barometre ſimple marquant	27^po. 9^l. 1^poi.
	Le Barometre double marquoit dans la grande chaleur	38^part. $\frac{1}{2}$
	& dans l'état moyen de l'air	34
	Difference	4 $\frac{1}{2}$
	ou bien	18^li.

	Le Barometre simple marquant	$27^{po.}\ 10^{l.}\ 0^{poi.}$
	Le Barometre double marquoit dans	
V°.	l'état moyen de chaleur	$33^{part.}\ \frac{1}{3}$
	& au commencement de la gelée le	
	Barometre ayant été transporté à l'air	$30\ \frac{2}{3}$
	Difference	$2\ \frac{2}{3}$
	ou bien	$10^{li.}\ \frac{2}{3}$

J'ay voulu voir aussi ce qui arriveroit au Barometre double étant exposé au Soleil vers l'heure de midy dans les plus grandes chaleurs du mois de Juillet de l'année passée 1708 ; & pour en connoître mieux tous les effets, j'ay mis à côté le petit Termometre à esprit de vin de M. Amontons.

J'ay remarqué d'abord, que la liqueur du Barometre s'élevoit fort lentement, & peu en comparaison de l'esprit de vin du Thermometre ; & les ayant laissez au Soleil plus d'une heure, je les ay remis à leur place ordinaire qui est à l'ombre, & l'un proche de l'autre. Mais j'ay observé alors que la liqueur du Barometre ne laissoit pas de continuer à monter, & au contraire l'esprit de vin du Termometre descendoit fort vîte pour reprendre son premier état. Car quoique l'esprit de vin soit fort sensible à la chaleur, & l'eau fort peu en comparaison, il semble pourtant qu'il devroit arriver la même chose à l'eau du Barometre qu'à l'esprit de vin du Thermometre, puisque la cause cessant, l'effet doit aussi cesser ; cependant il se peut faire que le mercure ayant reçû du Soleil une impression de chaleur bien plus grande que la liqueur & la conservant plus long-tems à cause que c'est un corps plus solide, ne laisse pas de continuer à échauffer encore la liqueur plus qu'elle n'étoit, car elle le touche dans un espace assez grand, ce qui fait que cette liqueur continuë à monter, & sur tout le changement de volume du mercure n'étant pas considerable par la chaleur & par le froid, comme je l'ay experimenté en exposant au grand Soleil un Barometre simple.

Pour l'esprit de vin du Thermometre, il n'en est pas de même; car comme c'est un liquide fort facile à se dilater par la moindre chaleur, aussi se condense-t-il très-facilement par le moindre froid.

On ne peut pas douter que les differentes hauteurs de la liqueur du Barometre double que j'ai observée & que je viens de rapporter, dans des tems où le Barometre simple étoit à la même hauteur ou bien l'atmosphere pesant également ne viennent principalement de la dilatation de la liqueur qui est en assez grande quantité dans la phiole d'embas de ce Barometre, & dont le tuyau est fort delié : car pour peu que cette liqueur s'enfle par la chaleur, elle en donnera une marque très-sensible dans le petit tuyau, & c'est ce qui n'arrive pas tout-à-fait de même à mon Barometre, à cause que n'y ayant que très-peu de liqueur, cette élevation causée par la chaleur n'y sera pas considerable; cependant j'ay expliqué de quelle maniere on pouvoit s'en servir sans tomber dans l'erreur, en confondant l'action du Barometre avec celle du Thermomette, qui font ensemble des effets fort irréguliers dans le Barometre double de M. Hugens.



FORMULES

FORMULES GENERALES

Pour déterminer le point d'interſection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une Courbe quelconque vers le même côté ſous des angles égaux.

PAR M. DE REAUMUR.

JE lûs le 4 Mai un Memoire dans lequel je démontrai une Méthode pour déterminer le point d'interſection de deux lignes droites indéfiniment proches qui rencontrent une Courbe quelconque, vers le même côté, ſous des angles égaux moindres ou plus grands qu'un droit. J'exceptois ainſi l'angle droit, parce que mon deſſein étoit de donner ſeulement des choſes nouvelles, & que de célebres Géometres ont trouvé pluſieurs Formules très-commodes pour déterminer la longueur des raïons oſculateurs, ou, ce qui eſt la même choſe, pour avoir le point d'interſection de deux lignes droites infiniment proches qui rencontrent une Courbe ſous un angle droit. Je me ſervis de leurs découvertes pour arriver à ce que je cherchois; je ſuppoſai leurs Formules pour donner la mienne; mais le juſte goût où l'on eſt à preſent pour les géneralitez, & la facilité qu'on a d'y parvenir avec le ſecours des nouvelles Méthodes, firent que le R. P. Goüie propoſa de réſoudre ce Problême univerſellement ſans en excepter l'angle droit, & ſans ſuppoſer les Formules déja trouvées. Voici une des manieres dont on le peut faire.

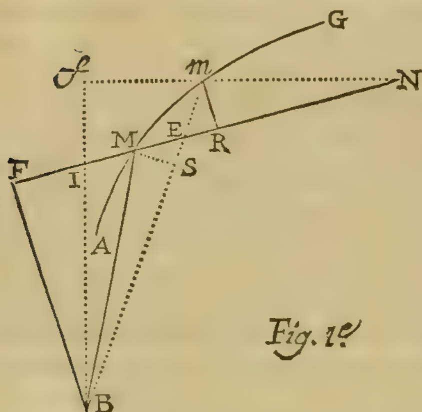
1709. 4. Juin.

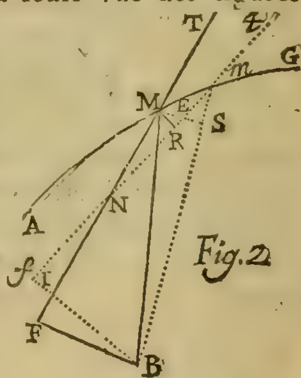
PROBLÊME.

Une Courbe quelconque AMmG *étant donnée, il faut trouver le point d'interſection* N *des droites* FM, fm, *infiniment proches qui font avec cette Courbe vers le même côté les angles* FMA, fmA *égaux, ſans rien ſuppoſer de conſtant que ces angles.*

SOLUTION.

Soient menées les ordonnées infiniment proches *BM*, *Bm* de la Courbe *AMmG*, qu'on ſuppoſe ici concourir au point *B*; & de ce point ſoient tirées les perpendiculaires *BF*, *Bf*, ſur *FM*, *fm*: la 2e de ces perpendiculaires *Bf*, *M* coupera *FM* en *I*. Soient enfin abaiſſées les perpendiculaires *mR* (*fig.* 1.) ſur *MN*, *MS* ſur *Bm*, & (*fig.* 2.) *MR* ſur *mN*, *MS* ſur *Bm*. La ſeule vûë des figures fait appercevoir deux cas differens. 1°, ou les droites *FM*, *fm*, (*fig.* 1.) font avec la partie convexe de la Courbe les angles *FMA*, *fmA* plus petits que les angles *BMG*, *BmG* : 2°, ou (*fig.* 2.) les droites *FM*, *fm* font avec la partie convexe de la Courbe les angles *AMT*, *Amt* plus grands que les angles *BMG*, *BmG*. Il eſt évident que dans le 1^r cas (*fig.* 1.) le point d'interſection *N* ſera placé par delà *BM* par rapport à *A*; & dans





le 2[d] cas (*fig.* 2.) ce même point ſera entre *AM* & *BM* ; ce qui apporte quelque changement aux figures. C'eſt pourquoi je conſidererai les deux cas ſéparément.

Cas I. On nommera le ſinus de l'angle donné (*fig.* I.) *mMR*, n ; celui de l'angle *MmR* (qui eſt donné auſſi, l'angle *mRM* étant droit) m ; le ſinus total, ou de l'angle droit *mRM*, a ; *MN*, ou *mN*, z ; *BM*, ou *Bm*, y ; *Mm*, ds ; *mS*, dy ; *MS*, dx ; *ME*, du ; *ES*, dt : D'où on aura $MR = \frac{mds}{a}$, en faiſant $a . m :: ds$ (*Mm*) . *MR* ; & par un ſemblable raiſonnement $mR = \frac{nds}{a}$; par conſéquent $ER = MR - ME = \frac{mds}{a} - du$; $Em = mS - ES = dy - dt$. Les triangles rectangles ſemblables *MES*, *mER*, donnent les analogies ſuivantes *ME* (du) . *ES* (dt) :: *Em*. ($dy - dt$) . *ER* $\left(\frac{mds}{a} - du\right)$; d'où on tire (après avoir ſubſtitué pour du^2 ſa valeur $dt^2 + dx^2$) $dt = \frac{mdsdu - adx^2}{ady}$, & $mR\left(\frac{nds}{a}\right)$. *Em* ($dy - dt$) :: *MS* ($dx$) . *ME* ($du$), ce qui donne $dt = \frac{adydx - ndsdu}{adx}$; or comparant ces deux valeurs de dt, on en tire $du = \frac{adxdy^2 + adx^3}{mdxds + ndsdy} =$ (après avoir ſubſtitué pour dx^2 ſa valeur $ds^2 - dy^2$) $\frac{adxds}{mdx + ndy}$: & ſubſtituant cette valeur de du en une dés précedentes de dt, on aura (les operations neceſſaires étant faites) $dt = \frac{mdxdy - ndx^2}{mdx + ndy}$. Il eſt de plus viſible que les triangles rectangles *MBF*, *MES*, ſont ſemblables ; car ſi des angles *SEM*, *EMS*, égaux à un droit, & des angles *BMF*, *EMS* pareillement égaux à un droit, on ôte le même angle *EMS*, les angles reſtans *SEM*, *BMF* ſont auſſi égaux. On a donc les analogies ſuivantes : . . .

ME $\left(du = \frac{adxds}{mdx + ndy}\right)$. *ES* $\left(dt = \frac{mdxdy - ndx^2}{mdx + ndy}\right)$ :: *BM* (y). $FM = \frac{mydy - nydx}{ads}$; & *ME* $\left(\frac{adxds}{mdx + ndy}\right)$. *MS* ($dx$) :: *BM* ($y$). $BF = \frac{mydx + nydy}{ads}$. Si on prend à preſent la difference de *BF*. en regardant toutes les quantitez comme

variables, on aura la valeur de . . . .

$$If = \frac{mydsddx + nydsddy - mydxdds + mdsdxdy + ndsdy^2 - nydydds}{ads^2};$$

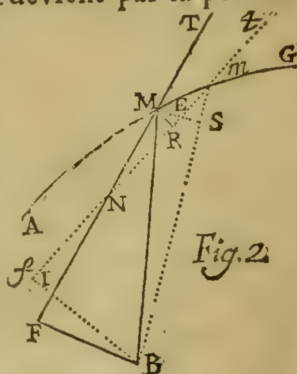
mais on a enfin (à cause des triangles semblables) IfN, NmR, $NI = MN + MF = z \frac{+ mydy - nydx}{ads}$.

$$If = \frac{mydsddx + nydsddy - mydxdds + mdsdxdy + ndsdy^2 - nydydds}{ads^2} :: Nm(z).$$

$mR = \frac{nds}{a}$; d'où l'on tire . . . .

$$z(MN) = \frac{mnydyds^2 - nnydxds^2}{amydsddx + anydsddy - amydxdds - andsdx^2 - anydydds + amdsdxdy},$$ après avoir substitué dans le dénominateur de la fraction pour ds^2, sa valeur $dx^2 + dy^2$ Si on multiplie à present le haut & le bas de la fraction qui exprime la valeur de $z(MN)$. par $\frac{ndx}{mndy - nndx}$, on la changera en celle-cy : . . .

$$z = \frac{\dfrac{nydxds^2}{amnydsdxddx + annydsdxddy - amnydx^2dds - anndx^3ds - annydxdydds + amndx^2dsdy}}{mndy - nndx};$$ après quoi substituant pour $dxddx$, sa valeur $dsdds - dyddy$, & dans le terme où l'on trouvera ds^2 (après cette operation) mettant sa valeur $dx^2 = dy^2$, le dénominateur de cette fraction se réduira (la division qui devient par-là possible étant faite) à $aydydds - aydsddy + adsdx^2$, par conséquent on aura $z = \frac{nydxds^2}{adsdx^2 + aydydds - aydsddy}$. *Ce qu'il falloit trouver.*



2. *Cas.* Un chemin assez semblable à celui qu'on a suivi dans le cas précedent, conduira à trouver la même Formule pour déterminer le point d'intersection N; mais on nommera dans ce cas-cy le sinus de l'angle MmR, n, (*fig.* 2.) parce qu'il represente le sinus de l'angle mMR de la

fig. 1[re], & le ſinus de mMR, ſera nommé m; on nommera de plus mE, du; ES, dt; & le reſte comme dans le cas précedent; ainſi on aura $MR = \frac{nds}{a}$; $mR = \frac{mds}{a}$; $RE = mR - mE = \frac{mds}{a} - du$; $ME = MS - ES = dx - dt$. Les triangles rectangles ſemblables MER, mES, donnent encore ici ces deux analogies: $mE\,(du) . ES\,(dt) :: ME\,(dx - dt) . ER\,(\frac{mds}{a} - du)$; & $MR\,(\frac{nds}{a}) . ME\,(dx - dt) :: mS\,(dy) . mE\,(du)$. On tire de la 1[re] (après avoir ſubſtitué pour dt^2 ſa valeur $du^2 - dy^2$) $dt = \frac{mdsdu - ady^2}{adx}$; & de la 2[e], $dt = \frac{adxdy - ndsdu}{ady}$. Or la comparaiſon de ces deux valeurs de dt en fournit une de $du = \frac{adyds}{mdy + ndx}$, & ſubſtituant cette valeur de du en une de celles de dt, on trouve $dt = \frac{mdxdy - ndy^2}{mdy + ndx}$. Il ſera à preſent aiſé d'avoir les expreſſions algébriques de FM, BF, & fI difference de BF, par le moyen des triangles rectangles ſemblables mES, MBF. Après quoi faiſant de la proportion que donnent les ſecteurs fNI, MNR, une égalité, on en tirera comme dans le cas précedent, une valeur de $MN\,(z)$, & des préparations ſemblables à celles du même cas précédent, rendront auſſi cette valeur la même qu'on a trouvée cy-deſſus; car on aura $z\,(MN) = \frac{nydxds^2}{adsdx^2 + aydydds - aydsddy}$.

COROLLAIRE I.

Si dans la Formule génerale des points d'interſection $z = \frac{nydxds^2}{adsdx^2 + aydydds - aydsddy}$, on ſubſtituë en la place de dds ſa valeur $\frac{dxddx + dyddy}{ds}$, & après cette ſubſtitution on met dans le terme du dénominateur où l'on trouvera ds^2 ſa valeur $dx^2 + dy^2$, cette 1[re] Formule ſe changera en une 2[e] $z = \frac{nyds^3}{ads^2dx + aydyddx - aydxddy}$. Ou ſi l'on ſubſtituë dans la 1[re] Formule de valeur de $ddy = \frac{dsdds - dxddx}{dy}$, & en la place de dy^2 (que cette ſubſtitution fera trouver dans le dénominat.)

$ds^2 - dx^2$, on aura une 3e Formule $z = \frac{nydyds^2}{adydxds + aydsddx - aydxdds}$.

COROLLAIRE II.

Lorsque les droites *FM*, *fm*, feront avec la Courbe *AMmG* des angles droits, l'angle *mMR* (*fig.* 1.) deviendra égal à l'angle *mRM*, & (*fig.* 2.) l'angle *MmR* aussi égal à l'angle *mRM*; de sorte que le sinus *n* de ces angles sera alors égal au sinus total *a*. Ce qui changera les trois expressions précedentes en celles-cy : . . . .

1re. $z = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$: 2e. $z = \frac{yds^3}{ds^2dx + ydyddx - ydxddy}$:

3e. $z = \frac{ydyds^2}{dydxds + ydsddx - ydxdds}$: qui sont autant de Formules du raïon de la Dévelopée. Ce sont aussi celles que M. Varignon a démontrées dans les Memoires de 1701, pag. 27, & dans ceux de 1707, pag. 503, de tant de manieres très differentes, mais encore plus ingenieuses. M. Varignon a aussi trouvé les trois Formules du Corollaire précedent par des chemins differens de celui que je viens de donner ; mais comme il attend une autre occasion pour les faire connoître au public, j'ai crû devoir montrer celui que j'ai suivi pour y arriver.

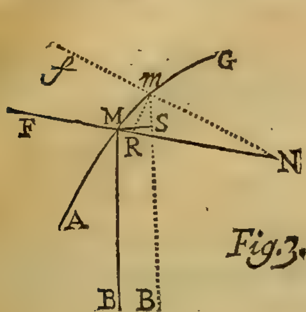
COROLLAIRE III.

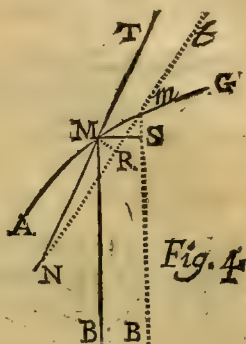
Il suit du Corollaire précedent, que si on nomme le raïon de la developée, *r*, on aura 1°. $r = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$: 2°. $r = \frac{yds^3}{ds^2dx + ydyddx - ydxddy}$: 3°. $r = \frac{ydyds^2}{dydxds + ydsddx - ydxdds}$. Si l'on substituë *r* dans les Formules 1re, 2e, & 3e, en la place de sa 1re, 2e & 3e valeur (*Corol.* 1.) ces trois Formules se changeront en celle-cy $z = \frac{nr}{a}$, qui est aussi celle que j'ai démontrée le 4. Mai, avec cette seule difference que je nommai alors *m*, ce qui est ici appellé *n*, & que je mis dans la Formule en la place de *a* sa valeur $\sqrt{mm - nn}$.

COROLLAIRE IV.

Le point de concours *B*, des ordonnées *BM*, *Bm*, étant

pris infiniment éloigné de la Courbe *AMmG*, ces ordonnées deviendront alors paralleles, & tous les termes qui





ne sont pas multipliez par *y* (*BM*) dans les Formules du Corol. 1. s'évanoüissant, ces trois Formules se changeront en celles-cy : 1re, $z = \frac{ndxds^2}{adydds - adsddy}$: 2e, $z = \frac{nds^3}{adyddx - adxddy}$. 3e, $z = \frac{ndyds^2}{dsddx - dxdds}$: Ces trois Formules serviront à déterminer le point d'intersection *N* des droites *FM*, *fm*, dans le cas des ordonnées paralleles entr'elles.

COROLLAIRE V.

Les Formules des Corol. 1 & 4, deviendront plus simples dans l'application ; car on sera obligé alors de regarder la difference d'une des variables comme constante : d'où il arrivera que la difference 2e de cette variable sera zero. En faisant ces differentes suppositions on changera les trois Formules du Corol. 1, dans les six qu'on voit cy-dessous, dans la 1re colonne; comme aussi dans les six autres qu'on voit dans l'autre colonne les trois du 4 Corol.

Formules qui naissent de celles du Corollaire 1.	*Formules qui naissent de celles du Corollaire 4.*
ds constante, ou *dds*=0.	
$z = \frac{nydxds}{adsdx - ayddy}$.	$z = \frac{ndxds}{-addy}$
$z = \frac{nydyds}{adydx + ayddx}$.	$z = \frac{ndyds}{addx}$

dy constante, ou $ddy = 0$.

$$z = \frac{nydxds^2}{adxds^2 + aydydds}. \qquad z = \frac{ndxds^2}{adydds}.$$

$$z = \frac{nyds^3}{ads^2dx + aydyddx}. \qquad z = \frac{nds^3}{adyddx}.$$

dx constante, ou $ddx = 0$.

$$z = \frac{nyds^3}{ads^2dx - aydxddy}. \qquad z = \frac{nds^3}{-adxddy}.$$

$$z = \frac{nydyds^2}{adydxds - aydxdds}. \qquad z = \frac{ndyds^2}{-adxdds}.$$

On alongeroit inutilement ce Memoire si l'on appliquoit ici ces Formules génerales à des cas particuliers. Il n'est besoin pour cela que de calcul. Comme il arriveroit même qu'on trouveroit toûjours l'expression du raïon osculateur multipliée par la fraction constante $\frac{n}{a}$, il est aussi commode dans les cas particuliers de chercher d'abord ce raïon, après quoi on déterminera aisément le point d'intersection *N*, en suivant la méthode du Corollaire 2, art. 1, du 4 Mai. Je ne repeterai pas non plus ici ces choses qu'on trouve dans les Corollaires du même Memoire, quoiqu'on en pût déduire la plus grande partie de cette derniere Solution.



DES MOUVEMENS

DES MOUVEMENS

Primitivement variés dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives de ces mouvemens.

PAR M. VARIGNON.

DAns les Mem. de 1707, Probl. 1, pag. 391, &c. Et dans ceux de 1708, pag. 113, &c. j'ai fait voir ce que devroit arriver à des corps mûs dans des milieux qui leur résisteroient en raison de leurs vitesses actuelles ou restantes de leurs primitives malgré les résistances de ces milieux. On appelle ici & là *vitesses primitives*, celles que ces corps auroient dans des milieux sans résistance ni action, tels qu'on suppose d'ordinaire le vuide. On a aussi vû dans les Mem. de 1707, Prob. 2, pag. 397, &c. ce que des mouvemens primitivement uniformes deviendroient dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives qu'ils y auroient: hypothese ordinaire beacoup plus vrai semblable que la premiere. Voici presentement ce qui devroit arriver dans ces milieux à des mouvemens primitivement variés. Mais pour ne pas rendre ce Memoire-ci trop long, non-seulement nous n'y emploïerons que des vitesses primitivement variés en raison des tems, comme dans l'hypothese de Galilée sur la pesanteur; mais encore nous n'y traiterons que des primitivement accelerés en raison des tems écoulés, en commençant à zero de vitesse: Les primitivement accelerés en raison de ces tems écoulés après avoir commencé par des vitesses quelconques, & les primitivement retardés en raison des tems qui resteroient à écouler jusqu'à leur entiere extinction dans un milieu sans résistance, seront pour d'autres Memoires. Pour tout cela voici en peu

1709. 15. Juin.

des mots ce qu'il faut ici ſuppoſer des deux Lemmes démontrés dans les Mem. de 1708, pag. 114, &c.

LEMME I.

Soient ſur l'axe ATC *les trois courbes* ARC, HUC, KEC, *rencontrées en* R, U, E, *par la droite* EV *perpendiculaire en* T *ſur cet axe, & qui rencontre de même en* V *la droite* FVC *inclinée de 45 deg. ſur ce même axe* ATC, *par le point* A *duquel ſoit auſſi la perpendiculaire* FK, *laquelle rencontre en* F, H, K, *la droite* FVC, *& les courbes* HUC, KEC. *Soient auſſi les courbes* HUC, ARC, *telles qu'elles aïent par tout* UT = RV *correſpondante.*

Fig. I. II. III.

Après cela ſoient priſes les abſciſſes AT (t) *pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement;* TV (v), *pour les viteſſes primitives à la fin de ces tems;* TR (r), *pour les réſiſtances totales, c'eſt-à-dire, pour les ſommes des réſiſtances inſtantanées* (dr) *que le milieu fait effectivement aux viteſſes actuelles ou reſtantes de ces primitives à chaque inſtant* (dt) *des tems correſpondans* AT (t); RV *ou leurs égales* TU (u), *pour ces viteſſes reſtantes; &* ET (z), *par des affections quelconques de ces viteſſes reſtantes, ſuivant la raiſon deſquelles affections les réſiſtances inſtantanées* (dr) *ſe faſſent, c'eſt-à-dire, auſquelles affections ces réſiſtances ſoient proportionelles.*

Cela poſé, ſi l'on prend par tout dt conſtante de même qu'une autre grandeur quelconque a, l'on aura ici

I. $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dv - du}{z}$ pour Régle générale des réſiſtances des milieux, quelles que ſoient les viteſſes primitives (v) ou la ligne *FVC* qui les exprime par ſes ordonnées *TV* (v), & ſuivant quelques affections (z) des viteſſes effectives (u), ou de quelqu'autre choſe à volonté, que ſe faſſent ces réſiſtances inſtantanées (dr) du milieu ſuppoſé : dans laquelle Régle l'on aura $du = dv - dr$, la conſtruction donnant $u = v - r$.

Fig. I. II. Suppoſons preſentement que *FVC* eſt une ligne droite inclinée (ſi l'on veut) de 45 deg. ſur *TV*. Cette conſtruction donnant auſſi *AT* (t) = *TV* (v), & conſé-

quemment $dt = dv$ dans la fig. 1. des viteſſes primitives *TV* accelerées en raiſon des tems écoulés depuis le premier inſtant du mouvement commencé à zero de viteſſe; cette équation générale (*art.* 1.) $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dv - du}{z}$, s'y changera en $\frac{dr}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dt - du}{z}$, qui fera paſſer par *A* les lignes *FVC*, *HUC*.

III. La même conſtruction donnant $TV = TC$ dans la fig. 2. des viteſſes primitives *TV* (v) retardées en raiſon des tems qui reſteroient à écouler juſqu'à leur entiere extinction, ſi le milieu ne faiſoit aucune réſiſtance; & conſéquemment auſſi $AC = AF$: ſi l'on appelle ici a chacune de ces deux dernieres grandeurs conſtantes *AC*, *AF*; aïant déja $TV (v) = TC (a - t)$, & conſéquement auſſi $dv = -dt$, la précédente équation générale (*art.* 1.) ſe changera de même ici en $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{-dt - du}{z}$, qui y donne $AH = AF$, à cauſe qu'en *A*, $AH = TU = RV = AF$; & fait paſſer la courbe *HUC* par le point *M* où ſon axe *ATC* eſt rencontré par la perpendiculaire *NM* tirée du point *N* où la courbe *ARC* rencontre la droite *FVC*, à cauſe que *UV* en *MN* rend $UT = RV = 0$. FIG. II.

IV. Dans la fig. 3. des viteſſes primitives *TV* (v) croiſſantes encore comme dans l'art. 2 en raiſon des tems écoulés depuis le premier inſtant du mouvement, lequel mouvement ait ici commencé, non à zero de viteſſe comme dans cet art. 2. mais par une viteſſe quelconque *AF* appellée b; ſi l'on méne la droite *FXC* parallele à l'axe *ATC* : cette addition à la conſtruction précédente donnant $TX = AF = b$, & $XV = FX = AT = t$, donne ici $TV (v) = TX + XV = b + t$; d'où il réſulte encore ici $dv = dt$, & (*art.* 1.) $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dt - du}{z}$, comme dans l'art. 2: mais $AH = AF$ comme dans l'art. 3. FIG. III.

Tout cela eſt démontré dans le Lem. 1, pag. 114, 115, 116, 117 des Mem. de 1708; & dans ſes Corol. 1, 2, 3, 4, 5, 6,

LEMME II.

Fig. I. II. III. *Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précédent Lem. 1. les aires* ATUH, ARVF, *que la supposition qu'on y fait de* TU=RV, *rend égales entr'elles, seront par tout proportionelles chacune aux espaces parcourus pendant les tems* AT (t) *correspondans en vertu des vitesses* TU *ou* RV (u) *restantes des primitives* TV *malgré lee résistances supposées.*

Cela est aussi démontré dans le Lem. 2. pag. 117 & 118 des Mem. de 1708, en ce que $ATUH = ARVF = \int udt$, & que les espaces parcourus pendant des tems quelconques AT (t), sont toûjours entr'eux comme les sommes ($\int udt$) des vitesses TU (u) employées à les parcourir.

On appellera encore ici (comme dans les Mem. de 1708, pag. 118.) *FVC, Ligne des vitesses primitives; ARC, Courbe des résistances totales* ou *des vitesses perduës*; *HUC, Courbe des vitesses restantes*; & *KEC, Courbe des résistances instantanées.*

PROBLEME.

Fig. I. *Trouver les Courbes* ARC *des résistances totales ou des vitesses perduës,* HUC *des vitesses restantes des primitives, &c. Dans l'hypothése* 1°, *des résistances instantanées en raison des quarrés de vitesses actuelles ou restantes*; & 2°, *des vitesses primitives accélerées en raison des tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ainsi que dans l'hypothése de Galilée sur la pesanteur des corps qui tomberoient en lignes droites dans un milieu sans résistance ni action, tel qu'on suppose d'ordinaire le vuide.*

SOLUTION

I. Suivant le Lem. 1. la premiere de ces deux hypothêses-ci donnera $TE\ (z) = \frac{TV \times TV}{AB} = \frac{RV \times RV}{AB} \left(\frac{uu}{u}\right) = \frac{\overline{TV - TR}^2}{AB}$ $\left(\frac{\overline{z-r}^2}{a}\right)$ en supposant $AB = a$ constante; & la seconde donnera $TV\ (v) = AT\ (t)$: d'où résulte $t - r = v - r = u$. Donc en substituant ces valeurs de z v, dans les deux formu-

les générales $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a}$, $\frac{dt-du}{z} = \frac{dt}{a}$, de l'art. 2. du Lem. 1. La premiere de ces deux équations se changera ici en $\frac{dr}{\overline{t-r}^2} = \frac{dt}{aa}$ pour la Courbe *ARC* des résistances totales ou des vitesses perduës ; & la seconde, en $\frac{dt-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$ pour la Courbe *HUC* des vitesses restantes. Quant à *FVC*, son équation supposée $t = v$, fait évidemment voir que ce doit être une ligne droite inclinée en *A* de 45 deg. sur *AT* conformément au Lem. 1. & à son art. 2.

II. Pour construire les deux Courbes *HUC*, *ARC*, il faut considerer que la derniere équation (*art.* 1.) $\frac{dt-du}{uu} = \frac{aa}{dt}$ de la Courbe *HUG* donnant $aadt - aadu = uudt$, donne aussi $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ pour l'équation de cette même Courbe *HUC*.

III. Soit présentement $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$: l'on aura $du = \frac{x+a-x+a}{\overline{x+a}^2} \times adx = \frac{2aadx}{\overline{x+a}^2}$, & $aa-uu = aa - \frac{\overline{x-a}^2}{\overline{x+a}^2} \times aa = \frac{xx+2ax+aa-xx+2ax-aa}{\overline{x+a}^2} \times aa = \frac{4a^3x}{\overline{x+a}^2}$. Donc $\frac{du}{aa-uu}\left(\frac{dt}{aa}\right) = \frac{2aadx}{4a^3x} = \frac{dx}{2ax}$, ou $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, qui est une équation à une Logarithmique d'une soûtangente $= \frac{1}{2}a$, & d'ordonnées $= x$ perpendiculaires à son asymptote dont les abscisses correspondantes sont $= t$.

IV. Soit donc en *A* perpendiculairement sur *AT*, la droite $AB = a$, par l'extremité *B* de laquelle passe cette Logarithmique *BLC*, ayant sa soûtangente $= \frac{1}{2} AB$ ($\frac{1}{2}a$), & *ATC* pour asymptote dont elle s'écarte du côté de *C*. Cela étant, si l'on prolonge *TU* jusqu'à la rencontre de cette Logarithmique en *L*, après avoir rencontré en *S* la droite *BSC* parallele à *ATC* ; l'on aura $LT = x$, $LS = x-a$, & $LT + ST = x+a$. Mais la supposition précedente (*art.* 3.) de $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$, donnera aussi $x+a$ ($LT + ST$). $x-a$ (LS) :: a (AB). u (TU). Et par con- FIG. IV.

ſequent $TU = \frac{AB \times LS}{LT + ST} = \frac{AB \times LS}{LT + AB}$. Donc en prenant TU de cette valeur, c'eſt-à-dire, quatriéme proportionnelle aux trois grandeurs $LT + AB$, AB, LS, données par la Logarithmique BLC; la ligne qui paſſera par tous les points U ainſi trouvés, ſera la courbe cherchée HUC des viteſſes reſtantes, exprimée (*art.* 2.) par l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$: laquelle courbe paſſera par le point A; puiſque $LS = 0$ en B, rend auſſi TU $\left(\frac{AB \times LS}{LT + AB}\right) = 0$ en A. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

V. Cette courbe HUC étant ainſi conſtruite, il n'y aura plus qu'à prendre par tout $UR = TV$ (*hyp.*) $= AT$, ou $VR = TU$; & la ligne qui paſſera par tous les points R ainſi trouvés, ſera ici (*Lem.* 1.) la courbe des réſiſtances totales (r) ou des viteſſes perduë ($v - u$), exprimée (*art.* 1.) par l'équation $\frac{dr}{\overline{t-r}^2} = \frac{dt}{aa}$. *Ce qu'il falloit auſſi trouver.*

COROLLAIRE I.

Puiſque (*Solut. art.* 4.) $TU = \frac{AB \times LS}{LT + AB}$, il eſt viſible que pour rendre $TU = AB$, il faudroit $LS = LT + AB = 2AB + LS$; ce qui ne pouvant arriver qu'à une diſtance infinie de AB qui alors ſeroit nulle par rapport à LS pour lors infinie, la courbe HUC ou (*Solut. art.* 4.) AUC ne peut arriver juſqu'en BC qu'à une diſtance infinie de AB. Ainſi BC en doit être une aſymptote.

COROLLAIRE II.

D'où il ſuit (comme du Prob. 1. Corol. 9 pag. 123. des Mem. de 1708, quoique d'hypotheſe differente de celle qu'on fait ici touchant les réſiſtances) que les viteſſes reſtantes & effectives TU (u) augmenteront ici à l'infini ſans jamais devenir uniformes, quoiqu'elles ne puiſſent jamais devenir plus grandes que la finie AB (a), & qu'elles approchent toûjours de ſa valeur, ne pouvant l'égaler qu'après le tems infini AC de ſorte que cette plus

grande viteſſe *AB* (a) en ſera le terme d'accroiſſement; ou (pour parler comme M. Hughens) *la viteſſe terminale.* D'où il ſuit à cauſe de (*hyp.*) $AT = TV$, qu'il faudroit un tems infini au mobile pour acquerir dans le milieu réſiſtant ſuppoſé une viteſſe égale à ce qu'il en acquieroit dans un milieu ſans réſiſtance pendant un tems aſſez court $AT = AB$.

COROLLAIRE. III.

On voit auſſi que le point *A* rendant (*Solut. art.* 4.) TU (u) $= 0$, l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ (*Solut. art.* 2.) de la courbe *HUC* des viteſſes reſtantes (u), doit s'y changer en $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa}$, c'eſt-à-dire, en $dt = du$; ce qui fait voir que cette courbe *HUC* ou *AUC* diviſe l'angle droit *BAC* en deux parties égales, ou (ce qui revient au même) eſt inclinée de 45. degrez en *A* ſur chacune des orthogonales *AT*, *AB*.

COROLLAIRE IV.

On voit de même que le point *A* rendant pareillement AT (t) $= 0$, & (*Lem.* 1,) TR (r) $= 0$, & conſéquemment auſſi $t - r = 0$; l'équation $\frac{dr}{\overline{t-r}^2} = \frac{dt}{aa}$ (*Solut. art.* 1.) de la courbe *ARC* des réſiſtances totales ou des viteſſes perduës doit s'y réduire à $\frac{dr}{0} = \frac{dt}{aa}$, & conſéquemment y avoir dt infinie par rapport à dr. Par conſéquent cette courbe *ARC* doit être touchée ici en *A* par la droite *ATC*, de même que dans le Prob. 1. Corol. 2. pag. 120 des Mem. de 1708.

COROLLAIRE V.

Puiſque (*Corol.* 2.) *AB* eſt la plus grande des viteſſes *TU* que le mobile puiſſe jamais acquerir ici, même après un tems infini; les eſpaces ici parcourus pendant le tems AT (t) en vertu de ces viteſſes reſtantes TU (u), doivent

être (*Lem.* 2.) à ce que le mobile en parcouroit pendant les mêmes tems AT d'une viteſſe uniforme égale à cette terminale $AB :: ATU . ATSB$.

COROLLAIRE VI.

I. Quant à la comparaiſon entr'eux des eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes TU (u) reſtantes des primitives TV (v) à chaque inſtant de ces tems, on voit (*Lem.* 2.) que ces eſpaces doivent être ici entr'eux comme les aires correſpondantes ATU ($\int udt$). Mais l'art. 2. de la Solution donnant $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ pour l'équation de la Courbe AUC des viteſſes reſtantes (u), l'on aura ici $\int udt$ (ATU) $= \int \frac{aaudu}{aa - uu}$. Donc les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u) doivent être ici entr'eux comme les intégrales correſpondantes, $\int \frac{aaudu}{aa - uu}$ (ATU). Cela étant.

II. Soit $yy = aa - uu$, & conſéquemment $ydy = -udu$. L'on aura $\int \frac{aaudu}{aa - uu}$ (ATU) $= - \int \frac{aaydy}{yy} = - aa \times \int \frac{dy}{y} = - aa \times ly + q$. Mais le cas de $ATU = 0$, qui (*Solut. art.* 4.) rend auſſi TU (u) $= 0$, rendant ici $y = a$, réduit cette intégrale à $0 = - aa \times la + q$ (en prenant a pour l'unité) $= - l1 + q = 0 + q$; ce qui rend auſſi $q = 0$. Donc cette intégrale juſte & préciſe ſera $ATU = - aa \times ly$. Donc auſſi (*art.* 1.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT(t) ſeront entr'eux comme les grandeurs correſpondantes $-aaly$, c'eſt-à-dire (à cauſe de $a = 1$) comme les Logarithmes négatifs $-ly$ correſpondans, ou (à cauſe de la ſuppoſition qu'on vient de faire de $yy = aa - uu$) comme les Logarithmes négatifs $- l\sqrt{aa - uu}$ correſpondans.

III. Mais ſi du centre A, & du raïon AB (a), on fait la quart de cercle $B\delta\beta$, que la droite CTA, & ſa parallele UG, continuées rencontrent en β, δ, & qu'on mene le raïon $A\delta$; aïant ici $AG = TU = u$, & $A\delta = AB = a$, l'on y aura

y aura aussi $G\delta = \sqrt{aa-uu}$; & par conséquent le Logarithme négatif de $G\delta$, égal au négatif $-l\sqrt{aa-uu}$. Donc (*art.* 2.) les espaces parcourus pendant les tems AT, seront ici entr'eux comme les Logarithmes des sinus $G\delta$ des arcs $B\delta$ dont les complemens $\delta\beta$ auroient pour sinus les expressions AG ou TU des vitesses (u) acquises ici pendant ces tems malgré les résistances supposées, & pour sinus total l'expression AB (*Corol.* 2.) de la vitesse terminale ou de la plus grande (a) de tout ce qu'il y en a ici de possibles.

IV. Cela étant, si par le point β on suppose une Logarithmique $\beta\mu N$, d'une soûtangente $= A\beta$ (a) sur l'asymptote AB prolongée vers N, de laquelle elle s'approche du côté de N, & qui soit rencontrée en μ de part ou d'autre du point δ, par $\delta\mu$ parallele à AN; son ordonnée $\mu\pi$ parallele à βA, & égale à δG, aïant $A\pi$ pour son Logarithme négatif en supposant toûjours $A\beta$ (a) $=1$, cette même $A\pi$ sera aussi le Logarithme négatif du sinus δG. Donc (*art.* 3.) les espaces ici parcourus pendant des tems écoulés quelconques AT, seront aussi entr'eux comme les $A\pi$ correspondantes; & conséquemment l'espace ici parcouru pendant un tems infini, doit aussi être infini.

V. Cela se peut encore démontrer indépendamment de ce qui le précede, en prolongeant $\delta\mu$ jusqu'en ω sur $A\beta$, & en lui faisant la parallele infiniment proche mn qui rencontre βN, $\mu\pi$, en m, n. Car aïant $\mu\pi = G\delta = \sqrt{\overline{A\delta}^2 - \overline{AG}^2} = \sqrt{aa-uu}$, & conséquemment $\mu n = \frac{udu}{\sqrt{aa-uu}}$ positive à cause que les AG (u) croissent à mesure que $\mu\pi$ diminuent; l'on aura ici $\mu\pi$ ($\sqrt{aa-uu}$). soûtangente (a) :: μn $\left(\frac{udu}{\sqrt{aa-uu}}\right)$. $nm = \frac{audu}{aa-uu}$. Donc $\int\frac{audu}{aa-uu} = \int nm = \mu\omega$ $= A\pi$, ou $a \times A\pi = \int\frac{aaudu}{aa-uu} =$ (*art.* 1.) $\int udt = ATU$. Donc aussi (*Lem.* 2.) les espaces parcourus pendant le tems AT, seront encore ici entr'eux comme les $a \times A\pi$, ou simplement (à cause de a constante) comme les $A\pi$ correspondantes, ainsi que dans le précédent art. 4.

VI. La même chose se peut encore trouver autrement

en confiderant que les Méthodes de M. Leibnitz & de M. Bernouilli pour integrer les fractions rationelles, donnent $\frac{udu}{aa-uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{a-u} - \frac{1}{2} \times \frac{du}{a+u}$, dont l'intégrale eſt $\int \frac{udu}{aa-uu} = -\frac{1}{2} \times \overline{la-u} - \frac{1}{2} \times \overline{la+u}$, le Logarithme de $a-u$ moindre que a pris ici pour l'unité, devant être négatif. Donc l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa+uu}$ (*Solut. art.* 2.) de la Courbe AUC des viteſſes reſtantes (u), donnant $\int \frac{aaudu}{aa-uu} = \int udt = ATU$, l'on aura auſſi $ATU = -\frac{aa}{2} \times \overline{la-u} - \frac{aa}{2} \times \overline{la+u}$. Par conſéquent (*art.* 1.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu de ces viteſſes reſtantes TU (u), ſeront ici entr'eux comme les grandeurs $-\frac{aa}{2} \times \overline{la-u} - \frac{aa}{2} \times \overline{la+u}$ correſpondantes, ou ſimplement (à cauſe de $\frac{aa}{2}$ conſtante) comme les correſpondantes $-\overline{la-u} - \overline{la+u}$: C'eſt-à-dire, comme les differences des Logarithmes de chaque ſinus verſe BG, & de l'excès $AB+BG$ dont il eſt ſurpaſſé par le diametre entier quart de cercle $B\delta\beta$.

VII. Mais $\sqrt{aa-uu}$ (δG ou $\mu\pi$) étant moïenne proportionelle géometrique entre $a-u$, $a+u$, ſon Logarithme, qu'on vient de trouver (*art.* 4.) être $l\sqrt{aa-uu} = -A\pi$, doit auſſi être moïen arithmetique entre $\overline{la-u}$, $\overline{la+u}$; par conſéquent $-2A\pi = \overline{la-u} + \overline{la+u}$, ou $A\pi = -\frac{1}{2} \times \overline{la-u} - \frac{1}{2} \times \overline{la+u}$. Donc (*art.* 6.) les eſpaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), doivent encore être ici entr'eux comme les Logarithmes négatifs $A\pi$ correſpondans des ſinus δG ou $\mu\pi$ des arcs $B\delta$ complemens de ceux $\beta\delta$ dont les ſinus ſont les expreſſions AG ou TU des viteſſes reſtantes ou actuelles (u), & le ſinus total AB pareille expreſſion (*Corol.* 2.) de la plus grande (a) qu'elles puiſſent jamais devenir ici, ainſi qu'on l'a déja vû dans les art. 3, 4, 5.

VIII. En continuant à l'infini la diviſion de $\frac{aaudu}{aa-uu}$, on

trouvera $\frac{aaudu}{aa-uu}$ (udt) $= udu + \frac{u^3du}{aa} + \frac{u^5du}{a^4} + \frac{u^7du}{a^6} + \frac{u^9du}{a^8}$ + &c. Dont l'intégrale est $\int udt$ (ATU) $= \frac{uu}{2} + \frac{u^4}{4aa} + \frac{u^6}{6a^4} + \frac{u^8}{8a^6} + \frac{u^{10}}{10a^8}$ + &c. à l'infini. Donc (*art.* 1.) les espaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des vitesses restantes TU (u), seront pareillement ici entr'eux comme ces *series* ou suites infinies correspondantes.

COROLLAIRE VII.

Le rapport de ces espaces parcourus pendant les tems AT, se trouva encore, si tout ce qu'on voit de la Fig. 4. dans la Fig. 5, y demeurant le même que là, on imagine du centre B par l'angle β du quarré $ABX\beta$ circonscrit au quart de cercle $B\delta\beta$, une hyperbole équilatere βQZ entre les asymptotes BX, BZ; & que par chaque point δ où le quart de cercle $B\delta\beta$ est rencontré par $U\delta$ parallele à $A\beta$, soit une ordonnée PQ avec son infiniment proche pq, lesquelles paralleles à BZ, rencontrent l'hyperbole βQZ, en Q, q, & son asymptote BX en P, p. Car cette hyperbole donnant $PQ = \frac{AB \times BX}{BP} = \frac{aa}{\sqrt{aa-uu}}$; & $G\delta$ ou $BP = \sqrt{aa-uu}$, donnant aussi $Pp = \frac{udu}{\sqrt{aa-uu}}$ en différentiant u (AG) négativement, à cause que BP ou $G\delta$ diminuë à mesure que AG augmente. L'on aura ici $PQ \times Pp$ ($QPpq$) $= \frac{aaudu}{aa-uu}$ (*Corol.6.nomb.*1.) $= udt$. Par conséquent $\int udt$ (ATU) $= \int QPpq = \beta XPQ$. Donc (*Lem.* 2.) les espaces parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des vitesses TU ou AG (u) restantes malgré les résistances du milieu supposé, doivent être ici entr'eux comme les aires hyperboliques βXPQ correspondantes; & l'espace entier parcouru pendant un tems infini AC, comme l'aire entiere $Z\beta XBZ$, lequel espace seroit par conséquent ici infini, ainsi que dans le Corol 6. art. 4.

FIG. V.

COROLLAIRE VIII.

Le rapport de ces espaces se trouvera encore par le

FIG. VI.

moïen de la Logarithmique BLC dont la soûtangente est $= \frac{1}{2} AB$ ($\frac{1}{2} a$) dans l'art. 4. de la Solution, sans y emploïer celle $\beta\mu N$ qui vient de donner ce rapport dans l'art. 4. du précédent Corol. 6. laquelle avoit sa soûtangente $= AB$ (a).

I. Car puisque (*Solut. art.* 3.) $u = \frac{x - a}{x + a} \times a$, & $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$; l'on aura $udt = \frac{aa}{2} \times \frac{xdx - adx}{xx + xa} = aa \times \frac{dx}{a + x} - \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{x}$, dont l'intégrale est $\int udt$ ($ATU = aa \times l\overline{a + x} - \frac{aa}{2} \times lx + q$, en prenant $\frac{a}{2} = 1$. Mais le cas de $ATU = 0$, rendant LT (x) $= BA$ (a), c'est-à-dire $x = a$, réduit cette intégrale à $0 = aa \times l2a - \frac{aa}{2} la + q$; d'où résulte $q = \frac{aa}{2} \times la - aa \times l2a$. Donc cette intégrale complette sera $ATU = aa \times l\overline{a + x} - aa \times l2a + \frac{1}{2} aa \times la - \frac{1}{2} aa \times lx = aa \times l\frac{a + x}{2a} + \frac{1}{2} aa \times l\frac{a}{x}$. Donc aussi (*Lem.* 2.) les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des vitesses restantes TU (u), seront entr'eux comme les grandeurs correspondantes $aa \times l\frac{a + x}{2a} + \frac{1}{2} aa \times l\frac{a}{x}$, ou simplement comme les correspondantes $l\frac{2 + x}{4} + \frac{1}{2} l\frac{2}{x}$, en prenant (dis-je) $\frac{1}{2} a$ pour l'unité.

II. Presentement si après avoir pris $AX = \frac{1}{2} AB$ ($\frac{1}{2} a$) avec $B\beta = AB$ sur AB prolongée du côté de β, & aussi $L\lambda = AB$ sur TL prolongée du même côté, ou fait XP, $\beta\psi$, $\lambda\varphi$, paralleles à CA prolongée vers Q, lesquelles rencontrent la Logarithmique CLB prolongée vers P, en P, ψ, φ, desquels points on lui fasse des ordonnées PQ, $\psi\omega$, $\varphi\theta$, paralleles à BA, & qui rencontrent son asymptote CQ en Q, ω, θ: l'on aura $PQ = \frac{1}{2} a$ (*hyp.*) $=$ à la soûtangente de cette Logarithmique PBC, $\psi\omega = 2a$, & $\varphi\theta = a + x$; puisqu'on a (*hyp.*) $AX = \frac{1}{2} a$, $l\lambda = B\ = AB = a$, & $LT = x$. Donc en prenant encore ici $\frac{1}{2} a$ (PQ) pour l'unité, & conséquemment a (AB) $= 2$; l'on y aura aussi $QA = la$, $QT = lx$, $Q\omega = l2a$, & $Q\theta = l\overline{a + x}$. Mais on

vient de trouver (*art.* 1.) $ATU = aa \times la+x - aa \times l2a + \frac{1}{2}aa \times la - \frac{1}{2}aa \times lx$. Donc l'on aura pareillement ici ATU ($\int udt$) $= aa \times Q\theta - aa \times Q\omega + \frac{1}{2}aa \times QA - \frac{1}{2}aa \times QT$ (à cause de $Q\theta - Q\omega = \omega\theta$, & de $QA - QT = -AT$) $= aa \times \omega\theta - \frac{1}{2}aa \times AT$. Donc auſſi (*Lem.* 2.) les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), ſeront ici entr'eux comme les grandeurs correſpondantes $aa \times \omega\theta - \frac{1}{2}aa \times AT$, ou ſimplement comme les correſpondantes $\omega\theta - \frac{1}{2}AT$, ou comme $2\omega\theta - AT$, dont ω eſt l'origine fixe de $\omega\theta$ de même que A l'eſt des AT.

COROLLAIRE IX.

On peut encore trouver ce rapport d'eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), par le moïen d'une hyperbole équilatere quelconque $MY\varphi$ entre les aſymptotes orthogonales BA, $B\varphi$, laquelle rencontre CA prolongée en M : en prenant par tout AZ (ſur AB) troiſiéme proportionnelle à AB, AG, de maniere qu'on ait par tout (pour chaque TU ou AG) AB (a). AG (u) :: AG (u). $AZ = \frac{uu}{a}$. Car ſi après avoir fait l'ordonnée ZY à l'hyperbole $MY\varphi$ parallelement à ſon aſymptote $B\varphi$, on appelle les variables AZ, m ; ZY, n ; & la conſtante AM, c ; les noms du reſte demeurant les mêmes que ci-deſſus : l'on aura premierement $m = \frac{uu}{a}$, & $dm = \frac{2udu}{a}$ ſecondement l'hyperbole $MY\varphi$ donnera BZ ($a-m$). BA (a) :: AM (c). ZY (n) $= \frac{ac}{a-m}$ (à cauſe que $m = \frac{uu}{a}$ donne $a-m = a - \frac{uu}{a} = \frac{aa-uu}{a}$) $= \frac{aac}{aa-uu}$. Donc $ndm = \frac{2acudu}{aa-uu}$, ou $\frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aaudu}{aa-uu}$ (*Corol.* 6. *art.* 1.) $= udt$. Donc auſſi en intégrant, $\int udt$ (ATU) $= \frac{a}{2c} \times \int ndm = \frac{a}{2c} \times MAZY = \frac{AB}{2AM} \times MAZY$. Par conſéquent (*Lem.* 2.) les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des viteſſes reſtantes TU (u), ſeront ici entr'eux comme les grandeurs $\frac{AB}{2AM} \times MAZY$ correſpondantes, ou

FIG. VII.

ſimplement (à cauſe de la fraction conſtante $\frac{AB}{2AM}$) comme les aires hyperboliques *MAZY* correſpondantes, ainſi que M. Newton l'a auſſi trouvé à ſa maniere dans le liv. 2. ſect. 2. prop. 8. pag. 254. & 255. de ſes Principes Mathématiques de la Philoſophie naturelle.

COROLLAIRE X.

FIG. IV. I. Si l'on conſidére préſentement que $\frac{du}{aa-uu} = \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a-u} + \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a+u}$, & que l'art. 2. de la Solution donne $\frac{dt}{az} = \frac{du}{aa-uu}$; l'on aura ici $dt \left(\frac{aadu}{aa-uu}\right) = \frac{a}{2} \times \frac{du}{a-u} + \frac{a}{2} \times \frac{du}{a+u}$, dont l'intégrale eſt $t\ (AT) = -\frac{a}{2} \times l\overline{a-u} + \frac{a}{2} \times l\overline{a+u} = \frac{a}{2}\, l\frac{a+u}{a-u}$, en prenant ici a pour l'unité, laquelle ſuppoſition doit rendre le Logarithme de $a-u$ négatif. Donc les tems $AT\ (t)$ emploïés ici à parcourir les eſpaces trouvés dans les Corol. 6, 7, 8, 9, exprimés par exemple, par les Logarithmes $A\pi$ dans l'art. 4. du Corol. 6. doivent être entr'eux comme les grandeurs correſpondantes $\frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u}$, ou ſimplement comme les Logarithmes $l\frac{a+u}{a-u}$ correſpondans, c'eſt-à-dire, chacun comme le Logarithme de la raiſon de $AB + AG$ au ſinus verſe GB correſpondans, ou comme le Logarithme de la raiſon $\frac{a+u}{a-u}$ de la ſomme $a+u$ faite de la viteſſe actuelle (u) & de la terminale (a) à leur différence $a-u$.

II. Cela ſuit encore de l'équation Logarithmique $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$ trouvée dans l'art. 3. de la Solution, en y ſuppoſant $\frac{x-a}{x+a} \times a = u$. Car cette ſuppoſition donnant $ax - aa = ux + ua$, ou $ax - ux = aa + au$, d'où réſulte $x = \frac{aa+uu}{a-u}$; l'équation $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$, donnera $t\ (AT) = \frac{a}{2} x l x = \frac{a}{2} \times l\frac{aa+au}{a-u} = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u}$ en prenant toûjours $a\ (AB)$ pour l'unité. Donc les tems écoulés $AY(t)$ ſeront encore

ici entr'eux comme les Logarithmes $l\frac{a+u}{a-u}$, ou $l\frac{AB+AG}{BG}$ correſpondans, ainſi que dans le précedent art. 1.

III. Ces art. 1 & 2 fourniſſent encore une nouvelle conſtruction de la Courbe *AUC* des viteſſes reſtantes *(u)*. Car ſi après avoir fait des orthogonales indéfinies *AN*, *AC*, on prend les abſciſſes *AG* de la premiere pour ces viteſſes reſtantes ou actuelles *(u)*, & que de la même origine *A* on prenne enſuite ſur *AC* les abſciſſes $AT = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u} = \frac{AB}{2} \times l\frac{AB+AG}{BG}$ en ſuppoſant toûjours $AB = a = 1$; il eſt manifeſte *(art. 1. & 2.)* que la ligne *AUC*, qui paſſera par tous les angles *U* des parallelogrammes rectangles *GT* faits chacun des deux correſpondantes *AG*, *AT*, ſera la courbe des viteſſes reſtantes *(u)*, laquelle ſervira ici, comme dans l'art. 5. de la Solut. à conſtruire celle *ARC* des réſiſtances totales *(r)* ou des viteſſes perduës.

IV. De ce que *(art. 3.)* il faut toûjours ici $AT = \frac{a}{2} \times l\frac{a+u}{a-u}$, il eſt auſſi manifeſte que le cas de $u = a$ rendant $\frac{a+u}{a-u} = \frac{2a}{0}$ infinie, le tems *AT* ſeroit auſſi pour lors infini : c'eſt-à-dire qu'il faudroit un tems infini pour que l'accéleration des viteſſes reſtantes *(u)* les pût rendre ici $= a$, ou *TU* ou *TS* $(u) = AB$ (a). Par conſéquent (conformément au Corol. 2.) *AB* ſeroit encore la plus grande de tout ce qu'il y auroit auſſi de viteſſes poſſibles *TU* ou *AG*, leſquelles en approcheroient toujours ſans jamais la pouvoir égaler, quoiqu'elle ne ſoit que finie, bien loin de pouvoir devenir uniformes, ainſi que quelques Philoſophes l'ont penſé.

V. On voit auſſi de-là qu'en prenant ainſi $AB = a$ ſur *AN*, ſi l'on fait *BC* parallele à *AC*; cette droite *BC* ſera une aſymptote de la Courbe *AUC*, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 1. dont cèci eſt encore une nouvelle preuve.

COROLLAIRE XI.

Il ſuit des art. 1 & 2. du précédent Corol. 9, que ſi les raiſons $\frac{a+u}{a-u}$ des ſommes $(a+u)$ aux différences $(a-u)$

de la plus grande *a* (*Corol.* 2. & *Corol.* 10. *art.* 4.) des viteſſes *u* ici poſſibles, & de ces viteſſes *u* (*TU* ou *AG*) ſucceſſivement ajoûtées & retranchées de cette plus grande ou terminale *a* (*AB*), ſont pris pour des nombres, les tems écoulés *t* (*AT*) à la fin deſquels ſe trouvent ces viteſſes reſtantes (*u*), ſeront entr'eux comme les Logarithmes de ces raiſons, ainſi que M. Leibnitz l'a dit dans les Actes de Leipſik de 1689. pag. 44. art. 5. nomb. 4. puiſque (*Corol.* 10. *art.* 1 & 2) ces tems *AT* ſont entr'eux comme les Logarithmes $l\frac{a+u}{a-u}$, ou $l\frac{AB+AG}{BG}$.

COROLLAIRE XII.

Imaginons preſentement que le corps en queſtion ſoit mû d'une viteſſe primitivement uniforme quelconque, retardée (comme les variées d'ici) par des réſiſtances en raiſon des quarrés des viteſſes actuelles ou reſtantes de celle-là. Soit cette viteſſe primitivement uniforme exprimée par *BN* priſe telle ſur *AB* prolongée du côté de *N*, qu'elle ſoit à *TU* comme cette viteſſe primitivement uniforme eſt à la reſtante (*u*) des primitivement accelerées (*v*) à la fin de quelque tems *AT* (*t*) que ce ſoit. Sur *CB* prolongée vers *O* juſqu'à ce qu'on ait *BO* = *BN*, ſoit la perpendiculaire *OM*; & par le point *N* entre les aſymptotes *OC*, *OM*, ſoit une hyperbole équilatere *MNC*, laquelle ſoit rencontrée en *D* par *TL* prolongée (s'il en eſt beſoin) de ce côté-là.

On a vû dans la Solution du Probl. 2. pag. 397, & 398. des Mem. de 1707, que *SD* ſera ici la viteſſe reſtante de la primitivement uniforme *BN* à la fin du tems *AT* ou *BS*; & dans le Corol. 3. de ce Probl. 2. pag. 399. que l'eſpace parcouru pendant ce tems *AT* ou *BS*, en vertu de ces viteſſes reſtantes *SD*, ſera exprimé par l'aire hyperbolique *NBSD* correſpondante. On vient de voir auſſi (*Lem* 2.) que l'eſpace parcouru pendant ce même tems *AT* en vertu des viteſſes reſtantes *TU* dont il s'eſt agi juſqu'ici, eſt pareillement exprimé par l'aire *ATU* correſpondante. Donc la préſente hypothéſe des réſiſtances en raiſon des

des quarrés des viteſſes, rendra l'eſpace parcourus pendent un tems quelconque *AT* ou *BS* en vertu des viteſſes *SD* reſtantes de la primitivement uniforme ſuppoſée *BN*, au parcouru pendant le même ou en pareil tems en vertu des viteſſes *TU* reſtantes des primitivement accélérées *TV* ſuppoſées ici en raiſon des tems écoulés, comme l'aire hyperbolique *NBSD* eſt à l'aire correſpondante *ATU*; & par tout de même.

Les différentes expreſſions de ces eſpaces, démontrées pour le premier dans les Corol. 3. 4. 6. *pag.* 399. *&c. des Mem. de* 1707. *& pour le ſecond dans les Corol.* 6. 7. 8. 9. *de ce Problême-ci, ſerviront à en exprimer encore les rapports en d'autres maniéres préſentement trop faciles pour nous y arrêter davantage.*

REMARQUE I.

En prenant ici dv pour l'accroiſſement de viteſſe qu'une peſanteur conſtante donneroit à chaque inſtant à un corps tombant dans un milieu ſans réſiſtances, dr pour ce qu'elle en trouve à chaque inſtant dans un milieu réſiſtant, & du pour l'accroiſſement de viteſſe que cette peſanteur ne laiſſe pas de donner à chaque inſtant au corps tombant dans ce milieu malgré cette réſiſtance; on prouvera comme dans la Remarq. 1. pag. 126. des Mem. de 1708. que cette peſanteur, la réſiſtance qui s'y oppoſe à chaque inſtant, & l'excès dont cette peſanteur ſurpaſſe cette réſiſtance inſtantanée, ſeront ici entr'eux comme les grandeurs dv, dr, du, qui leur répondent.

REMARQUE II.

Les hypothêſes de ce Problême-ci donnant (*Solut. art.* 1.) $dt = dv = dr + du$, & $\frac{dr}{uu} = \frac{dt - du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, cela ſeul donnera ici,

1°. $\frac{dr}{uu} = \frac{dt}{aa} = \frac{dv}{aa}$, d'ou réſulte $dr . dv :: uu . aa$. c'eſt-à-dire (*Remarq.* 1.) que la réſiſtance de chaque inſtant ſera ici à la peſanteur du mobile, comme le quarré de la vi-

teſſe actuelle ou reſtante dans cet inſtant, ſera (*Corol.* 2.) au quarré de la viteſſe terminale, ou de la plus grande que le mobile puiſſe acquerir en vertu de ſa peſanteur malgré les réſiſtances ſuppoſées : c'eſt-à-dire auſſi (*Corol.* 1. 2.) :: $AG \times AG. AB \times AB$.

2°. Cette équation $\frac{dr}{uu} = \frac{dv}{aa}$, donnant $dr = \frac{uudv}{aa}$ (à cauſe de $dv = dr + du$) $= \frac{uudr + uudu}{aa}$, l'on aura ici $aadr = uudr + uudu$, ou $aadr - uudr = uudu$; d'où réſulte $dr. du :: uu. aa - uu$. c'eſt-à-dire (*Remarq.* 1.) que la réſiſtance du milieu en chaque inſtant, ſera ici à la différence ou à l'excès dont cette réſiſtance eſt ſurpaſſée par la peſanteur du mobile, comme le quarré de ſa viteſſe actuelle ou reſtante en cet inſtant, ſera à la différence ou à l'excès dont ce quarré ſera ſurpaſſé par celui de la viteſſe terminale qui eſt (*Corol.* 2.) la plus grande que ce mobile puiſſe jamais acquerir en vertu de ſa peſanteur malgré les réſiſtances ſuppoſées : c'eſt-à-dire auſſi (*Corol.* 1. 2.) :: $AG \times AG. AB \times AB - AG \times AG$ (à cauſe du quart de cercle $B\delta\beta$) :: $AG \times AG. G\delta \times G\delta$.

3°. L'équation $\frac{dt - du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, donnant $aadt - aadu = uudt$, ou $aadu = aadt - uudt$ (à cauſe de $dv = dt$) $= aadv - uudv$; l'on aura ici $dv. du :: aa. aa - uu$. c'eſt-à-dire (*Remarq.* 1.) que la peſanteur du mobile ſera ici à la différence ou à l'excès dont elle ſurpaſſera la réſiſtance du milieu en chaque inſtant, comme le quarré de la viteſſe terminale de ce mobile, ou (*Corol.* 2.) de la plus grande qu'il puiſſe jamais acquerir en vertu de cette peſanteur malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſera à l'excès dont ce quarré ſurpaſſera celui de la viteſſe actuelle du même mobile: c'eſt-à-dire auſſi (*Corol.* 1. 2.) :: $AB \times AB. AB \times AB - AG \times AG$ (à cauſe du quart de cercle $B\delta\beta$) :: $A\delta \times A\delta . G\delta \times G\delta$.

4°. On voit de tout cela & de la Remarq. 1. que ſi l'on prend p pour la peſanteur (dv) du mobile, & f pour la différence (du) dont cette peſanteur ſurpaſſera ici chaque réſiſtance inſtantanée (dr) du milieu ; le nombre

premier donnera $dr = \frac{puu}{aa}$; le second, $dr = \frac{fuu}{aa - uu}$; & le troisiéme, $f = \frac{aap - uup}{aa}$. De sorte que de ces cinq choses : *la résistance du milieu en quelque instant que ce soit, la pesanteur constante du corps qui y tombe malgré cette résistance, l'excès dont cette pesanteur surpasse cette résistance, la vitesse actuelle de ce corps en cet instant, & la plus grande vitesse qu'il puisse jamais acquerir en vertu de sa pesanteur dans ce milieu malgré les résistances qu'on y suppose* : de ces cinq choses, dis-je, trois étant données à volonté, l'on aura toûjours les deux autres, ainsi que dans la Remarq. 2. pag. 126. & 127. des Mem. de 1708. pour le Problême qui s'y trouve, pag. 118.

SCHOLIE.

Pour ce qui est de la Courbe *KEC* des résistances instantanées, l'équation donnée $z = \frac{uu}{a}$ pour la premiere hypothêse de ce Problême-ci, rendant $u = \sqrt{az}$, & $du = \frac{adz}{2\sqrt{az}}$, la substitution de ce valeurs de u, du, dans l'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ trouvée (*Solut. art.* 2.) pour celle de la Courbe *AUC* des vitesses restantes (u), la changera en $dt = \frac{a^3dz}{aa - az \times 2\sqrt{az}} = \frac{aadz}{2a\sqrt{az} - 2z\sqrt{az}}$ qui sera celle de la Courbe *KEC*, laquelle.

1°. Passera par *A* de même que (*Solut. art.* 4.) *HUC* ; puisque le cas de u (*TU*) $= o$, rend aussi z (*TE*) $= o$. D'où l'on voit de plus qu'en *A* la précédente équation se réduisant à $dt = \frac{aadz}{o}$, la Courbe *K E C* qu'elle exprime, doit avoir dt infinie en *A* par rapport à dz ; & conséquemment y être touchée par son axe *ATC*, de même que (*Corol.* 4.) la Courbe *ARC* des résistances totales ou des vitesses perduës ; au lieu que la Courbe *HUC* des vitesses restantes doit (*Corol.* 3.) faire en *A* avec le même axe *ATC* un angle de 45. deg.

2°. Cette Courbe *KEC* ou (*nomb.* 1.) *AEC* ainsi tou-

ché en A par ſon axe ATC, lui preſentera ſa convexité juſqu'à une ordonnée $TE = \frac{1}{3} a = \frac{1}{3} AB$, à l'extrémité E de laquelle elle aura un point d'inflexion, depuis lequel elle preſentera toûjours ſa concavité à cet axe ATC en s'en éloignant juſqu'à une ordonnée $TE = AB$, qu'elle aura lorſque $TU = AB$; puiſque (*hyp.*) $TE = z = \frac{uu}{a} = \frac{TV \times TV}{AB}$, & par conſéquent $TE = AB$ lorſque $TU = AB$; ce qui ne pouvant arriver (*Corol.* 1.) que lorſque AT ſera devenuë infinie, fait voir que l'aſymptote BC de la Courbe HUC ou (*Solut. art.* 4.) AUC des viteſſes reſtantes ou effectives u, ſera auſſi une aſymptote de la Courbe KEC ou (*nomb.* 1.) AEC des réſiſtances inſtantanées z (dr).

FIG. VII. 3°. Il eſt aiſé de voir dans la Fig. 7. que puiſque (*hyp.*) $TE = z = \frac{uu}{a}$, & que le Corol. 9. donne auſſi $AZ = \frac{uu}{a}$; ſi l'on y prolonge YZ juſqu'à la rencontre de TU en E, ce point E ſera un de ceux de la Courbe AEC des réſiſtances inſtantanées z (dr); & ainſi des autres à l'infini. D'où l'on voit (*Solut. art.* 5.) que la conſtruction d'une quelconque des trois Courbes AUC, ARC, AEC, donne tout d'un coup celles des deux autres dans la fig. 4.

4°. Si après avoir décrit cette Courbe AEC en prenant par tout TE troiſiéme proportionelle à TS, TU, c'eſt-à-dire $TE = \frac{TV \times TV}{TS} = \frac{uu}{a}$, ou même EY parallele à TM, & qui rencontre l'hyperbole $MY\varphi$ en Y, & ſon aſymptote BA en Z; l'on aura par tout auſſi $AZ = \frac{uu}{a}$, & conſéquemment (*Corol.* 9.) les aires hyperboliques $MAZY$ en raiſon des eſpaces ici parcourus pendant les tems AT correſpondans en vertu des viteſſes reſtantes TU à chaque inſtant de ces tems malgré les réſiſtances ſuppoſées.

AUTRE SOLUTION

FIG. VIII. I. On vient de trouver (*Solut.* 1. *art.* 2.) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$, ou $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$ pour l'équation de la Courbe HUC des vi-

tesses restantes (u) malgré les résistances supposées. Soit $\frac{a^4}{ss} = aa - uu$: l'on aura $uu = aa - \frac{a^4}{ss} = \frac{aass - a^4}{ss}$, d'où résulte $u = \frac{a}{s}\sqrt{ss - aa}$, & $du = \frac{-ads\sqrt{ss-aa} + \frac{assds}{\sqrt{ss-aa}}}{ss}$ $= \frac{-ass + a^3 + ass}{ss\sqrt{ss-aa}} \times ds = \frac{a^3ds}{ss\sqrt{ss-aa}}$. Donc $dt \left(\frac{aadu}{aa-uu}\right) = \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$, qui est une équation à une hyperbole équilatere APC décrite du centre O, & du demi axe transverse $OA = a$, ayant ces abscisses $OQ = s$, & ses ordonnées $QP = \sqrt{ss-aa}$, ausquelles soit AB parallele rencontrée en G par une droite quelconque OP, qui tirée du centre O rencontre l'hyperbole APC en P.

II. L'on aura le triangle $OQP = \frac{s\sqrt{ss-aa}}{2}$, & (en supposant Op infiniment proche de OP, avec pq parallele à PQ) sa différentielle $POp + PpqQ = \frac{\sqrt{ss-aa}}{2} \times ds + \frac{ssds}{2\sqrt{ss-aa}} = \frac{ss - aa + ss}{2\sqrt{ss-aa}} \times ds = \frac{2ss - aa}{2\sqrt{ss-aa}} \times ds$. Mais $PpqQ = ds\sqrt{ss-aa} = \frac{ss-aa}{\sqrt{ss-aa}} \times ds = \frac{2ss - 2aa}{2\sqrt{ss-aa}} \times ds$. Donc $POp = \frac{2ss - aa - 2ss + 2aa}{2\sqrt{ss-aa}} \times ds = \frac{aads}{2\sqrt{ss-aa}} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$. Mais on vient de trouver (*art.* 1.) $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$, & conséquemment $\frac{adt}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss-aa}}$. Donc $\frac{adt}{2} = POp$, ou $dt = \frac{2}{a} \times POp$; & en intégrant, $t\,(AT) = \frac{2}{a} \times PAO = \frac{2 \times PAO}{AO}$, c'est-à-dire, les tems écoulés AT en raison des secteurs hyperboliques PAO correspondans, ainsi que M. Newton l'a aussi démontré à sa maniére dans ses Princ. Mathem. Liv. 2. Sect. 2. Prop. 9. pag. 258. & 259.

III. De plus la précedente supposition (*art.* 1.) de $\frac{a^4}{ss} = aa - uu$ donnant $u = \frac{a}{s}\sqrt{ss-aa}$, l'on aura $a\,(AO)$. $u\,(TU) :: s\,(OQ).\sqrt{ss-aa}\,(QP) :: AO.\,AG$. Et par conséquent $TU\,(u) = AG$.

IV. Donc (*art.* 2. *&* 3.) ſi l'on prend $AT\ (t) = \frac{2 \times PAO}{AO}$ & qu'on acheve le rectangle GT, ſon angle U ſera un des points de la Courbe cherchée HUC des viteſſes reſtantes (u); & ainſi de tous ſes autres points à l'infini. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

Cette Courbe HUC *des viteſſes reſtantes* (u), *ainſi conſtruite, ſervira comme dans l'art.* 5. *de la Solut.* 1. *à conſtruire la Courbe* ARC *des réſiſtances totales* (r), *&c.*

COROLLAIRE. XIII.

Il ſuit de cette Solut. 2. que lorſque $OQ\ (s) = OA\ (a)$ rend $QP\ (\sqrt{ss-aa}) = o$, & conſéquemment auſſi $PAO = o$, il en doit réſulter non-ſeulement $t\ \left(\frac{2 \times PAO}{AO}\right) = o$, mais encore $u\ \left(\frac{a}{s}\sqrt{ss-aa}\right) = o$: c'eſt-à-dire, $AT\ (t) = o$, & $TU\ (u) = o$. Par conſéquent la Courbe HUC des viteſſes actuelles ou reſtantes (u) doit ici paſſer par A, ainſi qu'on l'a déja vû dans l'art. 4. de la Solut. 1. & dans l'art. 2. du Lem. 1. pour tous les mouvemens dont les primitifs commencent, comme ici, à zero de viteſſes ; ce qui ſe voit ſans calcul pour quelque hypothêſe de réſiſtances que ce ſoit, en ce que les viteſſes reſtantes n'y ſont que les reſtes des primitives qui au premier inſtant du mouvement, ne ſont point encore diminuées.

COROLLAIRE XIV.

Si l'on prend $AB = AO\ (a)$, on ſçait que la droite OBC ſera une des aſymptotes de l'hyperbole équilatere APC ; & qu'ainſi OP ne pouvant jamais couper AB par delà B, l'ordonnée $TU\ (AG)$ ne peut jamais être plus grande que AB, à l'égalité de laquelle elle approchera toûjours ſans jamais y arriver que lorſque le triligne hyperbolique PAO ſera infini, c'eſt-à-dire ſeulement lorſque AQ & (*Solut.* 2. *art.* 2.) AT le ſeront. D'où l'on voit encore que BC parallele à ATC, doit être ici une aſymptote de la Courbe AUC des viteſſes actuelles ou reſtan-

tes TU (u) des primitives TV (v), ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 1. & dans l'art 5. du Corol. 10. De-là ſuivent encore les Corol 2. & 5.

COROLLAIRE XV.

Puiſque (*hyp.*) TV exprime ici la viteſſe primitive du mobile à la fin du tems AT, c'eſt-à-dire, ce que la peſanteur conſtante de ce mobile lui en auroit donné de verticale de haut en bas pendant ce tems AT dans un milieu ſans réſiſtance ni action; & que (*Solut.* 1.2.) TU exprime de même ce que la réſiſtance ſuppoſée du milieu où ce corps eſt ſuppoſé ſe mouvoir ici, lui laiſſe de cette viteſſe primitive à la fin de ce même tems AT; cette viteſſe reſtante TU ſera à cette primitive $TV :: TU . TV$ (à cauſe que la ſeconde hypothêſe de ce Problême-ci donne $TV = AT$) $:: TU . AT$. Mais (*Solut.* 2. *art.*) $AT = \frac{2 \times PAO}{AO}$. Donc chaque viteſſe reſtante TU ſera ici à la primitive correſpondante $TV :: TU . \frac{2 \times APO}{AO}$ (la Solut. 2. art. 3. donnant $AG = TU$) $:: AG . \frac{2 \times PAO}{AO} :: \frac{AG \times AO}{2} . PAO :: GAO . PAO$: C'eſt-à-dire, comme triangle rectiligne GAO eſt au ſecteur hyperbolique PAO correſpondant, ainſi que M. Newton l'a auſſi démontré à ſa maniere dans le Corol. 3. Prop. 9. Sect. 2. pag. 259. de ſes Principes Mathematiques.

COROLLAIRE XVI.

Il ſuit encore des Solut. 1. & 2. que le tems qu'il faudroit à la peſanteur conſtante du corps mû verticalement de haut en bas, pour lui donner dans un milieu ſans réſiſtance & ſans action, une viteſſe égale à la plus grande AB qu'il puiſſe (*Corol.* 1. & 14.) jamais lui donner dans un milieu qui (comme ici) lui réſiſteroit en raiſon des quarrés des viteſſes de ce corps: il ſuit, dis-je, que ce tems ſeroit à ce qu'il en faudroit à cette peſanteur pour donner à ce même corps la viteſſe TU ou

(*Solut.* 2. *art.* 3.) *AG* malgré les résistances de ce dernier milieu : : *AB*. *AT* (*Solut.* 2. *art.* 2.) : : *AB*. $\frac{2 \times PAO}{AO}$: : $\frac{AB \times AO}{2}$. *PAO* : : *BAO*. *PAO*. c'est-à-dire, comme le triangle rectiligne *BAO* est au secteur hyperbolique *PAO*.

COROLLAIRE XVII.

I. Puisque (*Solut.* 2. *art.* 1.) $\frac{a^4}{ss} = aa - uu$, ou $uu = aa - \frac{a^4}{ss} = \frac{aass - a^4}{ss}$, l'on aura $udu = \frac{aas^3 - aas^3 + a^4 s}{s^4} \times ds = \frac{a^4 ds}{s^3}$; & par conséquent $\frac{aaudu}{aa - uu} = \frac{a^6 ds}{s^3} \times \frac{ss}{a^4} = \frac{aads}{s}$. Mais (*Solut.* 1. *art.* 2.) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$, ou $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$, & conséquemment aussi $udt = \frac{aaudu}{aa - uu}$. Donc $udt = \frac{aads}{s}$, & (en intégrant) $\int udt = \int \frac{aads}{s} = aa \times ls + q$. Mais le cas de $\int udt$ (*ATU*) $= o$, rendant *P* en *A*, & conséquemment *OQ* (s) $=$ *OA* (a), réduit cette intégrale à $o = aa \times la + q$, d'où résulte $q = - aa \times la$. Donc cette intégrale complette sera *ATU* ($\int udt$) $= aa \times ls - aa \times la = aa \times l\frac{s}{a}$; ce qui se réduit à *ATU* $= ls$ en prenant a pour l'unité. Donc (*Lem.* 2.) les espaces parcourus pendant les tems *AT* ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2 \times PAO}{AO}$, doivent être ici comme les $aa \times l\frac{s}{a}$, ou simplement comme les $l\frac{s}{a}$ correspondantes : c'est-à dire (*Solut.* 2. *art.* 1.) comme les Logarithmes des fractions ou des raisons $\frac{OQ}{OA}$ correspondantes, quelle que soit la valeur de la constante *OA* (a); ou simplement comme les logarithmes des abscisses *OQ*, lorsqu'on prend *OA* pour l'unité.

II. Si l'on considere présentement que l'équation $\frac{a^4}{ss} = aa - uu$ de l'art. 1. de la Solut. 2. donne $s = \frac{aa}{\sqrt{aa - uu}}$, on trouvera par la substitution de cette valeur de s dans $aa \times l\frac{s}{a}$, que les espaces ici parcourus pendant les tems

AT

AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2 \times PAO}{AO}$, feront auffi entr'eux (*art.* 1.) en raifon des grandeurs correfpondantes $aa \times l\frac{a}{\sqrt{aa-uu}}$, ou fimplement (à caufe de a conftante) en raifon des Logarithmes $l\frac{a}{\sqrt{aa-uu}}$ correfpondans : De forte qu'en prenant encore ici a pour l'unité, cette fuppofition rendant $l\frac{a}{\sqrt{aa-uu}} = l\frac{1}{\sqrt{aa-uu}} = l1 - l\sqrt{aa-uu} = 0 - l\sqrt{aa-uu} = -l\sqrt{aa-uu}$; ces efpaces fe trouveront pareillement ici être entr'eux en raifon des Logarithmes négatifs $-l\sqrt{aa-uu}$ correfpondans, ainfi que dans l'art. 2. du Corol. 6.

COROLLAIRE XVIII.

Il fuit encore de la Solut. 2. que fi après avoir pris (fur AB) AZ troifiéme proportionelle à AB, AG; & Az troifiéme proportionnelle à AB, Ag; en forte qu'on ait $AB \times AZ = AG \times AG$, $AB \times Az = Ag \times Ag$, & par tout de même; on imagine une feconde hyperbole équilatere quelconque $MY\varphi$ entre les afymptotes orthogonales AB, $B\varphi$, laquelle rencontre AO en M, & fes paralleles ZY, zy, en Y, y; & de plus Op rencontrée en L par QP prolongée de ce côté-là : L'on aura les aires hyperboliques $AZYM$ en raifon des efpaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2 \times PAO}{AO}$ correfpondans, ainfi qu'on l'a déja conclu de la Solut. 1. dans le Corol. 9.

1°. Car aïant ici $POp = POL$, l'on aura auffi $POp. GOg :: POL. GOg :: OP \times OP. OG \times OG :: OQ \times OQ. OA \times OA :: PQ \times PQ. AG \times AG$. Mais l'analogie de $OQ \times OQ. OA \times OA :: PQ \times PQ. AG \times AG$. donnant $OQ \times OQ. PQ \times PQ :: OA \times OA. AG \times AG$. donne auffi $OQ \times OQ - PQ \times PQ. PQ \times PQ :: OA \times OA - AG \times AG. AG \times AG$. ou $PQ \times PQ. AG \times AG :: OQ \times OQ - PQ \times PQ. OA \times OA - AG \times AG$. Donc $POp. GOg :: OQ \times OQ - PQ \times PQ. OA \times OA - AG \times AG$. Mais l'hyperbole APC, qui donne $PQ \times PQ = OQ \times OQ - OA \times OA$, donne auffi $OA \times OA = OQ \times OQ - PQ \times PQ$;

& l'on avoit cy-dessus (*hyp.*) $AG \times AG = AB \times AZ$. Donc $POp . GOg :: OA \times OA . OA \times OA - AB \times AZ$ (à cause de $OA = AB$ suivant le Corol. 14.) $:: AB \times AB . AB \times AB - AB \times AZ :: AB . AB - AZ :: AB . BZ$. Mais le triangle rectangle $GOg = \frac{OA \times Gg}{2} = \frac{AB \times Gg}{2}$. Donc $POp . \frac{AB \times Gg}{2} :: AB . BZ$. Par conséquent $POp = \frac{AB \times AB \times Gg}{2 \times BZ}$. Mais l'hyperbole $MY\varphi$ donnant $BZ \times ZY = AB \times AM$, donne aussi $BZ = \frac{AB \times AM}{ZY}$. Donc $POp = \frac{AB \times ZY \times Gg}{2 \times AM}$; & par conséquent aussi $\frac{ZY \times Gg}{AM} = \frac{2 \times POp}{AB} = \frac{2 \times POp}{AO}$ (*Solut.* 2. *art.* 2.) $= dt$.

2°. Mais puisque (*hyp.*) $AB \times AZ = AG \times AG$, la differentiation de cette égalité donnera $AB \times Zz = AG \times Gg$, d'où résulte $Gg = \frac{AB \times Zz}{2 \times AG}$. Donc (*nomb.* 1.) $POp = \frac{AB \times AB \times ZY \times Zz}{4 \times AM \times AG}$, ou $AG = \frac{AB \times AB \times ZY \times Zz}{4 \times AM \times POp} = \frac{AB \times AB \times ZzyY}{4 \times AM \times POp}$: c'est-à-dire, les vitesses restantes instantanées AG ou $TU(u)$ en raison des fractions correspondantes $\frac{ZzyY}{POp}$, à cause de la fraction constante $\frac{AB \times AB}{4 \times AM}$: ou bien aussi comme les correspondantes $\frac{AB \times ZzyY}{2POp}$, c'est-à-dire (la Solut. 2. art. 2. donnant $dt = \frac{2 \times POp}{\text{[illegible]}} = \frac{2 \times POp}{AB}$) comme les fractions correspondantes $\frac{ZzyY}{dt}$.

3°. Or ces mêmes vitesses sont aussi comme les fractions des espaces qu'elles font parcourir, divisés chacun par l'instant (dt) qui y est employé. Donc l'aire hyperbolique élementaire $ZzYy$ sera aussi comme l'espace parcouru de la vitesse AG ou TU (u) pendant l'instant dt $\left(\frac{2 \times POp}{AO}\right)$ correspondant; & par tout de même. Donc (en intégrant) les sommes $AzyM$ ou $AZYM$ de ces petites aires $ZzyY$, doivent être ici par tout proportionnelles aux sommes ($\int udt$) des vitesses (u) qui se sont successivement trouvées dans tous les instans des tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2 \times PAO}{AO}$ (t). Donc aussi (*Lem.* 2.) les

eſpaces parcourus pendant ces mêmes tems *AT* $\left(\frac{2 \times PAO}{AO}\right)$ en vertu des viteſſes *AG* ou *TU* ſucceſſivement reſtantes des primitives ſuppoſées *TV* à chaque inſtant de ces tems, doivent être entr'eux comme les aires hyperboliques *AZYM* correſpondantes, ainſi que l'Analyſe l'a auſſi fait voir dans le Corol. 9.

COROLLAIRE XIX.

I. Puiſque (*Corol.* 18.) les *AZ*, *Az*, &c. ſont entr'elles comme les quarrés *AG*×*AG*, *Ag*×*Ag*, &c. des viteſſes (*Solut.* 2. *art.* 3.) reſtantes ou actuelles (*u*), & que (*hyp.*) les réſiſtances inſtantanées (*dr*) ſont pareillement ici entr'elles comme ces quarrés de viteſſes; *AZ*, *Az*, &c. ſeront auſſi entr'elles comme ces réſiſtances inſtantanées conformément au nomb. 3. du Schol. de la Solut. 1. Donc en prenant ces *AZ* pour ces réſiſtances, l'on aura *AB*, pour la plus grande ce qu'il y en a ici de poſſibles : puiſque (*Corol.* 2. & 14.) *AB* eſt auſſi la plus grande des viteſſes ici poſſibles *AG* (*TU*), aux quarrés deſquelles ces réſiſtances inſtantanées ſont (*hyp.*) proportionnelles, & que l'analogie *AB*. *AG* :: *AG*. *AZ*. ſuppoſée au commencement du Corol. 18. donne *AZ* = *AB* dans le cas de *AG* = *AB*. Mais en ce cas de la plus grande *AB* des viteſſes *AG*, à laquelle répond auſſi la plus grande *AB* des réſiſtances *AZ*, la peſanteur du mobile doit être égale à cette plus grande réſiſtance *AB* : autrement leur inégalité augmenteroit ou diminuëroit la viteſſe *AB*; ce qui eſt également impoſſible ſuivant les Corol. 2. & 14. Donc en prenant ici les *AZ* pour les réſiſtances inſtantanées (*dr*), l'on aura auſſi *AB* pour la peſanteur conſtante du corps mû malgré elles en ligne droite de haut en bas en vertu de cette peſanteur laquelle eſt de même genre que ces réſiſtances; & cette même peſanteur les devant ſurmonter chacune à chaque inſtant de l'excès *BZ* dont elle ſurpaſſe chacune d'elles; l'on aura pareillement *BZ* pour ce qui doit reſter de force à cette peſanteur à la fin du tems *AT* pour augmenter la viteſſe

AG (*u*) d'une quantité infiniment petite *Gg* (*du*) laquelle augmentera aussi la résistance *AZ* d'une quantité *Zz* infiniment petite par rapport à cette résistance. Donc *BZ*, *Bz*, &c. seront ici les restes agissans de la pesanteur *AB* à la fin des tems *AT*, *At*, &c.

II. On voit de là qu'en exprimant (*Corol.* 9. & 18.) les espaces ici parcourus pendant les tems *AT* ou (*Solut.* 2. *art.* 2.) $\frac{2}{a} \times PAO$, par les aires hyperboliques *AZYM*; la vitesse restante du mobile à la fin de ces tems ou de ces espaces, sa vitesse terminale, la résistance du milieu a la fin de ces mêmes tems ou espaces la pesanteur du mobile, & l'excès ou difference de force dont cette pesanteur surpasse cette résistance, pourront être exprimées de même par les lignes *AG*, *AB*, *AZ*, *AB*, *BZ*. De sorte que trois quelconques des deux especes de grandeurs qu'elles expriment, étant données, pourvû que ce ne soient pas les trois dernieres, l'analogie *AB*. *AG* : : *AG*. *AZ*. des Corol. 9. & 18. donnera toûjours les deux autres; & même deux seulement des trois dernieres étant données à volonté, l'on aura toûjours la troisiéme d'entr'elles. Ceci comprend les Corol. 1. 2. 3. pag. 296. des Princ. Math. de M. Newton.

III. Si l'on imagine présentement chacune des aires hyperboliques *AzyM*, &c. divisée en parties égales quelconques *AZYM*, *ZzyY*, &c. parallelement à *Bφ* : c'est à-dire (*Corol.* 9. & 18.) les espaces ici parcourus pendant des tems *At*, &c. divisés chacun en parties égales quelconques, les *BZ*, *Bz*, &c. seront en progression géometrique. Donc (*art.* 1. & 2.) les forces (*BZ*, *Bz*, &c.) restantes de la pesanteur (*AB*) diminuée à chaque instant de la valeur de celle des résistances (*AZ*, *Az*, &c) qu'elle a pour lors à surmonter, seront aussi en progression géometrique à la fin des parties égales de chacun des espaces parcourus pendant les tems correspondans *AT*, *At*, &c. ainsi que M. Newton l'a aussi trouvé dans sa Prop. 8. pag. 254. & 255. de ses Princ. Math.

IV. On voit de-là, que si l'on prenoit ces restes *BZ*, *Bz*, &c. de pesanteur, pour des nombres, dont le plus grand *AB*, qui (*art.* 1. & 2.) exprimeroit cette pesanteur entiere du corps en question, fût pris pour l'unité; les espaces ici parcourus pendant les tems *AT*, *At*, &c. correspondans, en seroient les Logarithmes négatifs. D'où l'on voit aussi que si (*fig.* 9.) l'on exprimoit ces espaces par les abscisses *BD* de l'asymptote *BC* (parallele à *ATC*) d'une Logarithmique *AMC* d'une soûtangente $= AB = 1$, lesquelles fussent prises du côté *C* qu'elle s'en approche, depuis l'Ordonnée *AB*; les autres Ordonnées extérieures *DM* correspodantes aux abscisses *BD*, y exprimeroient les restes de pesanteur du mobile à la fin de ces espaces, c'est-à-dire, les excès dont sa pesanteur surpasseroit alors les résistances qui s'y opposeroient; & les Ordonnées intérieures *NM*, ces résistances mêmes :

V. Cela étant, & cette Logarithmique *AMC* d'une soûtangente $= AB = 1$, étant ainsi ajoûtée à la Courbe *AUC* (*Solut.* 1. *art.* 4. & *Corol.* 13.) des vitesses restantes (*u*), & sur la même asymptote *BC* qu'elle; si l'on méne une Ordonnée quelconque *TU* de cette Courbe *AUC*; qu'on fasse *UG* parallele à *TA*, & qui rencontre *AB* en *G*; qu'on prenne *AZ* troisiéme proportionnelle à *AB*, *AG*; qu'on fasse *ZM* parallele à *ATC*, & qui rencontre la Logarithmique *AMC* en *M*; & qu'on méne par ce point *M* la droite *DN* parallele à *AB*, & qui rencontre perpendiculairement en *N*, *D*, les paralleles *ATC*, *BC* : il est visible.

1°. Qu'en prenant, par exemple, *AT* pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, l'on aura ici tout à la fois *TU* ou *AG* (*Solut.* 1. & 2.) pour les vitesses restantes à la fin de ces tems malgré les résistances supposées; *BD* ou *AN* (*art.* 3. & 4.) pour les espaces parcourus en vertu de ces vitesses *TU* pendant ces mêmes tems *AT*; *AZ* ou *NM* (*art.* 1.) pour les résistances qui s'y opposent à la fin de ces espaces *BD* ou de ces tems *AT*; *AB* ou *ND* (*art.* 1.) pour la pesanteur du mobile; *BZ* ou *DM* (*art.* 2. & 3.) pour les excès dont cette pe-

ſanteur *AB* ſurpaſſe chacune des réſiſtances *AZ* à la fin des tems *AT*, c'eſt-à-dire, pour ce qui reſte alors de force à cette peſanteur pour accelerer le mobile.

2°. Il eſt pareillement viſible que ſi au lieu de prendre *AT* pour les tems écoulés, l'ont eût pris à volonté quelqu'une des autres grandeurs *TU*, *BD*, *NM*, *DM*, *AB*, &c. pour ce qu'on vient de lui voir exprimer dans le nomb. 1. L'on auroit trouvé de même que les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ſont ici comme le *AT* correſpondantes, & tout le reſte comme dans ce nomb. 1. Ce détail eſt preſentement trop aiſé pour nous y arrêter davantage.

COROLLAIRE XX.

FIG. VII. I. La même choſe peut encore ſe conclure de la Solut. 1. Car puiſque l'art. 2. de cette Solution donne $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$, l'on aura ici $udt = \frac{aaudu}{aa-uu}$, ou $mudt = \frac{maaudu}{aa-uu}$. Donc en faiſant *mudt* conſtante, quelque nombre fini que *m* puiſſe exprimer; c'eſt-à-dire, en prenant ces parties *mudt* de l'eſpace $\int udt$ (*ATU*) ici parcouru (*Lem.* 2.) pendant un tems *AT* quelconque, par tout égales entr'elles; les fractions correſpondantes $\frac{udu}{aa-uu}$ ſeront auſſi conſtantes, puiſque *m*, *a*, ſont ſuppoſées l'être. Par conſequent les $aa-uu$ ou $a-\frac{uu}{a}$ correſpondantes ſeront alors en progreſſion géometrique. Mais ſuivant le nomb. 3. de la Remarq. 2. qui ſuit le Corol. 11. la peſanteur du mobile ſera ici à la différence ou à l'excès de force dont elle ſurpaſſera la réſiſtance du milieu à chaque inſtant, c'eſt-à-dire, à ce que cette réſiſtance inſtantanée laiſſera pour lors de force à cette peſanteur pour augmenter la viteſſe du mobile :: $aa.\ aa-uu :: a.\ a-\frac{uu}{a}$. De ſorte qu'en prenant (comme l'on vient de faire dans l'art. 1. du Corol. 19.) *AB* (a) pour cette peſanteur, l'on aura ici $a-\frac{uu}{a}$, c'eſt-à-dire (*Corol.* 9.) *BZ*, pour ce qui lui reſte de force à chaque inſtant correſpondant nonobſtant

la résistance supposée. Donc les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques *AT* (t), étant divisés en parties égales aussi quelconques, ces restes *BZ* de force ou de pesanteur à la fin de chacune de ces parties, seront en progression géometrique, ainsi que dans l'art. 3. du Corol. 19. D'où suivent aussi les art. 4. & 5. de ce même Corol. 19.

II. Cela se peut encore déduire de la Solut. 1. sans le secours de la Remarq. 2. qu'on en vient de citer. Car puisque $mudt$ constante (*hyp.*) aussi-bien que maa dans l'équation $mudt = \frac{maadu}{aa-uu}$ résultante de celle $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ de l'art. 2. de la Solut. 1. rend (*art.* 1.) $aa-uu$ ou $a-\frac{uu}{a}$ en progression géometrique, dont a exprime ici la pesanteur absoluë du mobile, & $\frac{uu}{a}$ (*Schol. nomb.* 3.) la résistance que lui fait à chaque instant le milieu où il tombe ; cette difference ou ce reste $a-\frac{uu}{a}$ (*BZ*) de pesanteur doit être ici en progression géometrique à la fin des parties égales $mudt$ de l'espace $\int udt$ (*ATU*) parcouru (*Lem.* 2.) en vertu de ces restes de force ou de pesanteur pendant le tems *AT*, ainsi que dans le précedent art. 1. & que dans l'art. 3. du Corol. 19. d'où suivent encore les art. 4. & 5. de ce Corol 19.

COROLLAIRE XXI.

Puisque (*Corol.* 19. *art.* 1. *Corol.* 20. *art.* 1. 2.) *BZ* $\left(a-\frac{uu}{a}\right)$ est ce qui reste de force à la pesanteur absoluë *AB* (a) pour produire à chaque instant l'augmentation (du) de la vitesse *AG* ou *TU* (u) restante alors malgré la résistance *AZ* $\left(\frac{uu}{a}\right)$ du milieu qui s'y oppose, il est visible que lorsque cette résistance instantanée sera égale à cette pesanteur absoluë, c'est-à-dire, lorsque *AZ* = *AB*, il n'y aura plus ici du tout d'augmentation de vitesse. Ainsi *AG* pour lors aussi égale à *AB*, donnera cette même *AB* (a) pour la plus grande des vitesses (u) que le mobile puisse acquerir ici pendant le tems *AT* (t) qui pour lors sera infini, ainsi qu'on l'a déja vû dans les

Corol. 2. & 14. & l'aire hyperbolique *AZYM* alors égale à *φYMAEφ*, fait voir (*Corol. 9. & 18.*) que l'espace ici parcouru pendant ce tems infini, seroit pareillement infini, ainsi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 6. 7. & qu'il suit encore des Corol. 8. 9. 17. 18.

COROLLAIRE XXII.

De ce que (*Corol. 19. art 1. & Corol. 21.*) la plus grande des résistances instantanées *AZ* ici possibles est égale à la pesanteur absoluë *AB* du corps tombant en vertu de cette pesanteur malgré ces résistances, & que (*Corol. 2. & 14.*) la vitesse *AG* est à la plus grande que ce corps puisse acquerir ici : : *AG*. *AB*. On voit que de ces cinq choses dans l'hypothêse des résistances en raison des quarrés des vitesses: *Pesanteur absoluë* AB *ou plus grande* AB *des résistances instantanées, plus grande* AB *des vitesses ici impossibles, une quelconque* AG *d'entr'elles, la résistance instantanée* AZ *qui s'y oppose, & le reste* BZ *de pesanteur qui l'augmente:* trois étant données à volonté, l'on aura toûjours les deux autres, ainsi que dans le nomb. 4. de la Remarq. 2. qui suit le Corol. 12.

COROLLAIRE XXIII.

Puisqu'en géneral chaque vitesse instantanée ne consiste que dans le rapport de l'espace parcouru en vertu de cette vitesse, à l'instant emploïé à le parcourir, l'on aura (*Corol. 18. nomb. 3.*) les vitesses *AG* (*u*) en raison des fractions $\frac{ZY \times Zz}{dt}$ correspondantes (conformément au Corol. 18. nomb. 2.) ou les instans *dt* (*Tt*) en raison des fractions $\frac{ZY \times Zz}{AG}$ pareillement correspondantes. Mais (*Corol. 18. nomb. 2.*) $AB \times Zz = 2AG \times Gg$, d'où résulte $Zz = \frac{2AG \times Gg}{AB}$; & l'hyperbole $MY\varphi$ donne $BZ \times ZY = AB \times AM$, ou $ZY = \frac{AB \times AM}{BZ}$. Donc en substituant ces valeurs de *ZY*, *Zz* dans l'expression précedente $\frac{ZY \times Zz}{AG}$ des instans *dt* (*Tt*), il en résultera une autre fraction $\frac{2 \times AM \times Gg}{BZ}$ qui sera aussi comme ces mêmes instans. Donc $2 \times AM$ étant constante, ces instans

ſtans dt (Tt), qu'on a vû (*Solut.* 2. *art.* 2.) être entre eux comme les trilignes hyperboliques élémentaires POp correſpondans, ſeront pareillement ici entr'eux comme les fractions $\frac{Gg}{BZ}$ ou $\frac{Gg}{Bz}$ correſpondantes; & conſéquemment auſſi (à cauſe de $ZY . AM :: AB . BZ = \frac{AB \times AM}{ZY}$. & de $AB \times AM$ conſtante) comme les $ZY \times Gg$ correſpondans, ainſi que M. Newton l'a auſſi trouvé dans le Corol. 4. de la Prop. 8. citée à la fin de l'art. 3. du Corol. 19.

COROLLAIRE XXIV.

Si preſentement on ſuppoſe que l'axe tranverſe, juſqu'ici arbitraire, de l'hyperbole $MY\phi$, ſoit $= AB\sqrt{2}$, enſorte qu'elle ait ici $AM = \frac{1}{4} AB$, il ſuit encore du Corol. 18. que l'eſpace ici parcouru pendant quelque tems AT que ce ſoit, en vertu de la peſanteur conſtante d'un corps qui tombe verticalement dans le milieu ſuppoſé, ou plûtôt en vertu de ce que les réſiſtances de ce milieu, laiſſent de cette force à ce corps en chaque inſtant, eſt à l'eſpace que ce même corps parcoûroit en même tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 2) $\frac{2 \times PAO}{AO}$ d'une viteſſe uniforme égale à la plus grande AB que ſa peſanteur lui puiſſe donner (*Corol.* 2. & 14.) malgré ces réſiſtances : $AZYM . PAO$.

Car puiſque (*Corol.* 18. *nomb.* 2.) $AB \times Zz = 2AG \times Gg$, l'on aura $2 \times AG . AB :: Zz . Gg$. ou (en multipliant les antecedens par ZY, & les conſéquens par $\frac{1}{2} AO$) $2 \times AG \times ZY . \frac{1}{2} AO \times AB :: ZY \times Zz . \frac{1}{2} AO \times Gg :: ZzyY . GOg$. Mais (*Corol.* 18. *nomb.* 1.) $BZ . AB :: GOg . POp$. Donc (en multipliant par ordre) $ZzyY . POp :: 2 \times AG \times ZY \times BZ . \frac{1}{2} AO \times AB \times AB$ (à cauſe de $AO = AB$) $:: AG \times ZY \times BZ . \frac{1}{4} AB \times AB \times AB$ (à cauſe de $ZY \times BZ = AM \times AB$) $:: AG \times AM . \frac{1}{4} AB \times AB$ (à cauſe qu'on ſuppoſe ici $AM = \frac{1}{4} AB$) $:: AG . AB$. C'eſt à dire les aires hyperboliques élémentaires $ZzyY$, POp, par tout entr'elles comme (*Solut.* 2. *art.* 3.) les viteſſes correſpondantes AG (u), AB (a). Donc les eſpaces parcourus en vertu de ces viteſſes pendant un même inſtant quelconque

Tt, étant entr'eux comme ces mêmes viteſſes ; ces eſpaces ſeront pareillement ici entr'eux : : *Zzy*Υ. *POp*. Donc auſſi le premier de ces eſpaces parcouru de la viteſſe reſtante *AG* ou *TU* (*u*) pendant l'inſtant *Tt*, étant (*Corol.* 18. *nomb.* 3.) comme l'aire élémentaire hyperbolique *Zzy*Υ, ſi l'on prend cette aire infiniment petite pour cet eſpace inſtantanée, l'on aura pareillement le petit triligne hyperbolique *POp* correſpondant pour l'eſpace parcouru de la viteſſe *AB* (*a*) pendant le même inſtant *Tt* ; & par tout de même. Donc (en integrant) l'eſpace parcouru de la viteſſe accelerée *AG* ou *TU* (*u*) pendant le tems *AT* (*t*) malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſera à l'eſpace parcouru de la viteſſe terminale uniforme *AB* (*a*) pendant le même tems : : *AZ*Υ*M*. *PAO*. Et par tout ici de même. Ce qu'il falloit démontrer ; & ce que M. Newton a auſſi démontré à ſa maniere dans ſes princ. Math. Liv. 2. Sect. 2. Prop. 9. Corol. 1. pag. 259.

COROLLAIRE XXV.

Les deux derniers Corol. 23 & 24. ſont encore des ſuites preſque immédiates des Analyſes de la Solut. 1. & du Corol. 9. En effet.

I. L'art. 2. de la Solut. 1. donnant $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$; l'on aura $dt = \frac{aadu}{aa - uu} = \frac{adu}{a - \frac{uu}{a}}$ (à cauſe de $du = Gg$, $a = AB$, $\frac{uu}{a} = AZ$, $a - \frac{uu}{a} = BZ$) $= \frac{AB \times Gg}{BZ}$: c'eſt-à-dire (à cauſe de *AB* conſtante) les inſtans *dt* (*Tt*) en raiſon des fractions $\frac{Gg}{BZ}$ correſpondantes, & conſéquemment auſſi (à cauſe de $Z\Upsilon . AM : : AB . BZ = \frac{AB \times AM}{Z\Upsilon}$, & de $AB \times AM$ conſtante) comme les $Z\Upsilon \times Gg$ correſpondans, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 23.

II. En appellant les variables *AZ*, *m* ; *Z*Υ, *n* ; la conſtante *AM*, *c* ; & le reſte comme dans le Corol. 9. la ſuppoſition qu'on fait ici (*Corol.* 18.) de *AB* (*a*). *AG* (*u*) : : *AG* (*u*).

$AZ(m)$. donnera ici $m = \frac{uu}{a}$, & $\frac{2acudu}{aa - uu} = ndm = ZzyY$, comme dans ce Corol. 9. De plus l'art. 2. de la Solut. 2. donne $POp = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}$ (*Solut.* 2. *art.* 1.) $= \frac{1}{2} \times \frac{a^3 du}{aa - uu}$. Donc $ZzyY . POp :: \frac{2acudu}{aa - uu} . \frac{1}{2} \times \frac{a^3 du}{aa - uu} :: 2cu . \frac{1}{2} aa$. Donc en supposant ici $AM(c) = \frac{1}{4} AB (\frac{1}{4} a)$ comme dans le précédent Corol. 24. L'on y aura $ZzyY . POp :: u . a :: AG . AB$. &c. ainsi que dans ce Corol. 24.

Voilà pour les mouvemens primitivement accelerés en raison des tems, en commençant à zero de vitesse, dans des milieux qui leur résisteroient en raison des quarrés de leurs vitesses effectives. On verra dans un autre Memoire ce qui devroit aussi arriver dans ces milieux à des mouvemens commencés par des vitesses quelconques, & ensuite accelerés de même primitivement en raison des tems écoulés.

OBSERVATIONS ET ANALYSES DU CACHOU.

PAR M. BOULDUC.

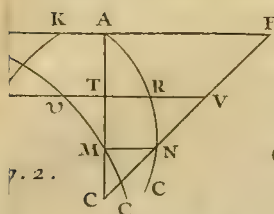
LE Cachou est une drogue qu'on nous apporte des Indes. Nous ne le connoissons que superficiellement, sans avoir pû jusqu'à present sçavoir au vrai ce que c'est. L'on a d'abord voulu, au rapport de quelques Voïageurs, nous persuader, que c'étoit une terre qui se trouvoit au Japon; ce qui a donné lieu à ceux qui ont écrit de la Matiere medicale, de le mettre dans la classe des Terres, sous le nom de *Terra Japonica*, d'où ils on prétendu qu'on la tiroit. Ceux qui depuis l'ont examiné de plus près, & qui en ont écrit, ont avec raison refuté cette opi-

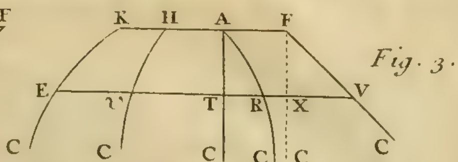
1709. 19. Juin.

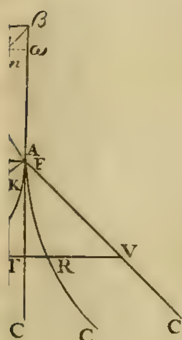
nion. Ils ont prétendu que le Cachou étoit un ſuc épaiſſi d'une ou de pluſieurs plantes. Quelques recherches que j'aïe faite juſqu'à preſent pour en découvrir la verité, je n'ai rien appris de plus que ce qui en eſt écrit dans les Ephemerides d'Allemagne, & ailleurs; car les uns veulent que ce ſoit l'extrait du ſuc d'une ſeule Plante; d'autres, de pluſieurs; & d'autres au contraire, que ce ſoit l'extrait du ſuc du fruit d'un grand arbre du même nom, qui croît en l'Iſle de Sumatra, d'où on l'apporte au Japon. Comme je ne peux rien dire de nouveau ſur la nature du Cachou, que ce que les Modernes en ont écrit, je ne m'étendrai pas davantage ſur ces differentes opinions, je m'en tiendrai à la plus probable.

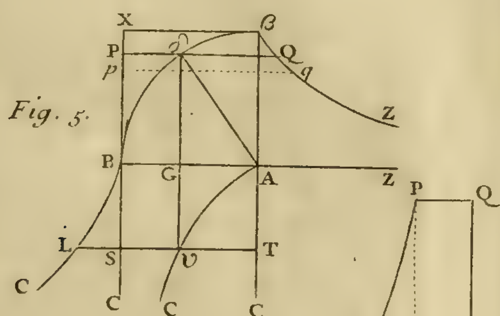
Les experiences & les differentes analyſes que j'ai faites de ce mixte, me confirment que c'eſt un ſuc épaiſſi de vegetal, & de fait ſi c'étoit une terre, comme on l'a voulu dire d'abord, elle feroit comme toutes les autres terres un limon dans l'humidité, au lieu que le Cachou s'y diſſout entierement, à quelques parties groſſieres près, non-ſeulement dans les liqueurs aqueuſes, mais encore dans les ſpiritueuſes, comme je le vais dire.

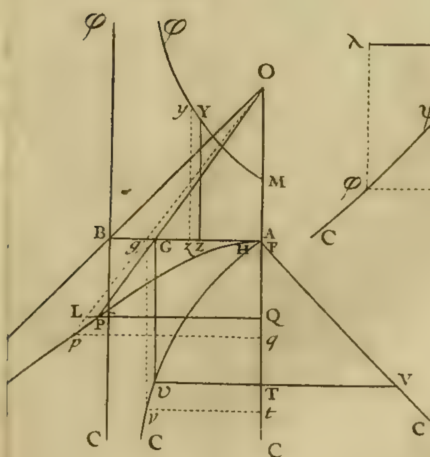
Je ne crois pas, comme M. Lemery le dit dans ſon Traité des drogues, qu'il y ait de deux ſortes de Cachou: Je demeurerai bien d'accord avec lui, que lorſqu'on le briſe en morceaux il s'en trouve de differentes couleurs & de differentes conſiſtences: que les uns ſe trouvent en dedans d'un rouge brun, luiſans & compactes, les autres au contraire ſe trouvent plus legers, d'un rouge pâle comme de couleur de chair; ce dernier Cachou étant gratté avec l'ongle, ſe met aiſément en pouſſiere, & fait dans la bouche un limon très-déſagreable avant de s'y fondre; ce que ne fait point l'autre, qui au contraire s'y étend; & s'y diſſout peu à peu. Je crois plûtôt que cette difference vient ſeulement du défaut de préparation; que dans l'un on a eu ſoin d'en bien dépurer les ſucs dont on le prépare, & d'en ſéparer exactement les réſidences, que nous appellons fécules, ce qu'on a négligé de faire

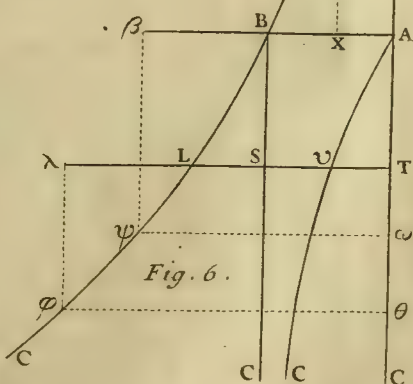

K
A
F
T
R
V
v
M
N
C
C
C
ig. 2.

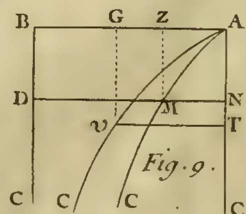

K
H
A
F
Fig. 3.
E
v
T
R
X
V
C
C
C
C
C
C

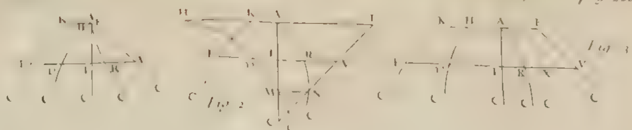

β
ω
n
A
F
K
T
R
V
C
C
C

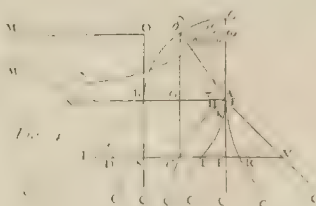

X
β
P
δ
Q
p
q
Fig. 5.
Z
B
G
A
Z
L
S
v
T
C
C
C
C

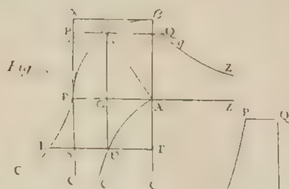

Fig. 8.
φ
φ
O
y
Y
M
B
g
G
z
Z
H
A
F
L
P
Q
p
q
V
v
T
y
t
C
C
C
C

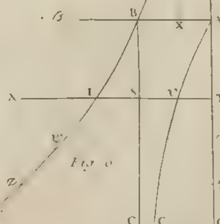

P
Q
β
B
X
A
λ
L
S
v
T
ψ
ω
Fig. 6.
φ
θ
C
C
C
C

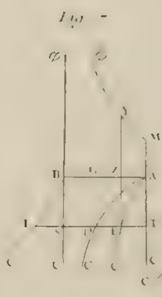

B
G
Z
A
D
M
N
v
T
Fig. 9.
C
C
C
C

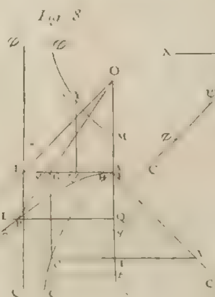


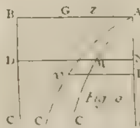



P
Q
Z
A
F
C


P
Q
B
X
A
T
C
C
C


B
A
I
T


Fig. 8
O
M
Q
C


B
G
Z
A
D
M
N
T
C
C
C
C

à l'autre ; cette considération n'est pas de grande conséquence ; car il est très-facile de choisir le meilleur, qui est, comme il le dit fort bien, le plus pesant, le plus luisant, & d'un rouge brun foncé.

Quant aux Analyses que j'en ai faites, je l'ai d'abord distillé à la cornuë au feu de reverbere clos, avec un intermede, pour faciliter l'élévation de ses principes ou des differentes parties qui le composent ; car autrement étant un suc épaissi & par conséquent visqueux, il se gonfleroit seulement, se rarefieroit & casseroit les vaisseaux.

J'en ai tiré comme de semblables matieres, un peu de flegme, un esprit acide, beaucoup d'huile épaisse & brune en couleur, mêlée de quelques goutes d'esprit urineux, ce que j'ai remarqué par les essais ordinaires.

De quatre onces que j'avois mis dans la cornuë, le *caput mortuum* après la distillation ne s'est plus trouvé peser qu'un once, dont j'ai tiré après une forte calcination, douze grains de sel lixiviel.

Par cette distillation il est évident que le Cachou n'est point une terre mais un suc épaissi, on en sera encore plus certain par les differentes dissolutions que j'en vais raporter.

J'ai dissous quatre onces de Cachou bien conditionné dans 24 onces d'eau, à chaleur moderée, il m'a paru d'abord entierement dissous, hors quelque parties grossieres qui se trouvent assez souvent dans ces sortes d'extraits : la dissolution en étoit d'un très-beau rouge foncé & très-claire ; l'aïant laissée reposer & refroidir, pour en séparer les féces, j'ai été surpris de trouver cette dissolution prise en forme de mussilage, d'un rouge couleur de chair, sans liaison, & qui paroissoit comme du bol très-fin, détrempé dans de l'eau ; j'ai donc été obligé d'y ajoûter, sur un feu moderé, une suffisante quantité d'eau, pour en étendre davantage les parties ; de cette maniere il ne s'est plus fait de coagulation ou très-peu, en sorte que j'ai pû filtrer cette dissolution par le papier gris : je l'ai ensuite évaporée à une chaleur très-lente en consi-

ſtence d'extrait auſſi ſec que l'eſt ordinairement le Cachou.

J'ai remarqué que du ſoir au matin cette diſſolution qui n'étoit encore qu'à demi évaporée, s'eſt encore coagulée comme elle l'avoit été la premiere fois; il n'y avoit donc que la grande quantité de liqueur qui tenoit cette diſſolution en flueur; ce qui nous marque que les ſucs dont on fait cet extrait ſont ſans doute très viſqueux & très muſſilagineux, l'on pourroit croire auſſi que ce ſont les ſels eſſentiels qui ſont en abondance dans ce ſuc épaiſſi qui en condenſent ainſi le peu de parties reſineuſes qu'il contient, à meſure que la diſſolution ſe réfroidit.

J'ai retiré de ces 4 onces de Cachou ainſi préparé, deux onces trois dragmes d'extrait très beau & bien ſec.

Je n'ai point trouvé cet extrait different au goût du Cachou ordinaire & tel qu'on nous l'apporte, ſi ce n'eſt que ce premier s'étend plus agréablement ſur la langue, qu'on n'y ſent point ſous la dent de gravier ou autres parties terreſtres, & qu'il eſt ce me ſemble, plus agreable & moins acerbe.

Le reſidu de ces quatre onces de Cachou, que l'eau n'a pû diſſoudre, & qui probablement en étoit la partie reſineuſe & les terreſtreitez, ne s'eſt plus trouvé peſer qu'une once, dont j'ai tiré encore cinq dragmes d'extrait avec l'eſprit de vin rectifié.

Ce dernier extrait eſt beaucoup plus lié & plus onctueux que le premier, mais le goût en eſt bien moins délicat & plus aſpre, ne laiſſant pas ſur la langue une douceur ſi agreable.

Les parties groſſieres de ces 4 onces de Cachou, que l'eau & l'eſprit de vin n'ont pû diſſoudre ſe ſont trouvées peſer deux dragmes, ſans aucune qualité, ſi ce n'eſt une legere impreſſion de ſtipticité.

J'ai encore diſſous quatre onces de Cachou naturel dans ſuffiſante quantité d'eſprit de vin, comme en premier lieu, je l'avois diſſous avec l'eau: j'en ai verſé deſſus, autant & autant de fois qu'il en a fallu pour en tirer tou-

te la teinture par une chaleur moderée & en vaisseaux convenables, la teinture s'en est trouvée plus vive & d'un plus beau rouge que celle que j'avois faite & preparée avec l'eau; mais ce qu'il y a de particulier dans cette dissolution faite avec l'esprit de vin, c'est qu'il ne s'est point fait de coagulation, comme il s'en est fait avec l'eau, quoique je n'y aïe emploïé que peu d'esprit en comparaison de la quantité d'eau que j'avois emploïée au premier extrait. Après en avoir retiré l'esprit de vin par la distillation à la maniere ordinaire, les teintures préalablement bien filtrées & séparées de ce que l'esprit de vin n'a pû dissoudre, j'ai trouvé deux onces six dragmes d'un très-bel extrait, très-luisant, mais qui ne peut se desseicher comme celui fait avec l'eau : aussi est-il plus gras & plus onctueux, moins doux sur la langue, beaucoup plus aspre, & très-desagréable.

Le residu de ces quatres onces de Cachou que l'esprit de vin n'a pû dissoudre, s'est trouvé peser neuf dragmes: ce résidu étoit plus blanchâtre & plus décoloré que ne l'étoit celui dont j'avois tiré l'extrait avec l'eau.

J'ai encore tiré de ce residu avec suffisante quantité d'eau cinq dragmes d'un extrait très-rude & mal lié, de très-peu de goût & desagreable.

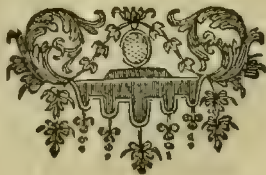
Nous voïons par ces differentes dissolutions que le Cachou se dissout dans l'esprit de vin aussi bien que dans l'eau, même qu'il se dissout dans l'esprit de vin en plus grande quantité, puisque je n'ai tiré par le dissolvant aqueux que deux onces trois dragmes d'extrait, & qu'avec l'esprit de vin j'en ai tiré deux onces six dragmes : aussi ai-je remarqué que ce qui est resté de Cachou après en avoir tiré la teinture avec l'esprit de vin, étoit presque sans qualité, & l'autre au contraire.

Outre ces differentes dissolutions, j'ai calciné dans un creuset & à grand feu une once de Cachou, il s'y est gonflé, a beaucoup boüillonné & s'est enfin réduit en cendres grises, au poids d'une dragme & demie, dont j'ai tiré par l'exiviation quelques grains de sel lexiviel qui a fermenté avec les acides.

Je finis mes obſervations ſur le Cachou, par deux remarques que j'ai faites ; la premiere eſt que le Cachou crud, bien choiſi & bien pur, tel qu'on nous l'apporte, eſt à préferer à toutes les differentes préparations qu'on a coûtume d'en faire ; & ſi quelque préparation lui peut convenir, la plus ſimple eſt la meilleure, qui eſt ſon entiere diſſolution dans l'eau, réduite enſuite en extrait bien ſolide, par le moïen de laquelle on le purifie & on le ſepare de ſes parties terreſtres & indiſſolubles, & de quelques petits graviers qu'il renferme ordinairement & qui fatiguent la dent lorſqu'on le mâche.

La ſeconde eſt, qu'outre les proprietez que ceux qui en ont écrit lui attribuent, il eſt encore ſpecifique & ſouverain pour tous les maux de gorge ; l'uſage eſt d'en laiſſer fondre dans la bouche un morceau de la groſſeur d'un pois, le ſoir en ſe couchant.

Le Cachou ſe diſſout dans l'eau ſans ſe coaguler, ſi l'on joint à ſa diſſolution un peu de ſel de tartre ou de quelqu'autre ſel alkali, par ce moyen les parties reſineuſes qu'il contient s'étendent & ſe joignent aux parties ſalines; mais cette addition eſt inutile, le Cachou renferme aſſez de parties ſalines pour étendre le peu de parties reſineuſes qu'il contient ; il n'y a, pour éviter cette petite coagulation, qu'à couler la diſſolution encore chaude pour en ſeparer les parties terreſtres



COMPARAISON

COMPARAISON
DES OBSERVATIONS
DU BAROMETRE
Faites en differens lieux.

PAR M. MARALDI.

POur parvenir à connoître la cauſe des Phénomenes que l'on remarque par le moïen du Barometre, il ne ſuffit pas d'avoir des obſervations faites dans un ſeul endroit, il eſt néceſſaire d'en faire auſſi en differens païs, comparer ces obſervations enſemble, remarquer ce qu'elles ont de conforme, & les differens qui s'y rencontrent. 1709. 20 Juillet.

Sans un grand nombre de ces obſervations on eſt ſujet à ſe tromper, en expliquant par des cauſes qui ne ſeroient propres qu'à un païs particulier, des phénomenes qui peuvent avoir des cauſes plus generales; & on pourroit conſiderer comme une proprieté de toute la maſſe de l'air, ce qui ne lui convient que dans quelques circonſtances, ou dans une certaine étenduë de païs.

Pluſieurs Sçavans qui ont reconnu l'utilité qu'on pourroit tirer dans la Phyſique, des obſervations du Barometre, ſe ſont appliquez depuis quelque tems à les faire en differens païs. M. le Marquis Salvago m'ayant communiqué celles qu'il avoit faites à Genes depuis trois ans, je les ai comparées avec les nôtres qui ont été faites en même tems à l'Obſervatoire. Dans la comparaiſon de ces obſervations nous y en avons trouvé qui ont quelque choſe de particulier, & que j'ai crû devoir remarquer. Je rapporterai enſuite des experiences ſur la dilatation de l'air faites proche de l'équinoxial, que j'ai eu occaſion d'examiner.

Dans les obſervations que M. le Marquis Salvago a faites à Genes, il s'eſt ſervi d'un Barometre ſimple diviſé en pouces & en lignes du pied de Paris. Ce Barometre eſt ſitué dans un appartement où le mercure ſe tient une ligne plus bas qu'au bord de la mer, ainſi qu'il a été trouvé par l'obſervation; de ſorte que ſi on veut réduire au niveau de la mer les obſervations de Genes, il faudra ajoûter une ligne à chaque hauteur du mercure que je rapporterai dans la ſuite.

Dans le rapport de ces obſervations on ne ſuivra pas l'ordre du temps dans lequel elles ont été faites; mais je commencerai par les plus remarquables.

L'an 1707. à Paris depuis le 15. Novembre juſqu'au 18. le Barometre reſta pendant quatre jours à la hauteur de 28 pouces à une demi-ligne près; le jour ſuivant 19 Novembre il deſcendit à 27 pouces 4 lignes, aïant baiſſé 8 lignes en 24 heures; le jour ſuivant il s'éleva de nouveau de dix lignes, s'étant trouvé le 20 Novembre à 28 pouces 2 lignes; pendant cette variation la conſtitution de l'air n'a point changé, le ciel aïant été tranquille & ſerein.

La même année 1707. à Genes depuis le 15 Novembre juſqu'au 18, le mercure reſta à la hauteur de 28 pouces un peu plus, comme il avoit été les mêmes jours à Paris. Le jour ſuivant 19 Novembre à Genes le vent étant Sud, le Barometre étoit deſcendu à 27 pouces 5 lignes, aïant baiſſé en un jour de 7 lignes à Genes à peu près comme il fit le même jour à Paris. Il ne reſta que ce jour-là dans la même ſituation; mais il s'éleva de nouveau le jour ſuivant à 28 pouces, & le 21 à 28 pouces 2 lignes, comme il étoit arrivé à Paris, le vent étoit tourné au Nord.

La même année 1707 depuis le 20 Novembre juſqu'au 28, le Barometre reſta à Genes & à Paris preſque toûjours à 28. pouces une ligne. Pendant ces 8 jours à Paris le vent a été quelquefois à l'Oüeſt & quelquefois au Nord-Oüeſt; à Genes le vent étoit toûjours Nord.

Le 30 Novembre à Paris le Barometre baiſſa à 27 pouces o lignes, le vent étant Nord-Oüeſt. Le premier de De-

cembre il s'éleva de nouveau à 27 pouces 10 lignes, le vent étant Oüest & le ciel serein; le jour suivant il s'éleva encore de deux lignes aïant été à 28 pouces; de sorte que à Paris depuis le 28 Novembre jusqu'au 30 il baissa en deux jours de plus d'un pouce, & du 30 Novembre au premier Decembre en 24 heures il s'éleva de 10 lignes.

Les mêmes variations à peu près sont aussi arrivées à Genes dans les mêmes jours. Par les observations de M. le Marquis Salvago depuis le 28 Novembre que le Barometre étoit à 28 pouces une ligne, il descendit le 30 à 27 pouces 4 lignes, aïant baissé de 9 lignes en deux jours, le vent étant Nord-Est; le jour suivant il s'éleva de 5 à 6 lignes un peu moins de ce qu'il avoit fait le même jour à Paris.

On voit par ces observations, qu'il arrive en peu de temps des grandes variations dans la hauteur du Barometre tant à Paris qu'à Genes, & qu'il y a une grande conformité dans ces variations qui sont arrivées en même tems en des païs aussi éloignez. On voit aussi qu'elles n'ont pas beaucoup de rapport avec les changemens des vents; car les variations du Barometre qui arriverent du 19 au 20 Novembre, se firent à Paris sans aucun changement remarquable de vent, & si ce jour là le Barometre baissa à Genes par un vent de Sud-Est, & s'éleva par un vent de Nord; dans la variation qui arriva le 28, le Mercure y baissa par le Nord-Est, vent qui pour l'ordinaire le fait monter. De même à Paris le Barometre y baissa par un vent de Nord-Oüest, & s'éleva par un vent d'Oüest par lequel il a coûtume de baisser. Mais quelle rapidité ne faudroit-il pas donner aux vents pour causer en même temps des changemens si prompts en des villes aussi éloignées?

Ce n'est pas seulement dans ces variations subites & qui arrivent fort rarement, que l'on trouve cette conformité; il y a encore le même accord dans les changemens du Barometre qui se font plus lentement, & qui arrivent en ces deux villes pendant toute l'année.

Comme il seroit long de rapporter toutes les observations faites pendant les trois dernieres années dans lesquelles on trouve cet accord, j'ai fait un choix des plus remarquables.

L'an 1706.	*Barometre.*	*Vent.*		*Barom.*	*Vent.*
Le 1 Janvier à Paris	27 0	Sud.	à Genes	27 3	
Le 7 Janvier à Paris	28 0	tranquille.	à Genes	28 0 $\frac{1}{2}$	Nord.

Depuis le 1 Janvier jusqu'au 7 dans l'intervalle de six jours le mercure s'éleva de 12 lignes à Paris, & de 9 & demi à Genes.

Le 13 Fevrier à Paris	27 3	Sud.	à Genes	27 5	Sud-Est.
Le 19 Fevrier à Paris	28 1	tranquille.	à Genes	27 11 $\frac{1}{2}$	Nord.

Depuis le 13 jusqu'au 19 en six jours le Barometre s'est élevé de 10 lignes à Paris, à Genes de six.

Le 31 Octob. à Paris	28 0	tranquille.	à Genes	28 0	tranquille.
Le 4 Novemb. à Paris	26 9	S. E. pluïe.	à Genes	27 1	Sud-Ouest.
Le 20 Nov. à Paris	27 11	Sud.	à Genes	28 1	Nord.

Par les observations du 31 Octobre & du 4 Novembre en 4 jours le Barometre baissa à Paris de 13 lignes; il baissa dans le même tems à Genes de 11 lignes, quoique les vens fussent differens. Le 20 Novembre le Barometre s'étoit élevé à une grande hauteur, étant la même à deux lignes près en ces deux villes, quoique le vent fût Sud à Paris, & Nord à Genes.

Le 10 Dec. à Paris	28 1	tranquille.	à Genes	28 4	Nord.
Le 15 Dec. à Paris	27 1	Ouest.	à Genes	27 5	Sud-Est.

Par ces observations le Barometre baissa en cinq jours environ un pouce à Paris & à Genes.

L'an 1707.

Le 13 Mars à Paris	27 11	Ouest.	à Genes	28 0	Nord.
Le 17 Mars à Paris	27 5	Nord-Est.	à Genes	27 8	Sud-Est.

En quatre jours le Barometre baissa de 6 lignes à Paris, & de 4 à Genes, quoique le vent fût fort different.

Le 20 Juillet à Paris	27 11	S. foible.	à Genes	28 0	Nord foib.
Le 24 Juillet à Paris	27 4 $\frac{1}{2}$	Nord-O.	à Genes	27 6	Sud-Est.

Le 20 Juillet les vens étant opposés à Paris & à Genes, le Barometre s'y trouva presque également élevé; il baissa

enſuite de ſix lignes de part & d'autre en quatre jours, les vens aïant changé & étant encore oppoſez, c'eſt-à-dire, Nord-Oueſt à Paris, & Sud-Eſt à Genes.

Le 22 Dec. à Paris 27 10 Sud-Oueſt. à Genes 28 0 Sud-Eſt.

Le 27 Dec. à Paris 27 2 tranquille. à Genes 27 2 Nord-Eſt.

En cinq jours le Barometre baiſſa de 8 lignes à Paris, & de 10 à Genes.

L'an 1708. *Barometre. Vent.* *Barom. Vent.*

Le 11 Janv. à Paris 26 10 tranq. ſerein. à Genes 27 3 S.O. couv.

Le 17 Janv. à Paris 27 8 Sud-Oueſt. à Genes 27 11 S.E. ſerein.

Le Barometre s'éleva en ſix jours à Paris de 10 lignes, à Genes de 8, les vents étant fort differens en ces deux Villes.

Le 6 Fevr. à Paris 27 $2\frac{3}{4}$ Oueſt. à Genes 27 $6\frac{1}{3}$ Nord.

Le 10 Fevr. à Paris 27 10 tranquille. à Genes 28 0 Nord.

Par ces obſervations le Barometre s'éleva de ſix lignes en ces deux Villes, à Paris le vent aïant été variable, à Genes il étoit toûjours Nord.

Le 20 Mars à Paris 27 $8\frac{3}{4}$ tranq. ſerein. à Genes 27 7 tranquille.

Le 22 Mars à Paris 27 2 Nord. à Genes 27 $3\frac{1}{3}$ Nord.

Le Barometre étant à une hauteur moïenne baiſſa en deux jours de ſix lignes à Paris, de quatre à Genes par un vent de Nord qu'il faiſoit en ces deux villes.

Le 8 May à Paris 27 11. à Genes 28 0 Nord.

Le 17 May à Paris 27 4 Sud-Oueſt. à Genes 27 $5\frac{3}{4}$ Sud-Eſt.

Le 19 Nov. à Paris 28 $2\frac{1}{2}$ tranquille. à Genes 28 2 tranquille.

Le 23 Nov. à Paris 27 6 Nord-Oueſt. Le 24 à G. 27 5 pluïe.

Le 24 Nov. à Paris 27 $11\frac{3}{4}$ N. Oueſt. Le 25 à G. 27 10 Nord.

Le 19 le Barometre étant à une grande hauteur, baiſſa enſuite juſqu'au 23, & du 23 au 24 il s'éleva de ſix lignes en un jour. Mais à Genes il ne fit cette variation qu'un jour aprés qu'elle arriva à Paris.

Le 10 Dec. à Paris 27 $11\frac{1}{2}$ tranquille. à Genes 27 11 Nord.

Le 15 Dec. à Paris 27 1 pluïe. à Genes 27 5 pluïe.

Par toutes ces obſervations & par beaucoup d'autres que je ne rapporte point, il eſt conſtant qu'il y a un grand accord dans les variations qui arrivent en même-tems au

Barometre à Paris & à Genes, soit que ces changemens soient prompts & subits comme ceux qui ont été rapportez les premiers, soit que ces changemens se fassent plus lentement comme ces derniers.

Cette correspondance des changemens du Barometre paroît n'avoir pas beaucoup de rapport avec la constitution de l'air, ni avec les vents qui regnent en même tems en differens païs; car le mercure s'éleve à Genes lorsqu'il s'éleve à Paris, & il baisse de même, soit qu'en ces deux Villes il y ait la même constitution d'air ou qu'il y regne le même vent, ce qui est fort rare; soit que l'un & l'autre soient differens. Ce seroit une chose digne d'être examinée par des observations faites en des lieux fort éloignez, jusqu'à quelle distance se trouve une telle conformité des variations du Barometre.

Cette longue suite d'observations de Paris & de Genes comparées ensemble, fait connoître que pour trouver la hauteur des Montagnes par les experiences du Barometre faites en même-tems en differens endroits de la maniere qui a été proposée dans les Memoires de l'Academie, il faut se servir de celles où le mercure se tient dans le Barometre à une hauteur moïenne, & préferer celles-cy aux autres dans lesquelles le mercure se trouve proche des plus grandes & des plus petites élevations, parce que dans les hauteurs moïennes du mercure les differences entre differens païs sont plus uniformes.

Par la comparaison des observations faites avec ce choix, on trouve entre Paris & Genes une difference de trois lignes de hauteur de mercure dont il se tient plus élevé à Genes qu'à Paris; & puisque dans les observations de Genes le Barometre est une ligne plus bas qu'il ne seroit au bord de la mer, il résulte une difference de 4 lignes de mercure entre les observations de Paris & celles qui auroient été faites à Genes au bord de la mer. Cette difference entre le niveau de la mer de Genes & Paris, s'accorde avec celle qui a été concluë par les observations de Paris & de Collioure, rapportées dans les Memoires

de l'Academie du mois de Novembre 1703.

Il a été remarqué dans ce Memoire, que les differences qui arrivent au Barometre dans un même lieu entre la plus grande & la plus petite élevation, ſont plus grandes dans les païs Septentrionaux que dans les Meridionaux où ces differences vont en diminuant; de ſorte que vers l'Equinoxial elles ſe réduiſent à peu de choſe.

Pluſieurs obſervations que nous avons reçûës depuis ce tems-là de divers endroits, ſont conformes à cette remarque. A Upminſter en Angleterre qui eſt plus Septentrional que Paris, les variations du Barometre y ſont auſſi plus grandes qu'à Paris; celles de Paris ſont plus grandes qu'à Genes, & les variations obſervées à Genes ſont auſſi plus grandes que celles qui réſultent des obſervations du P. Laval faites l'année derniere à Marſeille qui eſt plus meridionale que Genes.

Cette remarque qui eſt confirmée par un grand nombre d'obſervations faites en même-tems en differens endroits, ne ſe verifie pas à l'égard des obſervations faites par M. Scheuchzer à Zuric ces trois dernieres années; car quoique Zuric ſoit beaucoup plus Septentrional que Genes, les variations ont été obſervées un peu plus petites à Zuric, bien loin d'y avoir été plus grandes qu'à Genes. L'an 1706 la difference entre la plus grande & la plus petite élevation du Barometre, a été à Zuric de 10 lignes. A Genes la même année cette difference fut d'un pouce & une ligne. L'an 1707 à Zuric elle réſulte de 11 lignes, à Genes elle fut d'un pouce. L'an 1708 par les obſervations faites à Zuric avec le Barometre droit que je crois préferable au Barometre incliné, la variation ſe trouva de 10 lignes, à Genes un pouce, à Marſeille de 10 lignes & demi comme à Zuric.

Il faut remarquer que les lieux des obſervations où cette régle ſe trouve, ſont ſituez à des hauteurs peu differentes les unes des autres, & ſont peu élevez ſur la ſurface de la mer, ainſi qu'il paroît par la difference des hauteurs du Barometre qui ſe trouve entre ces obſervations;

& à l'égard de celles qui ont été faites proche le niveau de la mer. Mais il n'en eſt pas de même des obſervations de Zuric dont les obſervations ne ſont pas conformes à cette régle. Car par les obſervations faites pendant toute l'année 1708 à Genes & à Zuric & comparées enſemble, on trouve entre le niveau de la mer & Zuric une difference d'un pouce & 8 lignes de mercure; ce qui fait voir que le lieu des obſervations de Zuric eſt fort élevé au deſſus des lieux des autres obſervations, & encore plus ſur le niveau de la mer.

Cette variation du Barometre moindre dans les lieux élevez que dans les lieux bas, eſt auſſi confirmée par des obſervations que le P. Laval Jeſuite envoïa l'année derniere à l'Academie; car ayant fait pendant dix jours de ſuite les obſervations du Barometre ſur la montagne du S. Pilon qui eſt plus Septentrionale de deux minutes de degré que Marſeille, & qui eſt élevée ſur le niveau de la mer d'environ 480 toiſes; les aïant comparées avec celles qu'on faiſoit en même-tems à l'Obſervatoire de Marſeille, il trouva qu'à Marſeille le Barometre y varia de deux lignes & trois quarts, lorſqu'il ne varia qu'une ligne & trois quarts au S. Pilon.

Le P. Laval attribuë cette difference, partie à la chaleur qui eſt moins grande dans les lieux élevez que dans les lieux bas, partie à la nature de l'air qui dans les lieux élevez étant plus rarefié, eſt moins ſujet aux alterations qui contribuent à ſa peſanteur ou à ſa legereté.

On pourroit ſuppoſer que c'eſt quelque matiere étherogene répanduë dans l'air, qui cauſe une partie de ces variations & qui fait un plus grand effet dans l'air inferieur que dans le ſuperieur.

Ayant comparé enſemble les experiences du Barometre faites juſqu'à preſent en diverſes parties de la Terre pendant toute l'année, j'ai reconnu que les variations du Barometre obſervées à Zuric, approchent beaucoup plus des variations obſervées proche de l'Equinoxial, que ne font les autres faites juſqu'à preſent en Europe.

J'ai

J'ai examiné par cette occaſion diverſes experiences faites près de l'Equinoxial ſur la dilatation de l'air, pour voir ſi l'air de ce climat en ſe dilatant ſuivoit la raiſon reciproque des poids dont il eſt déchargé, ſuivant la regle de M. Mariote.

Ces experiences ont été faites à Malaque par le P. de Beze Jeſuite, durant un ſejour de ſept mois qu'il fit dans la même ville, qui quoique ſituée à deux degrez de Latitude Septentrionale, joüit, ſuivant le rapport du même Pere, d'un air aſſez temperé pour le climat, la chaleur y étant moderée & preſque toûjours la même.

Ces experiences ſont rapportées parmi les Obſervations Phyſiques & Mathematiques imprimées l'an *1692* avec des Notes du P. Goüie en ces termes :

Un habile Phyſicien me dit avant mon départ de France, qu'on l'avoit aſſûré qu'il ne ſe trouvoit pas de difference ſenſible au Barometre dans tous les lieux qui ſont ſituez entre les Tropiques, pourvû que l'obſervation ſe fit dans un lieu de niveau de la mer. Je voulus lorſque je fus arrivé aux Indes m'aſſurer moi-même ſi ce qu'on lui avoit dit étoit vrai; & comme je n'avois pas de Barometre monté, je me ſervis d'un tube de verre long de *29* pouces, ſcellé hermetiquement, & exactement diviſé en pouces & en lignes, avec lequel je fis l'experience de Toricelli en divers lieux entre les Tropiques; mais j'ay partout trouvé une difference aſſez ſenſible dans l'élevation du mercure, non-ſeulement par rapport aux differens endroits où j'ai obſervé, mais ſouvent auſſi dans un même lieu où le vif-argent étoit plus ou moins élevé ſuivant les diverſes diſpoſitions de l'air; quoiqu'à dire le vrai cette difference n'égale pas celle qu'on trouve hors des Tropiques, puiſque ſuivant ce que j'en ai pû obſerver, elle n'excede pas *5* ou *6* lignes. «

« J'ai déja envoïé en France les experiences que j'avois faites ſur ce ſujet à Siam & à Pondicheri. Voici celles que nous avons faites à Malaque & à Batavia. «

« Aïant choiſi à Malaque un jour où l'air paroiſſoit fort

„ pur & le ciel n'étoit chargé d'aucuns nuages, pour faire
„ l'experience : nous trouvâmes que le mercure du tube se
„ soûtenoit constamment à la hauteur de 26 pouces 6 lignes
„ au-dessus de la surface de celui qui étoit dans le bassin.

„ La chaleur étoit pour lors assez grande pour le climat,
„ & le Thermometre étoit à 69 degrez.

„ Comme j'ai remarqué par plusieurs experiences, que le
„ mercure se soûtenoit ordinairement à une plus grande
„ élevation lorsque la chaleur étoit moins grande, & qu'il
„ descendoit au contraire lorsque la chaleur augmentoit,
„ quoique le Ciel fût également serein & découvert, j'ai
„ crû qu'il seroit bon de marquer en faisant l'observation du
„ Barometre, les degrez du Thermometre, quoiqu'il n'y
„ ait pas une exacte proportion entre l'un & l'autre.

„ Voulant ensuite éprouver la force élastique de l'air,
„ on a laissé trois pouces d'air en haut du tube, & l'aïant
„ renversé dans le vif-argent où il enfonçoit de 7 lignes,
„ celui du tube est resté à la hauteur de 20 pouces 7 lignes
„ au-dessus de la superficie de l'autre ; & l'air dilaté a occu-
„ pé 7 pouces 10 lignes.

„ Aïant laissé après cela 7 pouces 6 lignes d'air, le mer-
„ cure est resté à la hauteur de 16 pouces, & l'air dilaté oc-
„ cupoit 12 pouces 5 lignes.

En considerant ces observations, il est aisé de voir qu'elles ne suivent pas la regle de M. Mariotte ; car dans la premiere experience 7 pouces 10 lignes d'air dilaté après le renversement du tuyau, à 3 pouces d'air naturel avant le renversement, n'a pas la même proportion que 26 pouces 6 lignes de mercure dans le vuide, à 5 pouces 5 lignes excès de 26 pouces 6 lignes à 20 pouces 7 lignes, hauteur qu'avoit le mercure avec l'air dilaté, comme il devoit être suivant la regle. Il en est de même de la seconde experience ; mais dans ces deux experiences la proportion de l'air dilaté à l'air naturel est moindre que l'atmosphere, à la difference entre la hauteur du mercure dans le vuide & la hauteur du mercure avec l'air dilaté

Aïant calculé ces deux experiences pour connoître

quelle devoit être la dilatation de l'air par la regle ordinaire; dans la premiere où l'air naturel étoit de trois pouces, après le renverſement l'air dilaté devoit occuper ſuivant la regle 9 pouces 11 lignes; mais par l'experience il n'occupoit que 7 pouces 10 lignes; la difference entre l'experience & la regle eſt deux pouces & une ligne, dont l'eſpace occupé par l'air dilaté étoit moindre.

Dans la ſeconde experience, 7 pouces & ſix lignes d'air naturel après le renverſement devoit ſe dilater & remplir ſuivant la regle l'eſpace de 15 pouces 1 ligne; mais par l'obſervation il n'en occupoit que 12 pouces & 5 lignes; la difference entre l'obſervation & la regle eſt deux pouces 8 lignes, dont l'obſervation eſt moindre, & par conſéquent ſuivant ces experiences l'air de Malaque ne ſuit pas la regle & ſe dilate moins que celui de l'Europe.

Outre ces experiences faites dans un tems que l'air étoit pur & ſerein, le P. de Beze en fit encore d'autres pendant que le Ciel étoit moins pur & fort couvert des nuages, & que la hauteur du mercure dans le vuide étoit plus grande que dans les obſervations préceden-tes.

Voici comment elles ſont rapportées à la ſuite des premieres.

« A la fin de la Lune le Ciel étant fort couvert, & l'air « moins pur qu'à l'ordinaire, je réïterai ces experiences « dans le même lieu, le Thermometre étoit à 63 degrez.

« A'iant rempli le tube de mercure & l'ayant renverſé « dans celui du baſſin où il enfonçoit d'un pouce, il ſe ſoûtint « à la hauteur de 26 pouces 10 lignes, & un quart au-deſſus « de la ſurface du vif-argent.

« A'iant mis enſuite du mercure dans le tube juſqu'à la « hauteur de 26 pouces, afin qu'il reſtât 3 pouces d'air, « l'a'iant plongé dans le mercure, l'air ſe dilatant a occupé « 7 pouces 5 lignes & demi, & le vif-argent 20 pouces 6 li-« gnes & demi.

« A'iant laiſſé 6 pouces d'air le mercure s'eſt ſoutenu à la « hauteur de 17 pouces 2 lignes & un quart, & l'air dilaté

„ a rempli le reſte de l'eſpace 10 pouces 9 lignes & trois
„ quarts.
„ Aïant laiſſé 9 pouces d'air le mercure n'a occupé que
„ 14 pouces 6 lignes, & l'air dilaté 13 pouces 6 lignes. Ces
„ experiences ont été faites dans un lieu élevé de 15 ou 20
„ pieds perpendiculaires au-deſſus du niveau de la mer.

Par la comparaiſon que nous avons faite de ces obſervations avec la regle, on trouve entre l'une & l'autre les mêmes differences que dans les obſervations précedentes; car les trois pouces d'air naturel après le renverſement s'eſt dilaté de ſorte, qu'il occupoit ſeulement 7 pouces 5 lignes & demi, au lieu que par la regle il devoit contenir un eſpace de 9 pouces 6 lignes & demi. La difference entre l'obſervation & la regle eſt deux pouces une ligne & demi, à une demi-ligne près de ce qui s'eſt trouvé dans la premiere des experiences précedentes; ce qui marque la préciſion des unes & des autres.

Dans la ſeconde experience, ſix pouces d'air naturel enfermé dans le tuyau, après le renverſement remplit l'eſpace de 10 pouces 9 lignes & trois quarts; cet eſpace par le calcul fondé ſur la regle, devoit être 13 pouces 3 lignes. La difference eſt deux pouces 5 lignes & trois quarts, dont la dilatation ſe trouve moindre par l'obſervation que par la regle.

Dans la derniere experience, 9 pouces d'air naturel enfermé dans le tuyau s'étant dilaté par le renverſement, occupoit 13 pouces 6 lignes, & par le calcul fondé ſur la regle, il devoit remplir 16 pouces 1 ligne & un quart. La difference eſt deux pouces ſept lignes & un quart, dont l'experience donne moins que la regle.

Il eſt donc conſtant par toutes les experiences du P. de Beze, que la dilatation de l'air qui en réſulte, eſt beaucoup plus petite que celle de nôtre air, & qu'elle ne ſuit pas la proportion qu'on trouve par les experiences d'Europe.

On pourroit ſuppoſer que ce phénomene vient de la conſtitution particuliere de l'air de Malaque, qui étant

fort rarefié par la chaleur du climat, eſt enſuite moins ſuſceptible d'une auſſi grande dilatation que le nôtre; mais autant qu'on en peut juger par des experiences faites en Europe, cette ſeule explication n'eſt pas ſuffiſante pour rendre raiſon de la grande difference qui ſe trouve entre la dilatation de nôtre air & celui de Malaque, quand même on ſuppoſeroit que la chaleur qui cauſeroit cette rarefaction eſt auſſi grande que celle de l'eau boüillante. Voici les obſervations que nous avons faites.

J'ai pris un tuyau long de 38 pouces dans lequel j'ai mis du mercure juſqu'à la hauteur de 35 pouces, de ſorte qu'il reſtoit 3 pouces d'air; j'ai plongé tout ce tuyau dans l'eau boüillante pour faire rarefier l'air qui y étoit contenu; j'ay bouché enſuite avec le doigt l'ouverture, & aïant retiré le tuïau de l'eau, je l'ai renverſé dans le vif-argent; enſorte qu'il y enfonçoit d'un pouce. Immédiatement après le renverſement le mercure ſe tenoit à peu de lignes près où il ſe tient par la ſeule dilatation ſans l'avoir rarefié. Mais on voïoit monter le mercure dans le tuïau, à meſure que l'air ſe condenſoit en ſe refroidiſſant; & lorſqu'il a été entierement refroidi, le mercure eſt monté un pouce & deux lignes plus qu'il n'étoit immediatement aprês le renverſement, & plus que ne demandoit la regle de M. Mariotte, & par conſéquent l'air rarefié étoit moins dilaté que par la regle de la même quantité d'un pouce & deux lignes. Nous avons trouvé par les experiences de Malaque que les trois pouces d'air ſe ſont dilatez deux pouces & une ligne moins que par la regle; l'air de Malaque ſe dilate donc moins que nôtre air rarefié par la chaleur de l'eau boüillante.

J'ai fait la même experience ſur ſix pouces, enſuite ſur 9 pouces d'air, & j'ai toûjours trouvé que nôtre air rarefié par la chaleur, ſe dilatoit beaucoup moins que l'air de Malaque, & que la difference qui s'y trouve à l'égard de la regle, eſt le double plus grande dans l'air de Malaque que dans le nôtre rarefié. D'où l'on peut inferer que cettte moindre dilatation de l'air de Malaque ne vient

pas ſeulement des grandes chaleurs du climat, mais de ſa nature moins propre à ſe dilater que le nôtre.

Puiſque l'air ſe dilate autrement à Malaque qu'il ne fait en France à pareille hauteur à peu près de la ſurface de la mer, & qu'en France à des grandes hauteurs la dilatation ſe trouve differente de celle qui arrive à l'air inferieur, ainſi qu'il réſulte des obſervations faites ſur les Montagnes d'Auvergne & du Rouſſillon, on peut inferer, que toute la maſſe de l'air n'a pas la proprieté de ſe dilater ſuivant la raiſon des poids. On peut auſſi inferer de ces differentes dilatations, que l'air eſt eſtherogene dans ces differentes parties, & qu'ainſi on doit être circonſpect à fonder un ſyſtême general ſur des experiences particulieres, quelque ſûres & quelque nombreuſes que ſoient ces experiences.

Il faut remarquer qu'en Cayenne, dont le parallele n'eſt éloigné de celui de Malaque que de deux degrez & demi vers le Septentrion, les réfractions des Aſtres ont été trouvées plus petites qu'en Europe. Ce ſeroit une choſe à examiner, s'il ſe trouve quelque rapport entre la maniere dont l'air ſe dilate ſous divers climats, & les differentes réfractions des objets celeſtes qu'on obſerve à des hauteurs égales ſur la ſurface de la mer.



DU MOUVEMENT APPARENT DES PLANETES *à l'égard de la Terre.*

PAR M. CASSINI.

L'Aſtronomie ancienne avoit trouvé des méthodes pour repreſenter aſſez exactement les longitudes apparentes des Planetes & leurs latitudes. Elle les donnoit calculées jour par jour dans les Ephemerides ordinaires ; mais elle n'avoit pas trouvé la maniere de repreſenter la proportion de la veritable diſtance de diverſes Planetes à la Terre. Les premiers Aſtronomes ſe ſervoient de certaines hypotêſes que l'on a depuis trouvé en partie évidemment fauſſes, d'autant qu'ils plaçoient les Planetes ſur des orbes à diverſes diſtances de la Terre ſans qu'aucune des Planetes ſuperieures pût jamais approcher de la Terre autant que ſon inferieure. 1709. 7. Aouſt.

Ils voïoient qu'une même Planete tantôt augmentoit, tantôt diminuoit en grandeur apparente, ce qu'ils jugeoient dépendre uniquement de ſa diverſe diſtance à l'égard de la Terre, & ils inventerent des hypothêſes par leſquelles ils repreſentoient la proportion de la variation de la diſtance de la même Planete à la Terre en divers tems.

Ils avoient diſtingué les mouvemens de la même Planete en periodiques & ſynodiques. Les mouvemens Periodiques des Planetes ſuperieures étoient repreſentez par un cercle Excentrique à la Terre, ſur la circonference duquel on mettoit le centre d'un Epicycle mobile du mouvement Periodique ; de ſorte que le centre de l'Epicycle de Saturne, par exemple, parcouroit ſon

Excentrique en trente ans, celui de Jupiter en douze, celui de Mars en près de deux ans, pendant que la Planette parcouroit la circonference de l'Epicycle par un mouvement Synodique beaucoup plus vite. Ainsi la Planete s'aprochoit & s'éloignoit de la Terre par la composition de ces deux mouvemens. Dans la proportion des distances de diverses Planetes, ils mettoient la Lune la plus proche de la Terre, & déterminoient sa plus grande distance de la Terre par l'observation de sa parallaxe qui est alors un peu moindre d'un degré.

Aïant déterminé par cette maniere la plus grande distance de la Lune à la Terre & consideré que les autres Planetes n'avoient pas une si grande parallaxe, & que leur mouvement étoit plus lent que celui de la Lune, ils jugerent que plus le mouvement d'une Planette est lent à l'égard des autres, & plus elle étoit éloignée de la Terre, & supposerent que la plus petite distance de la Planete superieure, n'excedoit que très-peu la plus grande distance de son inferieure; aïant calculé dans la même Planete la proportion de la plus petite distance à la plus grande qui résultoit de la composition du mouvement Periodique & Synodique, ils donnoient à l'orbe de la Planete toute l'épaisseur que cette composition demandoit. Par cette maniere ils placerent Mercure immediatement au-dessus de la Lune, parce que son mouvement propre leur parut plus vite que celui des autres Planetes : ils placerent de même Venus au-dessus de Mercure.

Ils observerent que Mercure & Venus avoient le centre de leur Epicycle sur une ligne, qui étant tirée du centre de la Terre passoit aussi près du centre du Soleil d'où Mercure pouvoit s'éloigner de part & d'autre de près de 28 degrez & Venus de près de 48.

Ils observerent aussi que Mars, Jupiter & Saturne s'éloignoient du Soleil jusqu'à l'opposition; & Ptolemée ne trouva rien de plus raisonnable que de supposer l'orbe du Soleil placé au milieu entre les Planettes qui ne s'en peuvent éloigner qu'à certaine distance, comme sont Mercure

&

& Venus, & celles qui peuvent s'en éloigner à toute forte de distance qui furent appellées les Planetes superieures. Ils donnoient à Mercure & à Venus un mouvement apparent Periodique sur leur excentrique, peu different du mouvement apparent du Soleil, pendant que ces Planetes parcouroient leurs Epicycles par des mouvemens fort differens entre eux.

Copernic supposa le Soleil fixe & substitua au mouvement annuel du Soleil le mouvement annuel de la Terre. Il disposa aussi autour du Soleil les Excentriques des autres Planetes sur la circonference desquels il faisoit mouvoir le centre d'un Epicyle dont la Planete parcouroit la circonference par un mouvement Periodique. Cet Epicycle avoit pour diametre l'Excentricité que Ptolemée attribuoit aux cecles des Planetes.

Kepler réduisit cette hypothêse à une plus grande simplicité; car il substitua aux Excentriques & aux Epicycles, que Copernic avoit attribué aux Planetes, des Ellipses qui representent à peu près les mêmes apparences.

Il plaça donc de même que Copernic le Soleil au centre du Monde, & l'orbe de la Terre entre ceux de Venus & de Mars; & parce qu'on ne voïoit point que la Terre faisant un si grand circuit autour du Soleil; causât aucune parallaxe sensible aux Etoiles fixes, les Astronomes furent obligez de supposer que les Etoiles fixes sont éloignées du Soleil à une distance immense, & qu'à son égard la distance du Soleil à la Terre, n'est que comme un point.

Tychobrahé trouva cette distance des Etoiles fixes au Soleil peu vrai semblable, & supposant de même que Copernic, que les cinq Planetes tournent autour du Soleil, il aima mieux attribuer au Soleil le mouvement annuel autour de la Terre comme les Anciens; de sorte que le Soleil & la Lune tournassent autour de la Terre, qu'il supposa immobile.

Dans cette hypothêse, Saturne, Jupiter, Mars, Venus & Mercure seroient des Satellites du Soleil, au nombre

de cinq, de même que ceux que l'on a découvert depuis autour de Saturne.

Pour ce qui eſt du mouvement des Planetes ſur leur cercle, Ptolemée avoit donné au cercle du Soleil une excentricité ſuffiſante pour repreſenter toute l'inégalité apparente de ſon mouvement annuel qu'il ſuppoſoit égal ſur la circonference de l'Excentrique de 59′ 8″ & quelques tierces par jour.

A l'égard des Planetes ſuperieures, il ſuppoſoit que le mouvement de leur Epicycle ſur la circonference de l'Excentrique étoit inégal plus lent vers l'Apogée que vers le Perigée. Il le réduiſoit à l'égalité en rapportant le mouvement du centre de l'Epicycle à un point pris dans la ligne de ſon Apogée éloigné du centre de la Terre du double de l'excentricité. Car s'il avoit placé le centre de l'Excentrique auſſi éloigné de la Terre que le centre du moïen mouvement, la variation de la grandeur des Epicycles vûë de la Terre auroit été évidemment trop grande; ainſi l'excentricité du moïen mouvement étoit diviſée en deux parties égales par le centre de l'excentrique.

Cette diviſion de l'excentricité du moïen mouvement en deux parties égales, a été imitée par pluſieurs Aſtronomes modernes dans la Theorie du Soleil, pour repreſenter la variation du diametre apparent du Soleil plus petite de la moitié que celle qui répondroit à toute l'Excentricité.

Ainſi le ſeul cercle annuel du Soleil ſuffit pour faire la fonction des Excentriques de Venus & de Mercure & des Epicycles de Saturne, de Jupiter & de Mars. Comme l'on ſçavoit déja la proportion des Excentriques aux Epicycles de ces cinq Planetes, requiſe pour repreſenter les inégalitez apparentes de leur mouvement, on connut auſſi la proportion des cercles de ces cinq Planetes au cercle du mouvement annuel du Soleil qui étoit ignoré auparavant.

Aïant diſpoſé ces cinq cercles autour du Soleil, ceux

des trois Planetes ſuperieures comprenoient la Terre qui reſtoit ſituée entre le cercle de Venus & celui de Mars. Le ſyſtême de Thychobrahé reçut auſſi une plus grande perfection de quelques Aſtronomes, qui à l'imitation de Kepler aſſignerent à ces Planetes des excentricitez à l'égard du Soleil qu'on leur avoit attribué à l'égard de la Terre.

L'on peut donc dans les Syſtêmes de Copernic & de Tycho ainſi perfectionnez, trouver à chaque tems donné la proportion de leur diſtance à la Terre & de toutes les cinq Planetes entre elles. Mais comme nous ſommes dans la Terre nous avons beſoin de conſiderer principalement à chaque tems donné, les diſtances des Planetes à l'égard de la Terre; car par le moïen de ces diſtances on peut trouver le tems les plus propres pour les obſervations & principalement pour chercher leur parallaxe.

Par les eſſais que l'on a faits juſques à preſent dans l'Academie, on a trouvé qu'il n'y a que les parallaxes de Venus & de Mars qui ſoient évidemment ſenſibles lorſque ces deux Planetes ſont plus proches de la Terre; mais alors Venus eſt ordinairement cachée dans les raïons du Soleil. Il eſt vrai qu'on la peut diſtinguer très-ſouvent à la Lunete quand elle eſt cachée à la vûë ſimple, & nous avons auſſi par ce moïen tâché de déterminer ſa parallaxe, la comparant au Soleil & aux Etoiles fixes éloignées; car il eſt très-difficile de la comparer par la Lunete aux Etoiles qui en ſont fort proche, que l'on ne peut pas appercevoir à la preſence du Soleil: Pour ce qui eſt de Mars, ſa moindre diſtance de la Terre qui arrive dans ſon oppoſition avec le Soleil, & particulierement lorſqu'il eſt auſſi dans ſon Perihelie, eſt viſible pendant la plus grande partie de la nuit avec les plus petites Etoiles. On en trouve ſouvent de celles qui en ſont très-proches, avec leſquelles il peut être comparé aiſément à diverſes heures de la même nuit fort éloignées entre-elles. Nous en avons donné pluſieurs exemples dans les Livres des Voïages de l'Academie, & nous avons emploïé la même Méthode

dans le Livre de la Comete de 1680, l'aïant jugé la plus propre pour la recherche des parallaxes des objets celestes qui sont plus éloignez que la Lune. Or les parallaxes de Planetes en chaque tems sont en raison reciproque de leurs distances; ainsi la proportion des distances étant donnée, on a la proportion des parallaxes, & reciproquement; par exemple l'an 1672, la distance de Mars à la Terre, & la distance du Soleil à la Terre étoit comme 2 à 5. La Parallaxe de Mars fut trouvée de 25. secondes, d'où l'on conclut la parallaxe du Soleil de 10 secondes qu'il seroit très difficiles de déterminer immédiatement.

La proportion des diametres apparens d'une même Planete en divers tems, se trouve aussi par la proportion des distances qui lui est réciproque. C'est pourquoi si l'on a mesuré le diametre apparent d'une Planete lorsqu'elle est la plus proche de la Terre où elle paroît plus grande, on l'aura aussi dans sa plus grande distance, quand il seroit difficile de le mesurer exactement à cause de sa petitesse apparente.

La description des traces des mouvemens particuliers des Planetes, tant dans l'hypothese de Tycho que dans celle de Copernic réduites à leur perfection, sert donc à trouver les tems plus propres pour observer leur parallaxe; & c'est principalement dans ce dessein que nous avons representé en diverses Planches les mouvemens de Saturne, de Jupiter, de Mars, du Soleil, de Venus & de Mercure à l'égard de la Terre.

Dans les Planetes de Mercure, de Venus & de Mars, dont nous avons réduit les traces dans la même proportion que l'orbe annuel, on peut aussi déterminer à chaque tems les phases de ces Planetes, par exemple lorsque Venus & Mercure doivent paroître comme la Lune dans ses quartiers. Car alors une ligne droite tirée de la Terre par une de ces Planetes, doit faire un angle droit avec la ligne tirée du centre de ces Planetes au Soleil & de la maniere que l'on observe, qu'il y a quelque correspon-

dance entre le changement des phaſes de la Lune & celle des marées, l'on pourroit eſſaïer s'il n'y en a point quelqu'une qui réponde aux diverſes phaſes de ces Planetes.

L'Aſtronomie ancienne qui n'avoit pas la maniere de déterminer ces phaſes ni la proportion des diſtances d'une Planete à l'égard de l'autre, ne pouvoit pas entrer dans cette diſcuſſion; ce qui ſuffit pour faire voir que ceux qui leur ont attribué des effets ſur la Terre, n'avoient pas de principes neceſſaires pour juger de cette diverſité.

Pour ce qui eſt de Jupiter & de Saturne, la diverſité des phaſes n'eſt pas ſenſible à la Terre, parce que les lignes droites tirées du centre du Soleil & du centre de la Terre au centre de ces Planetes, ne font jamais un angle aſſez grand pour pouvoir diſtinguer avec évidence l'hemiſphere vû du Soleil de celui qui eſt vû en même tems de la Terre, la difference entre la Phaſe & le cercle entier étant meſurée par le ſinus verſe de cet angle qui eſt peu ſenſible à cette diſtance.

A l'égard de la figure décrite par le mouvement des Planetes autour de la Terre. Celle du mouvement annuel du Soleil paroît circulaire. Elle eſt veritablement Elliptique; mais dans cette grandeur on ne la diſtingue pas ſenſiblement du cercle qui circonſcrit l'Ellipſe. Elle a deux foïers ſur la ligne de l'Apogée, qui dans ce ſiecle eſt dirigée au 8. degré du Cancer. Un de ces foïers qui eſt celui du mouvement apparent, concourt avec le centre de la Terre repreſenté au centre de la figure éloigné du centre de l'Ellipſe de la dix-ſept milliéme partie de ſon demi-diametre; l'autre foïer eſt le centre du moïen mouvement éloigné du centre de la Terre du double de l'excentricité ſimple.

Cette excentricité ſimple ſuffit pour repreſenter la variation annuelle du diametre apparent du Soleil, qui n'eſt que d'une minute & 5 ou 6 ſecondes à l'égard du diametre qui eſt d'environ 32 minutes; mais l'excentricité double eſt néceſſaire pour repreſenter la variation apparente du mouvement journalier du Soleil, qui dans l'Apogée eſt

de 57′, & dans le Perigée de 61′; la difference est de 4 minutes, qui a une proportion au mouvement journalier moïen double de celle qui convient à la proportion de la variation du diametre apparent.

Pour ce qui est des lignes des mouvemens des cinq Planetes autour de la Terre, ce sont des Spirales qui résultent de la composition du mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, & du mouvement de la Planete sur son Ellipse particuliere, dont l'excentricité qui est diverse en ces differentes Planetes est reglée de la même maniere que nous avons dit celle du Soleil, & dont les Aphelies sont dirigez du Soleil à divers degrez du Zodiaque. La proportion du diametre de Ellipses à celui de l'Ellipse du Soleil dans l'Astronomie moderne est déterminée dans la Theorie de chacune de ces Planetes.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA premiere Planche represente le mouvement apparent de Saturne, de Jupiter, de Mars & du Soleil à l'égard de la Terre qui est au centre de la Figure. La proportion de la distance de ces trois Planetes entr'elles & à l'égard de la Terre y est observée.

La Spirale superieure represente le mouvement apparent de Saturne depuis le 1 Janvier 1708 jusqu'au 1 Janvier 1737.

La seconde Spirale represente le mouvement apparent de Jupiter depuis l'année 1708 jusqu'à l'année 1720, & la Spirale inferieure le mouvement apparent de Mars dans l'espace de deux années. Le cercle ponctué represente le mouvement annuel du Soleil, qui differe peu d'une année à l'autre.

Ces Spirales sont divisées par des traits qui marquent la situation de la Planete pour le premier jour de chaque mois. L'on pourra trouver la situation de chaque Planete pour les autres jours, en divisant l'intervalle entre chaque mois en parties proportionnelles.

Le cercle exterieur qui envelope les Spirales, eſt diviſé en ſignes & degrez de l'Ecliptique.

L'on voit par cette figure le tems auquel ces Planetes ſont dans leur plus grande ou dans leur plus petite diſtance à l'égard de la Terre, & l'on peut connoître aiſément leur longitude par le moïen d'un fil, qui paſſant par le centre de la Terre & par la Planete, marque ſur le cercle exterieur les degrez & ſignes du lieu de la Planete.

Lorſque la Planete eſt dans la partie ſuperieure, elle eſt directe; lorſqu'elle eſt dans la partie inferieure, elle eſt retrograde; & lorſque le fil raze la Spirale de côté & d'autre, elle eſt ſtationaire.

La 2e Planche repreſente le mouvement de Mars depuis l'année 1708 juſqu'à l'année 1723, pendant lequel tems cette Planete fait pluſieurs révolutions à l'égard de la Terre. La révolution du Soleil eſt repreſentée par un cercle ponctué, lequel eſt diviſé de même que la Spirale de Mars par des traits qui marquent la ſituation du Soleil & de la Planete pour le 1, le 11, & le 21 de chaque mois. L'on voit par cette Figure les tems auſquels cette Planete eſt plus ou moins éloignée de la Terre que le Soleil. Lorſque Mars ſe trouve dans la partie inferieure de la Spirale, il eſt en oppoſition avec le Soleil, & il eſt en conjonction lorſqu'il ſe trouve dans la partie ſuperieure. Entre les oppoſitions qui ſont repreſentées dans cette Figure, celle où Mars approchera le plus près de la Terre, arrivera au commencement de Septembre de l'année 1719, où ſa diſtance à la Terre eſt ſept fois plus petite qu'au mois de Septembre de l'année 1718.

L'on peut de même que dans la Figure précedente par le moïen d'un fil qui paſſe par le centre de la Terre & va terminer au cercle exterieur où ſont marquez les degrez & ſignes du Zodiaque, trouver la ſituation de la Planete de dix en dix jours & pour tous les jours en prenant des parties proportionnelles, & ſçavoir lorſqu'elle eſt directe ſtationaire ou retrograde.

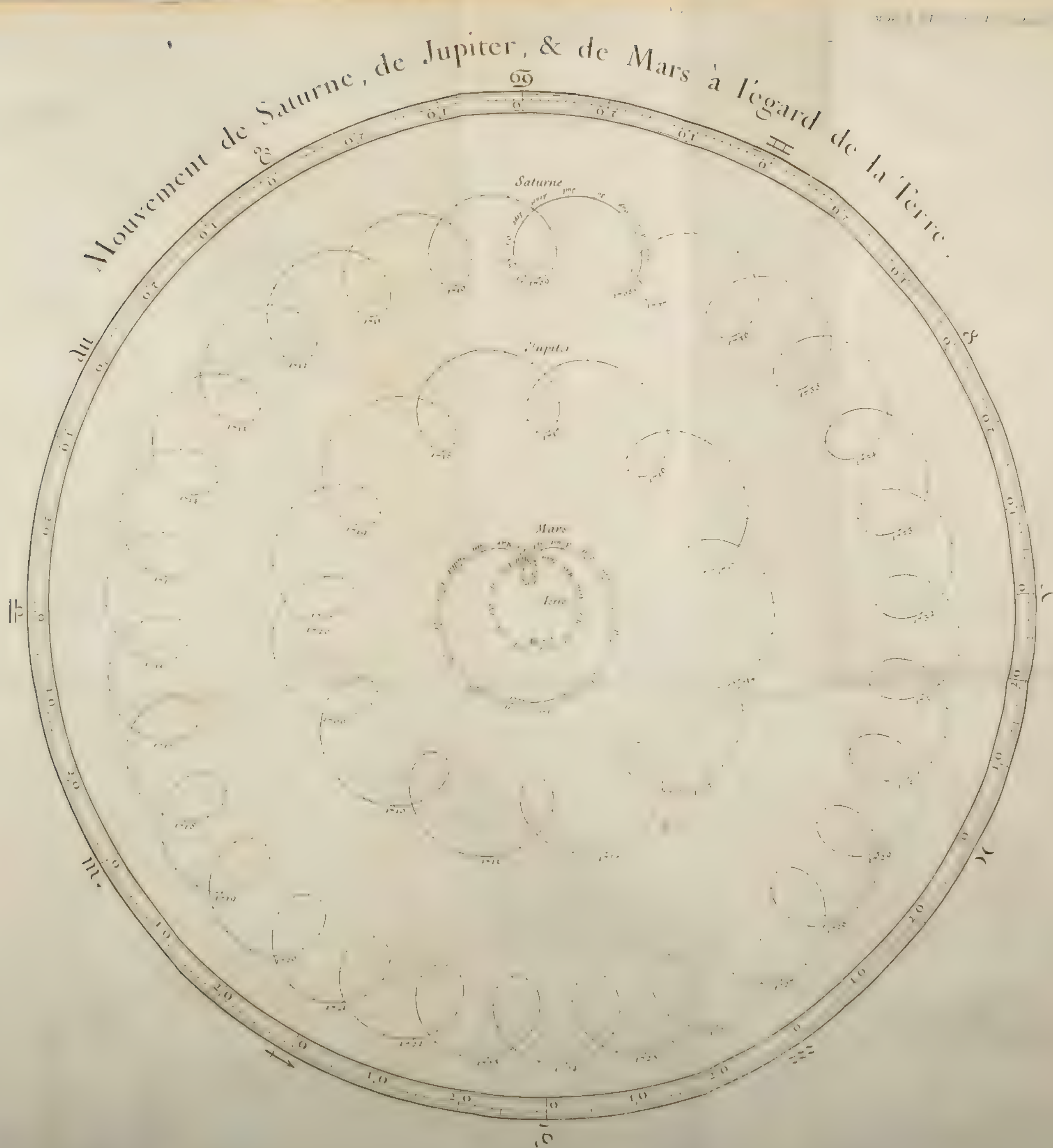
La 3[e] Planche represente le mouvement de Venus à l'égard de la Terre depuis le 1 Janvier 1708 jusqu'au 1 Janvier 1716; & la 4[e] Planche le mouvement de Mercure depuis le 1 Janvier 1708 jusqu'au 1 Janvier 1715. Ces figures de même que les cercles qui representent la révolution du Soleil, sont divisées par des traits qui marquent la situation de la Planete pour le 1, le 11, & le 21 de chaque mois. Lorsque ces Planetes sont dans la partie inferieure de leur cercle, elles sont en conjonction avec le Soleil; & lorsqu'elles se trouvent dans la partie superieure, elles sont dans leur opposition.

L'on peut de même qu'on l'a expliqué pour les Planetes superieures, connoître les lieux de ces Planetes aux jours donnez, les tems de leurs stations & retrogradations, & de leur plus grande ou plus petite distance à la Terre. L'on voit dans ces figures que Venus est sujette à moins d'inégalitez, & est de toutes les Planetes celle qui s'approche de plus près de la Terre.





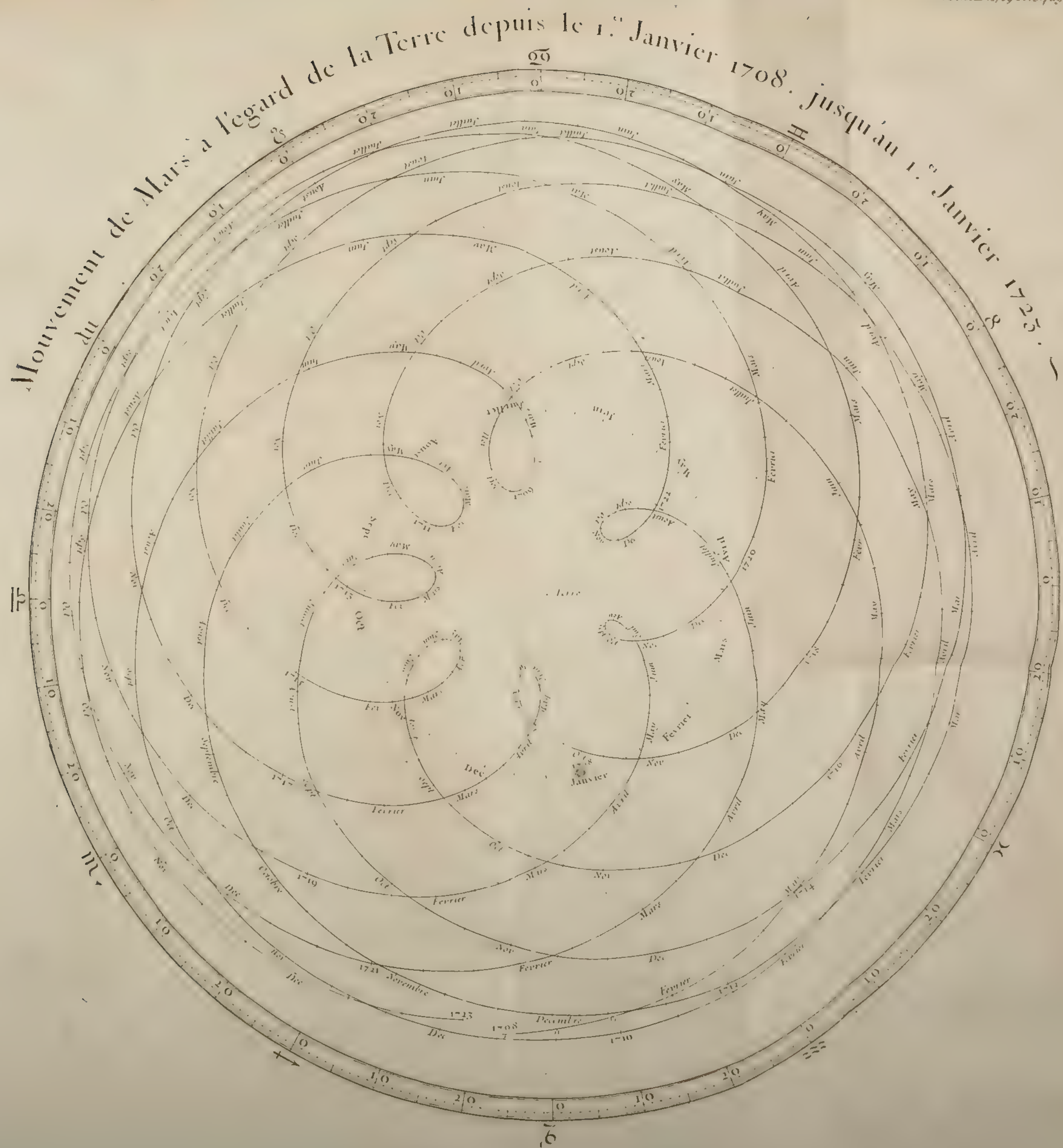
Berey sculp.

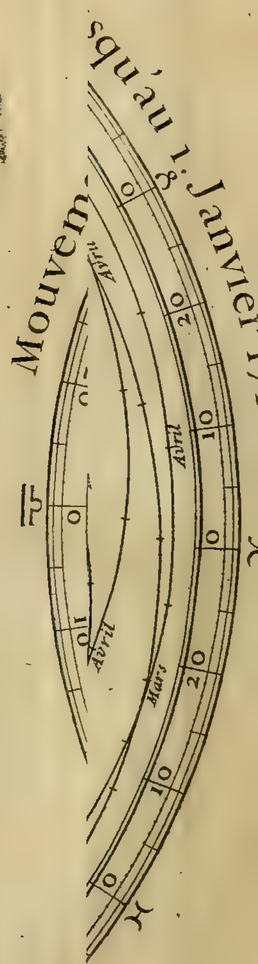

Mouvement de Saturne, de Jupiter, & de Mars à l'égard de la Terre.
Saturne
Jupiter
Mars
Terre

uis le 1.er

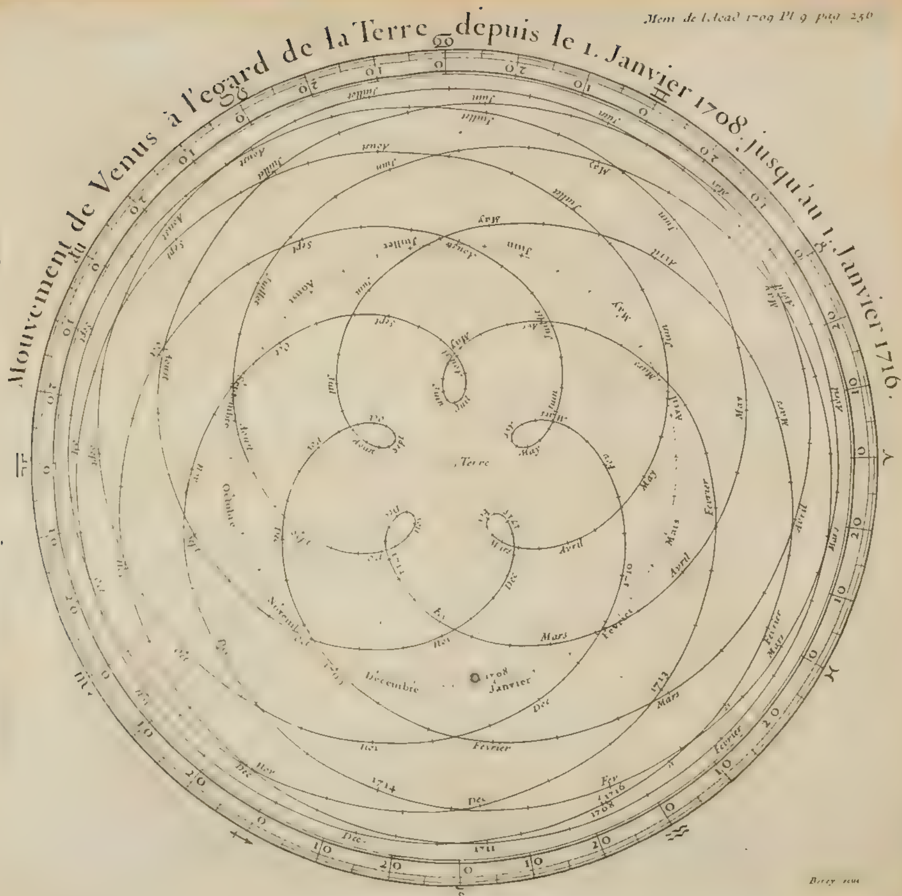
- ♋

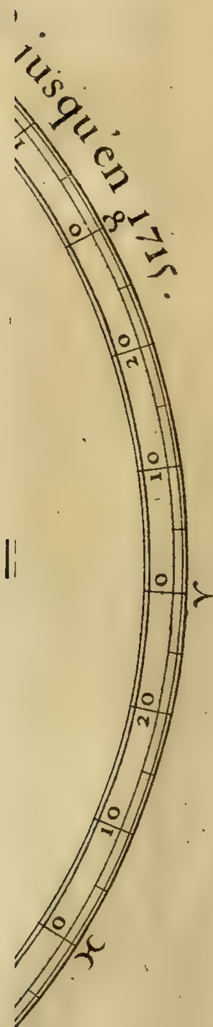
Berey sculp.


Mouvement de Mars à l'egard de la Terre depuis le 1.er Janvier 1708. jusqu'au 1.er Janvier 1723.
1708
Janvier
1720
1719
1721 Novembre
1723
1710
Decembre

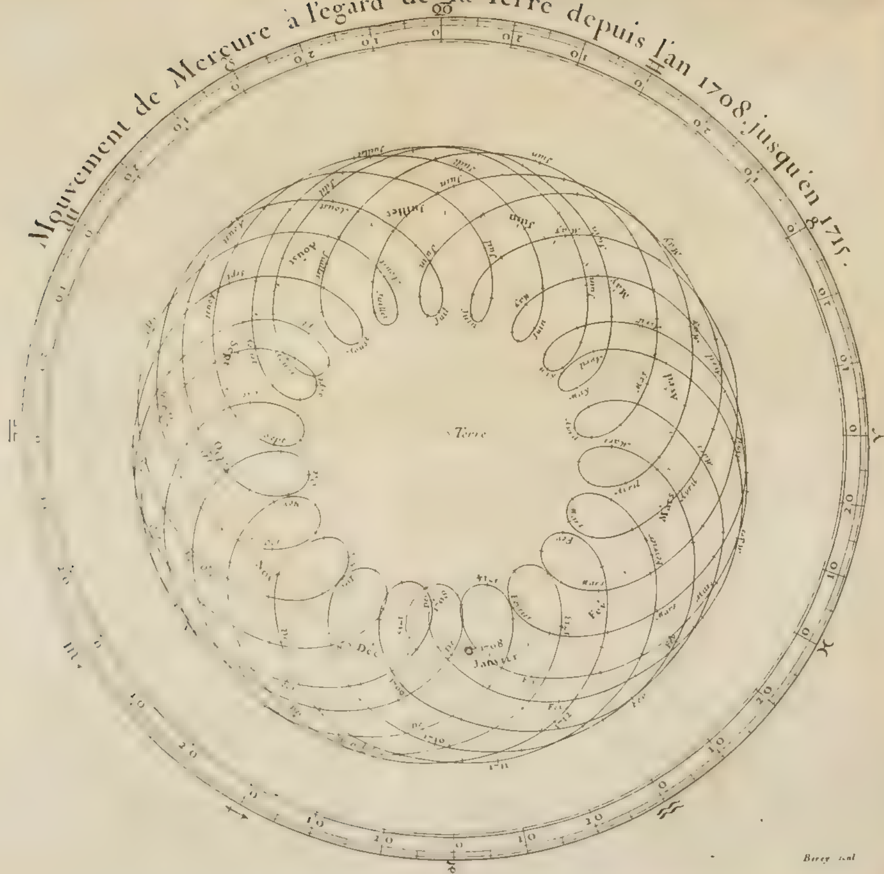


Berey sculp.


Mouvement de Venus à l'egard de la Terre depuis le 1. Janvier 1708 jusqu'au 1. Janvier 1716.
Terre
1708 Janvier
Décembre
Octobre
Novembre
Mars
Avril
Février
May
Juin
Juillet
Aoust
Sept
Dec
1711
1713
1714
1716
1708
Berey sculp



Berey sculp.


Mouvement de Mercure à l'egard de la Terre depuis l'an 1708 jusqu'en 1715.
Terre
Janvier
1708

Bercy sculp.

SOLUTION GENERALE

DU PROBLEME,

Où parmi une infinité de Courbes ſemblables décrites ſur un Plan vertical, & ayant un même axe & un même point d'origine, il s'agit de déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine & une ligne donnée de poſition, eſt parcouru dans le plus court tems poſſible.

Voyez la ſuite de ce Memoire ſous le titre d'Addition, &c. parmi ceux de 1710. p. 208.

PAR M. SAURIN.

DAns un Memoire précedent j'ai donné une Solution nouvelle de ce Problême à l'égard des Cycloïdes en particulier, & cela d'abord dans le cas ſimple d'une verticale donnée, propoſé par feu M. Jacques Bernoulli, & puis dans le cas plus compoſé & plus generale d'une droite donnée de poſition, faiſant un angle quelconque avec l'axe, ſuivant l'idée de M. Jean Bernoulli ſon frere. Je rens ici avec ce dernier le Problême plus géneral encore; en l'étendant à toutes les Courbes ſemblables. 1709. 9. Aouſt

Soient donc ſur un Plan vertical une infinité de Courbes ſemblables *AGB*, *AFD*, décrites ſur le même axe *AM*, & aïant même origine au point *A*: il faut déterminer celle dont l'arc compris entre le point d'origine *A*, & la droite *CD* donnée de poſition, & qui fait avec l'axe *AM* un angle quelconque, ſera parcouru dans un plus court tems que l'arc de toute autre Courbe ſemblable compris de même entre le point *A*, & la donnée de poſition *CD*. FIG. I.

SOLUT. De ces Courbes ſemblables j'en prens à l'ordinaire pour conſtante une quelconque *AGB*, & ſuppoſant auſſi toûjours que *AFD* une des variables eſt celle

que l'on mande, je mene la corde *ADB* qui coupe l'arc *AFD* de la variable, & l'arc *AGB* de la constante, & du point *B* je tire *BL* ordonnée à la Courbe constante, & *BQ* parallele à la droite *CD* donnée de position. Si l'on nomme l'abcisse *AL*, x; l'ordonnée *BL*, y; l'arc *AGB*, z; & son élement, dz; la differentielle du tems par l'arc *AGB* sera $\frac{dz}{\sqrt{y}}$, & le tems entier $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$. La raison de *BL* à *LQ* étant donnée, & faite égale à celle de m à n, on aura comme dans les Solutions précedentes, $LQ = \frac{ny}{m}$, & $AQ = x + \frac{ny}{m} = \frac{mx+ny}{m}$; & appellant *AC* qui est donnée de grandeur, b; & le tems par l'arc *AFD*, t; on fera la même analogie que dans notre premier Memoire; $\int\frac{dz}{\sqrt{y}} . t :: \sqrt{AB} . \sqrt{AD} :: \sqrt{AQ}\left(\frac{\sqrt{mx+ny}}{m}\right) . \sqrt{AC}\,(\sqrt{b})$; d'où il vient, $t = \frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{mx+ny}} \times \int\frac{dz}{\sqrt{y}}$: la difference de cette quantité (en omettant $\sqrt{bm}$) est, $\frac{\sqrt{mx+ny} \times \frac{dz}{\sqrt{y}}}{mx+ny}$ $\frac{-mdx-ndy}{mx+ny \times 2\sqrt{mx+ny}} \times \int\frac{dz}{\sqrt{y}} = 0$; & mettant à même dénominaison, $\frac{\overline{2mx+2ny} \times \frac{dz}{\sqrt{y}} - \overline{mdx-ndy} \times \int\frac{dz}{\sqrt{y}}}{\overline{mx+ny} \times 2\sqrt{mx+ny}} = 0$; d'où l'on tire $\overline{2mx+2ny} \times \frac{dz}{\sqrt{y}} = \overline{mdx+ndy} \times \int\frac{dz}{\sqrt{y}}$; & $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \int\frac{dz}{\sqrt{y}}$; ce qui fournit cette construction generale:

FIG. II. Sur l'axe commun *AM* soient décrites deux Courbes; la Courbe *APD* dont les ordonnées $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ exprimeront les tems de la chûte par les arcs correspondans *AGB*; & la Courbe *AED* qui ait pour ordonnées les lignes exprimées par la fraction $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy}$; lorsque cette fraction deviendra égale à $\int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ les deux Courbes se rencontreront, & il est évident que si de ce point on mene sur

l'axe *AM* l'ordonnée *DM* commune aux deux Courbes; *AL* (x), & *LB* (y) que l'on cherchoit, seront déterminées.

On voit clairement que de ces deux Courbes, l'une, sçavoir *APD* n'est Géometrique que lorsque $\int \frac{dz}{\sqrt{y}}$ peut être integré, ou exprimé par des lignes droites; & que l'autre *AED* l'est toûjours. On peut faire évanoüir de l'expression de ses Ordonnées les differences; ces differences se trouvant dans le numerateur, & dans le dénominateur de la fraction, & la nature des Courbes particulieres donnant les valeurs de dz & dx en dy, ou de dz & dy en dx. Mais sans rien changer à la fraction, on peut la construire aisément & généralement en prenant, 1°, la 4e proportionnelle à QT, BT, $2AQ$ on aura $\frac{BT \times 2AQ}{QT} = \overline{2mx + 2ny} \times \frac{dz}{mdx + ndy}$; 2°, la 3e proportionnelle à cette même ligne, & $\frac{1}{\sqrt{y}}$; & l'on aura $\frac{2mx + 2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx + ndy}$; ce qu'il falloit construire. FIG. III.

La premiere proportion qui donne $\frac{BT \times 2AQ}{QT} = \overline{2mx + 2ny} \times \frac{dz}{mdx + ndy}$, se démontre sans peine; car, QT ou $\overline{QL + LT}$ $\left(\frac{ny}{m} + \frac{ydx}{dy}\right)$. BT $\left(\sqrt{yy + \frac{yydx^2}{dy^2}}\right)$ :: $\frac{nydy + mydx}{mdy}$. $\frac{y}{ay} \times \sqrt{\overline{dy^2 + dx^2}}$ (dz) :: $\frac{ndy + mdx}{m}$. dz :: $2AQ$ ou $2AL + 2LQ$ $\left(\frac{2mx + 2ny}{m}\right)$ $\overline{2mx + 2ny} \times \frac{dz}{ndy + mdx} = \frac{BT \times 2AQ}{QT}$.

Voilà comme on démontre cette proportion; mais voici comme on y est venu. On a d'abord pris $\frac{mdx}{dz} = \frac{BL \times LT}{BT}$, & $\frac{ndy}{dx} = \frac{BL \times LQ}{BT}$; ainsi on a eu $\frac{mdx + ndy}{dz} = \frac{BL \times LT + LQ}{BT} = \frac{BL \times QT}{BT}$; ensuite on a fait $\frac{mdx + ndy}{dz} \left(\frac{BL \times QT}{BT}\right)$. $\frac{2mx + 2ny}{m}$ $(AL + 2LQ$ ou $2AQ)$ :: m (BL). $\overline{2mx + 2ny} \times \frac{dz}{mdx + ndy} = \frac{BL \times 2AQ \times BT}{BL \times QT} = \frac{2AQ \times BT}{QT}$.

J'ai été bien aise d'exposer ici la maniere dont cette

proportion s'est présentée d'elle-même, parce qu'elle fournit une construction génerale & plus simple du Problême par la description d'une seule Courbe.

On a trouvé $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$, ou en rejettant $\frac{2}{\sqrt{y}}$ de l'autre côté, $\overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \frac{1}{2}\sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$. Maintenant si sur la Tangente BT de chaque point de la Courbe constante AGB, on prend la partie $BR = \frac{1}{2}\sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$, & que les extremitez R de ces parties BR forment la Courbe AOR, il est clair que lorsque $\frac{1}{2}\sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$ deviendra $= \overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy}$, si l'on décrit l'arc AFD terminé au point D, où la droite AB coupe la donnée de position CD, & par conséquent semblable à l'arc AGB, le tems par l'arc AFD sera le plus court, puisque c'est lorsqu'il est le plus court que l'on a $\overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \frac{1}{2}\sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$. La Courbe AOR étant donc décrite, on n'a qu'à mener la corde AR parallele à la donnée de position CD, & du point R mener la Tangente RB à la Courbe constante AGB, l'ordonnée BL menée du point B, déterminé de cette sorte, sera la valeur cherchée de y; BR qui est $\frac{1}{2}\sqrt{y}\int \frac{dz}{\sqrt{y}}$, se trouvant $= \overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy}$, quand AR est parallele à CD; car alors à cause des paralleles AR, BQ, on a la proportion dont on vient de parler; $QT . BT :: AQ . BR$, & par conséquent $BR = \frac{BT \times AQ}{QT} = \overline{mx+ny} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \frac{1}{2}\sqrt{y} \times \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$. Cette belle & élegante construction qui naît si naturellement de notre Analyse, a été donnée par M. Jean Bernoulli dans le Journal des Sçavans du 12[e] de Decembre 1697, & inserée dans les Actes de Leipsik de 1698, pag. 55; mais en deux mots, sans analyse, & sans démonstration.

FIG. III.

Pour appliquer maintenant notre premiere construction générale par l'intersection de deux Courbes à quelques

exemples particuliers. Soient les Courbes ſemblables *AFD AGB* des Cycloïdes. Par la ſubſtitution des valeurs de dz, & dx en dy, l'égalité $\frac{\overline{2mx+2ny}}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy} = \int\frac{dz}{\sqrt{y}}$ ſe changera en celle-cy, $\frac{\overline{2mx+2ny}}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times \sqrt{a} = \int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$; ou diviſant par 2, & multipliant par $\sqrt{a}$; $\frac{\overline{mx+ny}}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a = \frac{1}{2}\sqrt{a} \times \int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$. La Courbe *APD* aura donc pour ordonnées les arcs de Cercle correſpondans *MIS*, exprimés par $\frac{1}{2}\sqrt{a} \times \int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}} = \int\frac{ady}{2\sqrt{ay-yy}}$, valeur d'un arc de cercle dont le diamettre eſt a; ce qui pour le remarquer en paſſant eſt une démonſtration bien courte & bien aiſée, de cette partie de la découverte de M. Hughens démontrée avec tant de peine, que les tems par differens arcs *AGB* d'une Cycloïde ſont entr'eux comme les arcs correſpondans *MIS* du cercle génerateur.

L'autre Courbe *AED* dont les ordonnées doivent être égales à la fraction $\frac{\overline{mx+ny}}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, ſe conſtruira plus aiſément, ſi on met dans cette fraction pour m & n leurs proportionnelles *LB* (y), & *LQ*, qui n'aïant pas de nom ſera déſignée par n même; au lieu de $\frac{\overline{mx+ny}}{my+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, on aura donc $\frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$. La 4[e] proportionnelle à *LB* (y), *LQ* (n), *ST* ($\sqrt{ay-yy}$) eſt $\frac{n\sqrt{ay-yy}}{y}$; Si on lui ajoûte *LB* (y), on aura une ligne $= \frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y}$; & prenant une 4[e] proportionnelle à cette même ligne $\frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y}$, *MN* ($a$), *AQ* ($x+n$), elle ſera $\frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, qui eſt la ligne qu'il falloit conſtruire.

Dans cette proportion $\frac{yy+n\sqrt{ay-yy}}{y}$. *MN* ($a$) : : *AQ* ($x+n$). $\frac{yx+ny}{yy+n\sqrt{ay-yy}} \times a$, on s'apperçoit aiſément que n (*LQ*) eſt égal à $\sqrt{ay-yy}$; car n aïant cette valeur la pro-

portion donne $\frac{yy+ay-yy}{y}$ (a). MN (a) : : $x+\sqrt{ay-yy}$. $x+\sqrt{ay-yy}\times\frac{a}{a}$; Or cette 4[e] proportionnelle étant la valeur de $\frac{mx+ny}{my+n\sqrt{ay-yy}}\times a=\frac{1}{2}\sqrt{a}\int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}=x+\sqrt{ay-yy}$; Il s'ensuit que n prise pour LQ est $=\sqrt{ay-yy}$; ce qui donne la construction de mon premier Memoire : il n'y a qu'à mener dans le cercle generateur la corde MS parallele à la donnée de position, & du point S, SB parallele à AM, le point B est le point cherché, l'ordonnée BL est la valeur de y, l'arc AGB est perpendiculaire à BQ, & par conséquent l'arc demandé AFD perpendiculaire à la donnée de position CD.

FIG. IV.

Dans le cas de la verticale au lieu de $\frac{mx-ny}{my+n\sqrt{ay-yy}}\times a$ $=\frac{1}{2}\sqrt{a}\int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$, on a $\frac{ax}{y}=\frac{1}{2}\sqrt{a}\int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}$, d'où il vient une construction fort simple pour la Courbe AED : car prolongeant LE (y) jusqu'à ce qu'elle rencontre en V, NV parallele à AM, on aura $LV=MN=a$, & menant VR parallele à BA, on aura $RL=\frac{ax}{y}$; ainsi sur VL prolongé du côté de L prenant $LQ=LR$, le point E sera à la Courbe, & faisant de même pour tous les y, la Courbe sera décrite. Comme dans l'autre Courbe on a par tout $LP=\frac{1}{2}\sqrt{a}\times\int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}=x+\sqrt{ay-yy}=AL+ST$, il est visible que lorsque AL (x) deviendra AM qui est égale à la demie circonference MSN, LE deviendra en même tems MD qui est aussi égale à la demie circonference MNS : l'on aura donc en ce point $\frac{ax}{y}=\frac{1}{2}\sqrt{a}\times\int\frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{ay-yy}}=$ $x+\sqrt{ay-yy}=x+0$ ($\sqrt{ay-yy}$ s'évanoüissant au point M), & LB $(y)=a$.

Dans ce cas de la verticale, les deux Courbes ne peuvent se rencontrer qu'au point D qui répond au point M : les ordonnées de l'une $AL+ST$ étant toûjours plus grandes que celles de l'autre $AL+AR$, puisque AR est toûjours plus petite que ST, excepté lorsque le point L

se confond avec le point M; car alors le point S se confondant avec le point A, AR s'évanoüit aussi, & il ne reste que $AL=AM$ pour ordonnée aussi-bien que pour abscisse de l'une & de l'autre Courbe.

Au reste il n'est pas difficile de voir que ST est toûjours plus grande que AR; car NS étant parallele à la Tangente au point B; NG, qui est parallele à la corde AB de la Cycloïde, doit tomber sur un point G plus proche de T que le point S; mais $TG=BO=AR$; donc TS est plus grande que AR.

On trouve ici une maniere plus simple encore & plus aisée que la précedente de construire les deux Courbes qui déterminent le point L par leur intersection. Laissant la partie commune AL, il ne faut que prendre les ST pour ordonnées de l'une, & les GT pour ordonnées de l'autre; il est évident que ST & GT s'évanoüissant ensemble quand L tombe en M, les deux Courbes ApM, AeM, se rencontreront en ce point, & ne se rencontreront qu'en ce point; ce qui donne toûjours $y=a$.

Si les Courbes semblables proposées sont des cercles, & que le demi-diametre de celui qu'on prendra pour constant, soit a; on aura $\int\frac{lz}{\sqrt{y}}=\int\frac{ady}{\sqrt{aay-y^3}}$, & la Courbe APD se construira par des arcs de Lemniscate de cette maniere. Sur l'axe AM du cercle ABM pris pour constant décrivez le quart d'une Lemniscate, & du point A menez une corde AH moïenne proportionnelle entre AM ($2a$), & $2LB$ ($2y$) égale par conséquent à $2\sqrt{ay}$; elle déterminera l'arc AIH: prenez LP = à cet arc, le point P sera à la Courbe APD qu'on avoit à construire. On trouve cette construction dans les Actes de Leipsik que j'ai déja citez, pag. 225; elle est de feu M. Jacques Bernoulli, qui n'a fait que l'indiquer, de même que M. Bernoulli son Frere la construction générale que nous avons vûë; en voici l'analyse & la démonstration. FIG. V.

Soit $AK=z$, & $KH=v$. L'équation à la Lemniscate donnant $zz+vv=2a\sqrt{zz-vv}$, on en tire $v=$

$\pm\sqrt{\pm 2a\sqrt{2zz+aa}-2aa-zz}$; & $vv = \pm 2a\sqrt{2zz+aa} - 2aa - zz$: mais on a $AH^2 = AK^2 + KH^2 = zz + vv = 4ay$ (par construction) ; donc $4ay = 2a\sqrt{2zz+aa} - 2aa$; ou $2ay + aa = a\sqrt{2zz+aa}$; d'où, en quarrant de part & d'autre, on tirera $zz = 2yy + 2ay$; & $z = \sqrt{2ay+2yy}$; $dz = \frac{ady + 2ydy}{\sqrt{2ay+2yy}}$, & $dz^2 = \frac{4yydy^2 + 4aydy^2 + aady^2}{2yy+2ay}$. $zz + vv = 4ay$ donne aussi $vv = 4ay - zz = 4ay - 2yy - 2ay$ (en mettant pour zz sa valeur $2yy + 2ay$) $= 2ay - 2yy$; donc $v = \sqrt{2ay - 2yy}$; $dv = \frac{ady - 2ydy}{\sqrt{2ay-2yy}}$; & $dv^2 = \frac{4yydy^2 - 4aydy^2 + aady^2}{2ay - 2yy}$. On aura donc $dz^2 + dv^2 = \frac{\overline{aa + 4ay + 4yy} \times dy^2}{2ay + 2yy} + \frac{\overline{aa - 4ay + 4yy} \times dy^2}{2ay - 2yy}$. En multipliant en croix le dernier membre de cette égalité pour lui donner un dénominateur commun, & faisant ensuite les réductions nécessaires, il viendra $dz^2 + dv^2 = \frac{a^3dy^2}{aay - y^3}$; $\sqrt{dz^2 + dv^2}$ (Element de l'arc AIH) $= \frac{ady\sqrt{a}}{\sqrt{aay - y^3}}$; & faisant $a = 1$, $\sqrt{dz^2 + dv^2} = \frac{dy}{\sqrt{y - y^3}}$, & $\int\sqrt{dz^2 + dv^2} = \int\frac{dy}{\sqrt{y - y^3}}$ = à l'arc de la Lemniscate. La Courbe APD formée par ces arcs de Lemniscate est donc celle qu'il falloit construire, & dont les ordonnées doivent être $= \int\frac{dy}{\sqrt{y - y^3}} = \int\frac{ady}{\sqrt{aay - y^3}}$.

Il est bon de remarquer, que lorsque le point L tombe sur le centre du cercle AGB pris pour constant, la corde AH de la Lemniscate devient AM, le point H tombant sur le point M, & l'ordonnée PL est alors égale au quart ALM de la Lemniscate. Lorsque le point L tombe au-delà du centre par rapport au point A, comme
Fig. VI. en l, le point H tombe au point h d'un autre quart de la Lemniscate qu'il faut concevoir décrit au dessous de l'axe AM ; de sorte que l'arc AIh est plus grand que le quart AIM ; & c'est ce qui a fait dire à M. Bernoulli, lorsque BL devient bl, de prendre pour LE l'arc AIM, plus l'arc HM, qui est égal à l'arc Mh. Enfin quand le point L tombe en M, le point h tombe en A, & l'arc AIh est

égal

égal à 2 fois le quart entier *AIM* de la Lemniscate ; ce qui fait voir que les ordonnées de la Courbe *APD* augmentent toûjours jusqu'à ce qu'elles deviennent égales à la demie circonference entiere de la Lemniscate.

Je viens à la Courbe *AED* : M. Jacques Bernoulli donne cette construction pour le cas particulier où la donnée de position est verticale. Il dit de prendre *LE* 4[e] proportionnelle aux droites *AH*, *AM*, & 2*CF*, & ne s'explique pas davantage. Dans le cas de la Verticale on a $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}} = \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$; ainsi *LE* doit être égale à la fraction $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$; si l'on en chasse les differences il viendra $\frac{2aa - 2a\sqrt{aa - yy}}{y\sqrt{y}}$; c'est cette expression qui fournit la construction de M. Bernoulli ; car par la proprieté du cercle on a $BL\ (y) . AL$, ou $AC - LC$ $(a - \sqrt{aa - yy}) :: MC\ (a) . CF\ \left(\frac{aa - a\sqrt{aa - yy}}{y}\right)$; & suivant l'analogie qu'il prescrit, $AH\ (2\sqrt{ay}$ ou $2\sqrt{y}$, en prenant pour a l'unité $) . AM\ (2a)$ (ou seulement 2) $:: 2CF$ $\left(\frac{2aa - 2a\sqrt{aa - yy}}{y}\right) . LE\ \left(\frac{2aa - 2a\sqrt{aa - yy}}{y\sqrt{y}}\right)$.

Mais l'expression differentielle $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$, sans aller plus loin présente une construction facile, & qui revient à très-peu près à la même. Il ne faut que mener la Tangente *BT*, & *AS* parallele à cette Tangente, on aura $LT . BT :: dx . dz :: AL\ (x) . AS\ \left(\frac{xdz}{dx}\right)$, & la 4[e] proportionnelle aux trois droites *AH*, *AM*, 2*AS*, sera $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}}$. Il est évident que si dans ce même cas de la verticale les Courbes semblables étoient des Paraboles, dont la Constante eût a pour parametre ; & qu'en rejettant $\frac{1}{2}\sqrt{y}$ de l'autre côté, au lieu de $\frac{2xdz}{dx\sqrt{y}} = \int \frac{dz}{\sqrt{y}}$, on fît $\frac{xdz}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{y}\int \frac{dz}{\sqrt{y}}$; la Courbe *AED* seroit une Hyperbole équilatere qui auroit pour axe déterminé $\frac{1}{4}a$; car $\frac{xdz}{dx}$ est la valeur de la demi-tangente de la Parabole $= \sqrt{\frac{1}{4}aa + xx}$; & la Courbe formée par ces demi-tangentes comme ordonnées, est visiblement une

Hyperbole équilatere dont l'axe déterminé est égal à $\frac{1}{4}a$.

Revenant aux Cercles ; dans le cas general d'une donnée de position, faisant un angle quelconque avec l'axe AM, qui est notre cas, au lieu de l'expression $\frac{2mx+2ny}{\sqrt{y}} \times \frac{dz}{mdx+ndy}$, (valeur des Ordonnées de la Courbe AED) l'évanoüissement des differences donne $\frac{2aam-2am\sqrt{aa-yy}+2any}{my\sqrt{y}+n\sqrt{aay-y^3}}$, & mettant pour m & n leurs proportionnelles $LB(y)$ & LQ (qui sera designée par n même) $\frac{2nay-2ay\sqrt{aa-yy}+2any}{yy\sqrt{y}+n\sqrt{aay-y^3}}$; où divisant par $\sqrt{y}$, $\frac{2\sqrt{y}\times a-\sqrt{aa-yy}+n\times a}{yy+n\sqrt{aa-yy}}$, d'où je tire cette

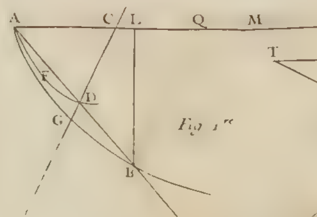
FIG. VI. construction très-simple : Menez QG perpendiculaire sur le raïon CB, & prenez la 4[e] proportionnelle à BG, AQ, AH, elle sera $=\frac{2\sqrt{y}\times aa-a\sqrt{aa-yy}+an}{yy+n\sqrt{aa-yy}}$. On le verra sans peine, si l'on mene encore LO parallele à QG ; car on aura, 1°. $CB(a). BL(y) :: BL(y). BC\left(\frac{yy}{a}\right)$; 2°. $CB(a). CL(\sqrt{aa-yy}) :: QL(n). GO\left(\frac{n+\sqrt{aa-yy}}{a}\right)$; 3°. BG ou $BO+OG\left(\frac{yy+n\sqrt{aa-yy}}{a}\right)$. AQ ou $AC-CL+LQ(a-\sqrt{aa-yy}+n) :: AH(2\sqrt{ay}$, ou $2\sqrt{y}$, en prenant pour a l'unité$)$. $\frac{2\sqrt{y}\times aa-a\sqrt{aa-yy}+an}{yy+n\sqrt{aa-yy}}$; ce qu'il falloit construire & démontrer.

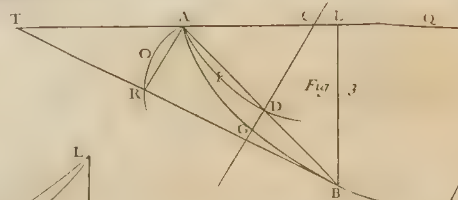


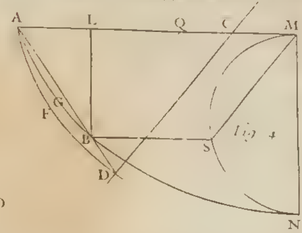
Fig. 4.

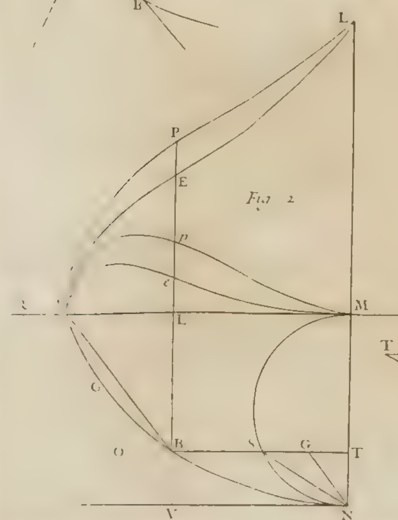
Fig. 5.

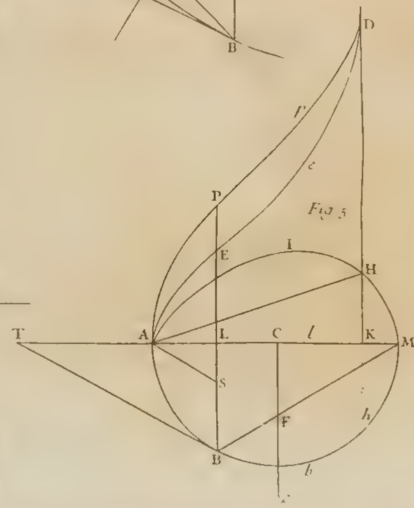
Fig. 6.

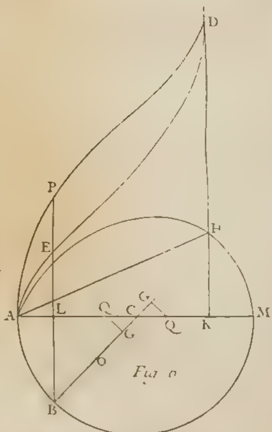

A C L Q M
F D G B
Fig. 1re


T A C L Q
O R f D G B
Fig. 3


A L Q C M
G F B S D N
Fig. 4


L P E p e M L
G B O S G T V N
Fig. 2


D P e I E H
T A L C l K M
S F B b h
Fig. 5


D P E H
A L Q C G Q K M
G O B
Fig. 6

DES MOUVEMENS

Commencés par des vitesses quelconques, & ensuite primitivement accelerés en raison des tems écoulés, dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives du mobile.

Par M. Varignon.

Dans le Memoire du 15 Juin dernier, on a vû ce que des Mouvemens primitivement accelerés en raison des tems écoulés, en commençant à zero de vitesse, deviendroient dans des milieux résistans en raison des quarrés de celles que le mobile y auroit effectivement malgré les résistances de ces milieux; quelles seroient alors les vitesses de ce mobile, les espaces qu'il parcouroit, &c. Voici présentement ce qui arriveroit aussi dans ces milieux à des mouvemens commencés par des vitesses quelconques, & ensuite accelerés encore primitivement en raison des tems écoulés, c'est-à-dire, qui dans un milieu sans résistance ni action auroient encore des accroissemens égaux de vitesse en tems égaux, ainsi que Galilée le suppose dans la chûte des corps. Nous nous servirons pour cela de deux Lemmes par où commence le Memoire qu'on vient de citer, & qu'on citera encore dans la suite. 1709. 17. Aoust.

PROBLÊME.

La construction générale du Lem. 1. art. 4. pag. 195. étant ici supposée, trouver les Courbes ARC *des résistances totales ou des vitesses perduës;* HUC, *des vitesses restantes ou actuelles, &c. Dans l'hypothese* 1°. *des résistances en raison des quarrés de ces vitesses actuelles;* & 2°. *des vitesses primitives en raison des sommes faites d'une constante quelconque augmentée d'autres qui croîtroient en* Fig. I. II. III.

raiſon des tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ainſi qu'il arriveroit dans l'hypotheſe de Galilée ſur la peſanteur, ſi d'une force quelconque differente de la peſanteur conſtante d'un corps, on le jettoit verticalement de haut en bas dans un milieu ſans reſiſtance ni action.

SOLUTION.

I. Suivant le Lem. 1. pag. 194. & ſon art. 4. p. 195. en ſe ſervant toûjours des noms qui y ſont ſuppoſés, la premiere des deux hypothêſes qu'on fait ici, y donnera encore, comme dans la Solut. 1. du Probl. de la pag. 196. $TE\,(z) = \frac{TV\times TV}{AB} = \frac{RV\times RV}{AB}\left(\frac{uu}{a}\right) = \frac{\overline{TV-TR}^2}{AB}\left(\frac{\overline{v-r}^2}{a}\right)$ en ſuppoſant $AB=a$ conſtante; & la 2e donnera, $TV\,(v) = TX + XV\,(b+t)$: de ſorte que les deux enſemble donneront pareillement ici $z = \frac{uu}{a}$, & $z = \frac{\overline{b+t-r}^2}{a}$. Donc en ſubſtituant chacune de ces deux valeurs de z dans l'équation $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{dt-du}{z}$ de cet art. 4. pag. 195. L'on aura ici $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{\overline{b+t-r}^2}$ pour l'équation de la Courbe ARC des réſiſtances totales $TR\,(r)$ ou des viteſſes perduës; & $\frac{dt}{a} = \frac{adt-adu}{uu}$, ou $uudt = aadt - aadu$, d'où réſulte $aadu = aadt - uudt$, ou $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$, comme dans la Solut. 1. du Probl. de la pag. 196. art. 2. pour l'équation pareillement requiſe ici de la Courbe HUC des viteſſes reſtantes $TU\,(u)$: mais avec cette difference que ces viteſſes TU commençant (*hyp.*) à zero en A dans ce Prob. de la pag. 196. & ici à AH (*Lem.* 1. *art.* 4. *p.* 195.) $= AF\,(b)$; la Courbe HUC doit ici paſſer par un point H de AB perpendiculaire en A ſur l'axe ATC, & prolongée où beſoin ſera du côté de B, lequel point H donne $AH = AF\,(b)$, au lieu que dans le Prob. de la pag 196. art. 4. cette Courbe des viteſſes reſtantes (u) doit paſſer par A, comme dans la fig. 1. qu'on voit ici.

II. Si l'on prend encore ici $\frac{x-a}{x+a}\times a = u$, comme dans la Solut. 1. du Prob. de la p. 196. art. 3. On trouvera ici comme

là, $\frac{adu}{aa-au}\left(\frac{dt}{a}\right)=\frac{dx}{2x}$, ou $\frac{dt}{\frac{1}{2}a}=\frac{dx}{x}$, qui eſt une équation à une Logarithmique d'une ſoûtangente $=\frac{1}{2}a$, & d'ordonnées $=x$ perpendiculaires à ſon aſymptote dont les abſciſſes correſpondantes ſont $=t$. Pour décrire cette Logarithmique il faut conſiderer

1°. Que l'équation ſuppoſée $\frac{x-a}{x+a}\times a=u$ rend $\frac{x-a}{x+a}\times a=b$ lorſque $u=b$, c'eſt-à-dire, $x=\frac{aa+ab}{a-b}$ au commencement du mouvement dont on ſuppoſe que b eſt la premiere viteſſe (u) ; & après avoir pris $AB=a$, $AH=b$, ſur une perpendiculaire en A à la droite ATC, ſi l'on y prend $AP=\frac{aa+ab}{a-b}=\frac{AB+AH}{AB-AH}\times AB=\frac{AB+AH}{\pm HB}\times AB$, le ſigne ſupérieur du dénominateur étant pour les Fig. 1. 2. & l'inférieur pour la Fig. 3. l'on aura P pour un des points de la Logarithmique requiſe, & ATC pour ſon aſymptote.

2°. Que le cas de u (TU) $=a$ (AB) réduiſant à $x-a=x+a$ l'équation $\frac{x-a}{x+a}\times a=u$ du preſent art. 2. on verra auſſi que cela ne pouvant arriver que lorſque x eſt infinie, la Logarithmique cherchée doit non-ſeulement (*nomb.* 1.) paſſer par P, mais auſſi aller en s'écartant de ſon aſymptote du côté de C.

III. Si donc on prend PLC pour cette Logarithmique, laquelle ait (*art.* 2.) ſes ſoûtangentes (ſur ſon aſymptote ATC) chacune $=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}AB$, & ſes ordonnées TL (paralleles à AB) $=x$, leſquelles prolongées la rencontrent en L, ſon aſymptote en T, & les droites BC, FXC, FVC, en S, X, V, les deux premieres BC, FXC, étant paralleles à ATC, & la troiſiéme FVC étant inclinée de 45 deg. ſur elles.

Cela fait, ſi l'on conſidere encore que l'équation $\frac{x-a}{x+a}\times a=u$ de l'art. 2. vient d'y donner (*nomb.* 1.) $AP=\frac{aa+ab}{a-b}=\frac{AB+AH}{AB-AH}\times AB=\frac{AB+AH}{\pm HB}\times AB$ lorſque TU (u) $=AH$ (b), c'eſt-à dire, lorſque TU eſt en AH, & TL (x) en AP ; on verra que lorſque AH (b) eſt plus grande que

AB (a) comme dans la fig. 3. cette premiere ordonnée *AP* de la Logarithmique *PLC*, & par conséquent aussi ses autres ordonnées *TL* (x) doivent être négatives de ce qu'elles sont lorsque *AH* (b) est égale ou moindre que *AB* (a) comme dans les fig. 1. 2. Donc en prenant les x (*LT*) de l'équation $\frac{x-a}{x+a}\times a=u$, positives dans les fig. 1. 2. on les aura négatives dans la fig. 3. c'est-à-dire qu'elles s'y changeront en $-x$; ce qui changera aussi cette équation $u=\frac{x-a}{x+a}\times a$ supposée pour les fig. 1. 2. en $u=\frac{-x-a}{-x+a}\times a$ $=\frac{x+a}{x-a}\times a$ pour la fig. 3. De sorte que dans les fig. 1. 2. l'on aura $TU\,(u)=\frac{x-a}{x+a}\times a=\frac{LT-ST}{LT+ST}\times AB=\frac{LS\times AB}{LT+ST}$; & dans la fig. 3. $TU\,(u)=\frac{x+a}{x-a}\times a=\frac{LT+ST}{LT-ST}\times AB=$ $=\frac{LS\times AB}{LT-ST}$: c'est-à-dire en géneral $TU\,(u)=\frac{LT\mp ST}{LT\pm ST}\times AB$ $=\frac{LS\times AB}{LT\pm ST}$, les signes superieurs dans ces fractions étant pour les fig. 1. 2. & les inferieurs pour la fig. 3.

IV. Donc en prenant par tout *TU* (u) de cette valeur, c'est-à-dire, $TU=\frac{LT-ST}{LT+ST}\times AB=\frac{LS\times AB}{LT+ST}$ dans les fig. 1. 2. & $TU=\frac{LT+ST}{LT-ST}\times AB=\frac{LS\times AB}{LT-ST}$ dans la fig. 3. la ligne *HUC*, qui passera par tous les points *U* ainsi trouvés, sera la Courbe ici requise des vitesses (u) restantes des primitives (v) supposées, malgré les résistances pareillement supposées. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

V. Cette Courbe *HUC* des vitesses (u) restantes des primitives (v) malgré les résistances supposées, étant ainsi décrite, il n'y a plus qu'à prendre par tout $UR=TV$ (*hyp.*) $=AT+AF$ (*art.* 1.) $=AT+AH$; & la ligne *ARC* qui passera par tous les points *R* ainsi trouvés, sera ici (*Lem.* 1. *pag.* 194.) la Courbe des résistances totales (r) ou des vitesses perduës, exprimée (*art.* 1.) par l'équation $\frac{dt}{z}=\frac{adr}{bb+t-r^2}$. *Ce qu'il falloit aussi trouver.*

COROLLAIRE I.

Puisque la Solution (*art.* 2. *nomb.* 1.) donne $AP = \frac{aa+ab}{a-b}$, il est manifeste que LT (x) en AP, doit y donner aussi $x = \frac{aa+ab}{a-b}$; & qu'ainsi son art. 2. donnant en general $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$, d'où résulte $xu + au = ax - aa$, ou $aa + au = ax - xu$, & conséquemment aussi $x = \frac{aa+au}{a-u}$; LT en AP doit pareillement y donner $\frac{aa+ab}{a-b} = \frac{aa+au}{a-u}$, ou $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+u}{a-u}$, d'où résulte $aa+ab-au-bu = aa+au-ab-bu$, c'est-à-dire, $ab-au = au-ab$, ou $2ab = 2au$; & par conséquent u (TU) $= b$ (AF). Mais LT en AP, rend TU en AH. Donc la premiere AH des vitesses TU (u) au commencement A du tems AT, est par tout ici égale à l'initiale AF (b) conformément à l'art. 4. du Lem. 1. pag. 195. cité pour cela dans l'art. 1. de la Solution précedente.

COROLLAIRE II.

L'équation TU (u) $= \frac{LT-ST}{LT+ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT+ST}$ trouvée dans l'art. 3. de la Solution pour les fig. 1. 2. dans lesquelles AH est (*hyp.*) moindre que AB, fait voir que les vitesses restantes TU (u) y doivent toûjours croître depuis la premiere AH (b); puisque le raport $\frac{LS}{LT+ST}$ ou $\frac{LT-ST}{LT+ST}$ croît avec LS ou LT, qui y croissent (*Solut. art.* 2. *nomb.* 2.) à l'infini du côté de C.

COROLLAIRE III.

Au contraire l'équation TU (u) $= \frac{LT+ST}{LT-ST} \times AB = \frac{LS \times AB}{LT-ST}$ trouvée aussi dans l'art. 3. de la Solution pour la fig. 3. dans laquelle AH est (*hyp.*) plus grande que AB, fait voir que les vitesses restantes TU (u) y doivent toûjours diminuer depuis la premiere AH (b); puisque le raport $\frac{LT-ST}{LT+ST}$ croissant (*Corol.* 2.) avec les LT, le raport $\frac{LT+ST}{LT-ST}$ doit au contraire diminuer à mesure que ces LT aug-

mentent, c'est-à-dire (*Solut. art.* 2. *nomb.* 2.) à l'infini du côté de *C*.

COROLLAIRE IV.

Quoique les *TU* croissent à l'infini (*Corol.* 2.) depuis *AH* du côté de *C* dans les fig. 1. 2. & qu'elles diminuent au contraire à l'infini (*Corol.* 3.) du côté de *C* dans la fig. 3. Celles des fig. 1. 2. ne peuvent jamais être plus grandes, ni celles de la fig. 3. moindres que *AB*, même quand *AT* seroit infinie; puisque *AT* infinie rendant (*Solut. art.* 2. *nomb.* 2.) *LT* pareillement infinie, & conséquemment la finie *ST* nulle par rapport à *LT*, l'équation génerale $TU = \frac{LT \mp ST}{LT \pm ST} \times AB$ trouvée dans la Solut. art. 3. pour tous les cas des fig. 1. 2. 3. se réduiroit alors à $TU = \frac{LT}{LT} \times AB = AB$. Ce qui fait voir que dans quelque cas que ce soit, la Courbe *HUC* des vitesses restantes *TU* (*u*) ne peut arriver jusqu'en *BC* parallele à *ATC*, qu'à une distance infinie de *AB* perpendiculaire à ces paralleles par l'origine *A* des tems ou des abscisses *AT*; & qu'ainsi dans tous les cas imaginables cette droite *BC* doit être une asymptote de la Courbe *HUC* des vitesses *TU* (*u*) restantes ici malgré les résistances supposées. Ce qu'on a déja vû dans le Corol. 1. de la pag. 198. pour le cas de la fig. 1. où ces vitesses commencent (*hyp.*) à zero.

COROLLAIRE V.

Puisque *TU* en *AH*, y rend par tout (*Corol.* 1.) $u = b$, l'équation (*Solut. art.* 1.) $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$ de la Courbe *HUC*; doit s'y changer en $dt = \frac{aadu}{aa - bb}$; Ce qui fait voir que cette Courbe doit rencontrer *AB* (prolongée où besoin sera) en *H* sous un angle *BHU* dont le sinus soit à celui de son complement à un droit : : $aa . aa - bb$.

COROLLAIRE VI.

Pour la Courbe *ARC*, dont (*Solut. art.* 1. & 5.) l'équation est

eſt $dt = \frac{aadr}{b+t-r^2}$, elle doit rencontrer ſon axe en *A*, ſous un angle *TAR* dont le ſinus ſoit à celui de ſon complement : : *bb*. *aa*. Puiſque *TR* (*r*) en *A*, rendant $r=0$, & $t=0$, réduit cette équation à $dt = \frac{aadr}{bb}$. Et les *dr* croiſſant ou décroiſſant ici avec les $b+t-r$ (*u* ou *TU*) correſpondantes, cette Courbe *ARC* tournera ſa convexité ou ſa concavité en même ſens ou du même côté que la Courbe *HUC* tournera la ſienne.

COROLLAIRE VII.

On vient de voir dans le Corol. 4. que lorſque *AH* (*fig*. 1. 2.) eſt moindre que *AB*, les viteſſes *TU* (*u*) croiſſent toûjours juſqu'à *BC*; & que lorſque *AH* (*fig*. 3.) eſt plus grande que *AB*, ces viteſſes *TU* décroiſſent toûjours juſqu'à la même *BC*, à laquelle ce Corol. 4. fait voir qu'elles n'aboutiront, ou ne deviendront égales à *AB* de part & d'autre qu'après un tems infini *AT* (*t*), qui à la fin rendra *TU* (*u*) $=$ *AB* (*a*), & changera ainſi l'équation $dt = \frac{aadu}{aa-uu}$ de la Courbe *HUC* en $dt = \frac{aadu}{aa-aa} = \frac{aadu}{0}$. Donc alors les accroiſſemens ou décroiſſemens *du* ſe trouvant nuls, ſi le mouvement continuoit, ce ſeroit après cela d'une viteſſe conſtante $=$ *AB* (*a*) qui le rendroit uniforme. Auſſi ce cas de $u=a$, changeant l'équation $v-r=u$ trouvée dans le Lem. 1. art. 1. pag. 194. en $v-r=a$, donneroit alors $dv-dr=0$, ou $dv=dr$, c'eſt-à-dire (*remarq*. 1. *pag*. 209.) la peſanteur du Mobile égale à la réſiſtance que lui feroit alors le milieu ſuppoſé, en regardant cette peſanteur conſtante comme cauſe de l'acceleration primitive (*dv*) continuellement ajoûtée à la viteſſe initiale *AH* (*b*) laquelle fût ici de projection verticale de haut en bas; & cette égalité de la peſanteur du mobile avec la réſiſtance qui s'oppoſeroit ici à ſa viteſſe *AB* (*a*), empêchant également l'une & l'autre de rien changer à cette viteſſe, cette même viteſſe non-ſeulement reſteroit uniforme tant que le mouvement continuëroit dans le milieu ſuppoſé; mais encore ſeroit la plus grande (appellée *terminale* par

M. Hughens) que le mobile y pût jamais avoir. Ainsi au langage de M. Hughens la vitesse *AB* (a), à laquelle dans tous les cas les vitesses restantes *TU* (u) se réduiroient ici après un tems infini *AT* (t), seroit égale à la terminale du mobile dans le milieu supposé résistant en raison des quarrés de ces vitesses.

COROLLAIRE VIII.

Donc si la vitesse *AH* (b) de projection verticale de haut en bas, se trouvoit égale à la terminale *AB* (a) du corps jetté, c'est-à-dire (*Corol.* 7.) à la plus grande qu'il pût jamais acquerir en vertu de sa seule pesanteur constante en tombant dans le milieu supposé malgré les résistances supposées de ce milieu; le mouvement de ce corps y seroit uniforme à l'infini dès le premier instant de sa chute : puisque ce cas de u (b) $=a$ dès ce premier instant, qui rend dès-lors (comme dans le Corol. 7.) la résistance du milieu égale à la pesanteur du mobile, rendant ce corps par leur équilibre comme s'il n'avoit alors aucune pesanteur, ni le milieu aucune résistance, rendroit aussi pour lors la vitesse de projection hors d'état d'être augmentée ni retardée, la pesanteur devant l'emporter sur la résistance pour le premier; & la résistance sur la pesanteur pour le second; ce que leur égalité une fois arrivée ne permet plus.

COROLLAIRE IX.

Cette égalité de la pesanteur constante du mobile avec la résistance du milieu supposé, rendant (*remarq.* 1. *pag.* 209.) $dr=dv=dt$, fait voir aussi qu'alors la Courbe *ARC* des résistances totales dégénere en une ligne droite parallele à *FVC*, & donne par-là $AF=RV$ (*Solut.*) $=TU$: De sorte que le Corol. 1. donnant aussi $AF=AH$ (*hyp.*) $=AB$, on retrouve encore ici *TU* (u) $=$ *AB* (a) conformément au précedent Corol. 8. C'est-à-dire (comme dans ce Corol. 8.) que dès que la vitesse d'un corps jetté verticalement de haut en bas, sera égale à sa terminale, le mouvement en sera uniforme pour toujours après cela. Par conséquent lorsque la vitesse *AF* ou *AH* de projection

verticale de haut en bas, ſera égale à la terminale *AB* du corps ainſi jetté, la Courbe *HUC* dégénerera en une ligne droite confonduë avec ſon aſymptote *BC*.

COROLLAIRE X.

Mais ſi la force ou viteſſe *AH* ou (*Corol.* 1.) *AF* (b) de projection étoit nulle, en ſorte que le mobile n'eût plus que ſa peſanteur pour deſcendre, ainſi que dans le Prob. de la pag. 196. Le point *H* ſe trouvant alors en *A* auſſi-bien que le point *F*, la Courbe *HUC* ſeroit non-ſeulement la même, mais auſſi dans la même poſition que dans ce Prob. de la pag. 196. qu'on voit n'être qu'un cas de celui-ci, lequel par conſéquent donneroit auſſi tous les Corollaires qu'on a tirés de celui-là, en faiſant ainſi *AH* (b) $=$ o dans tout ce qu'on voit ici & dans la ſuite. FIG. I.

COROLLAIRE. XI.

Il ſuit encore en géneral des Corol. 4. & 7. que les viteſſes *TU* (u) reſtantes de celle de projection verticale de haut en bas, & des primitivement accélerées dont elle eſt (*hyp.*) augmentée à la fin des tems *AT*, doivent être ici à la plus grande *AB* (a) que le mobile y puiſſe jamais avoir en vertu de ſa ſeule peſanteur, même après un tems infini :: *TU*. *AB*. Et qu'ainſi (*Lem.* 2. *pag.* 196.) les eſpaces ici parcourus en vertu de ces viteſſes reſtantes pendant les tems *AT* (t) doivent être à ce que le mobile en parcouroit en même tems d'une viteſſe uniforme égale à ſa terminale ou à la plus grande *AB* :: *ATUH*. *ATSB*. FIG. I. II. III.

COROLLAIRE XII.

Quant à la comparaiſon entr'eux des eſpaces ici parcourus en vertu des viteſſes reſtantes *TU* (u) pendant les tems *AT* (t), on voit (*Lem.* 2. *pag.* 196.) que ces eſpaces doivent être ici entr'eux comme les aires correſpondantes *ATUH* ($\int udt$). Mais la Solution (*art.* 1.) donnant $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$ pour l'équation de la Courbe *HUC* des viteſſes reſtantes (u), l'on aura $\int udt$ (*ATUH*) $= \int \frac{aaudu}{aa - uu}$. Cela étant,

I. Soit comme dans l'art. 2. du Corol. 6. de la pag. 200.

$yy = aa - uu$, ou $y = \sqrt{aa - uu}$. L'on aura $ydy = -udu$; & par conséquent $\int \frac{aaudu}{aa - uu}$ ($ATUH$) $= - \int \frac{aaydy}{yy} = - \int \frac{aady}{y} =$ $= - aa \times ly + q = - aa \times l\sqrt{aa - uu} + q$. Mais le cas de $AT = 0$, qui rend aussi $ATUH = 0$, & TU (u) $= AH$ (b), réduit cette intégrale à $0 = - aa \times l\sqrt{aa - bb} + q$, d'où résulte $q = aa \times l\sqrt{aa - bb}$. Donc cette intégrale complette sera $ATUH = aa \times l\sqrt{aa - bb} - aa \times l\sqrt{aa - uu} = aa \times l\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ pour tous les cas. Donc aussi (*Lem.* 2. *pag.* 196.) les espaces parcourus pendant les tems AT, seront par tout ici entr'eux comme les $aa \times l\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ correspondantes, c'est-à-dire, comme les Logarithmes des fractions correspondantes $\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$.

II. Il est à remarquer que les termes $\sqrt{aa - bb}$, $\sqrt{aa - uu}$, de ces fractions ne sont réels que dans le cas de $a > b$, & de $a > u$, exprimé dans les fig. 1. 2. Et que dans le cas de $a < b$, & de $a < u$, exprimé dans la fig. 3. l'un & l'autre de ces termes est imaginaire : cependant la fraction $\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ faite de ces imaginaires, ne laisse pas, non plus que son Logarithme $l\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$, d'être aussi réelle dans ce cas de la fig. 3. que dans celui des fig. 1. 2. où ces termes sont tous deux réels. Pour le voir il n'y a qu'à multiplier l'un & l'autre par -1, & l'on aura $\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}} = \frac{\sqrt{-aa + bb}}{\sqrt{-aa + uu}} = \frac{\sqrt{bb - aa}}{\sqrt{uu - aa}}$, fraction aussi réelle dans le cas de $a < b$, & de $a < u$, de la fig. 3. que $\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ dans celui de $a > b$, & de $a > u$, des fig. 1. 2.

Donc (*art.* 1.) les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT (t) seront par tout entr'eux comme les grandeurs $aa \times l\frac{\sqrt{aa - bb}}{\sqrt{aa - uu}}$ correspondantes dans les fig.

1. 2. & comme les correſpondantes $aa \times l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3. ou ſimplement (à cauſe de la conſtante) comme les Logarithmes correſpondans $l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & comme les correſpondans $l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3.

III. Mais ſi du centre A, & du demi-diametre AB (a), on fait le quart de cercle $B\delta\beta$ dans les fig. 1. 2. Et l'hyperbole équilatere $B\delta I$ dans la fig. 3. Leſquels arcs ſoient rencontrés en Q, δ, par HQ, $U\delta$, paralleles à la droite CTA, laquelle prolongée dans les fig. 1. 2. rencontre auſſi le quart de cercle $B\delta\beta$ en β, en ſe confondant avec HQ dans la fig. 1. Soient menés les raïons AQ, $A\delta$, dans le quart de cercle des fig. 1. 2. dans leſquelles, & dans la fig. 3. G eſt le point où $U\delta$ rencontre AB prolongée dans cette fig. 3. Cela fait, aïant (*Solut.*) dans toutes ces trois figures $AB = a$, $AH = b$, $AG = TU = u$, & les deux premieres fig. 1. 2. aïant de plus $A\delta = AB = a = AQ$; le quart de cercle $B\delta\beta$ y donnera $HQ = \sqrt{aa-bb}$, $G\delta = \sqrt{aa-uu}$; au contraire dans la fig. 3. l'hyperbole $B\delta I$ donnera $HQ = \sqrt{bb-aa}$, $G\delta = \sqrt{uu-aa}$. Donc on aura ici $l\frac{HQ}{G\delta} = l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & $l\frac{HQ}{G\delta} = l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3. Mais l'art. 2. vient de donner $l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 1. 2. & $l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 3. pour l'expreſſion des eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT. Donc ces eſpaces ſeront auſſi entr'eux dans toutes ces trois figures, c'eſt-à dire dans tous les cas poſſibles, comme les Logarithmes $l\frac{HQ}{G\delta}$ des fractions correſpondantes $\frac{HQ}{G\delta}$, ou (ce qui revient au même) comme les Logarithmes des raiſons de l'ordonnée conſtante HQ aux variables $G\delta$ correſpondantes à ces tems AT.

IV. Mais après avoir pris $A\beta = AB = a$ ſur CTA prolongée dans la fig. 3. comme ci-deſſus dans les fig. 1. 2. ſoit

imaginée dans toutes trois par β une Logarithmique $I\beta O$ d'une soûtangente $= A\beta\,(a) = 1$ sur l'asymptote BA prolongée vers O, de laquelle cette Logarithmique s'approche de ce côté-là, étant rencontrée en γ, μ, par $Q\gamma$, $\delta\mu$, paralleles à BO; desquels points γ, μ, soient les ordonnées $\gamma\varphi$, $\mu\psi$, paralleles à βA, & qui rencontrent BO en φ, ψ. Cela fait, puisque (*hyp.*) $A\beta = 1$, l'on aura $A\psi = -l\psi\mu = -lG\delta$, & $A\varphi = \mp l\varphi\gamma \mp lHQ$, ou $\mp A\varphi = l\varphi\gamma = lHQ$, les signes supérieurs étant pour les fig. 1. 2. & les inférieurs pour la fig. 3. Donc $l\frac{HQ}{G\delta} = lHQ - lG\delta = \mp A\varphi + A\psi = \varphi\psi$. Par conséquent (*art.* 3.) les espaces parcourus pendant les tems AT, seront pareillement ici comme les abscisses $\varphi\psi$ correpondantes sur BO depuis l'Origine φ vers O dans tous les cas.

V. La même chose se peut encore trouver indépendemment de ce qui précede, en imaginant dans les fig. 1. 2. 3. une petite droite mn parallele à $\delta\mu$ infiniment près d'elle, & qui rencontre $\mu\psi$, βO, en m, n. Car ces trois figures donneront $\varphi\gamma = HQ = \sqrt{\pm aa \mp bb}$, $\psi\mu = G\delta = \sqrt{\pm aa \mp uu}$, & conséquemment $\mu m = \frac{\mp udu}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$: les signes supérieurs étant encore par tout ici pour les figures 1. 2. & les signes inférieurs pour la figure 3. De sorte que la Logarithmique $I\beta O$ aïant (*hyp.*) sa soûtangente $= A\beta = a = 1$, l'on aura par tout ici $\mu\psi\,(\sqrt{\pm aa \mp uu}) . a :: \mu m \left(\frac{\mp udu}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}\right) . -mn = \frac{\mp audu}{\pm aa \mp uu}$. c'est-à-dire (en multipliant par -1) $mn = \frac{\pm audu}{\pm aa \mp uu}$. Par conséquent $\int\frac{\pm audu}{\pm aa \mp uu} = \int mn = A\psi + q$, ou $a \times A\psi + q = \int\frac{\pm aaudu}{\pm aa \mp uu} = \int\frac{aaudu}{aa - uu} = \int udt = ATUH$. Mais le cas de $ATUH = 0$, qui rendant $G\delta$ en HQ, ou $\mu\psi$ en $\gamma\varphi$, rend $A\psi = \pm A\varphi$, réduit cette intégrale à $0 = \pm a \times A\varphi + q$, d'où résulte $q = \mp a \times A\varphi$. Donc $ATUH = a \times A\psi \pm a \times A\varphi = a \times \varphi\psi$ est cette intégrale juste & précise. Par conséquent (*Lem.* 2. *pag.* 196.) les espaces parcourus pendant les tems AT, doivent être encore par tout ici

entr'eux comme les grandeurs $a \times \varphi\psi$, ou (à cauſe de a conſtantes) comme les abſciſſes $\varphi\psi$ correſpondantes, ainſi que dans le précedent art. 4.

VI. Le raport de ces eſpaces entr'eux peut encore ſe trouver par les Methodes de M. Leibnitz, & de M. (Jean) Bernoulli pour integrer les fractions rationelles à peu près comme dans le Cor. 6. art. 6. des pag. 201. & 202. dont le cas eſt ici celui de la fig. 1. Car ces Méthodes donnant $\frac{udu}{aa-uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{a-u} - \frac{1}{2} \times \frac{du}{a+u}$, l'on aura (en intégrant) $\int \frac{aaudu}{aa-uu}$ ($\int udt$) $= -\frac{aa}{2} \times l\overline{a-u} - \frac{aa}{2} \times l\overline{a+u} + q$ dans la ſuppoſition de $a=1$, le Logarithme de $a-u$ devant y être négatif, ſoit que a ſe trouve plus grand que u comme dans les fig. 1. 2. ou qu'elle ſe trouve moindre, comme dans la fig. 3. parce que la grandeur $a-u$ ſeroit plus petite que l'unité dans le premier cas, & négative dans le ſecond. Mais celui de $\int udt$ ($ATUH$) $=0$, rendant (*Corol.* 1.) $u=b$ réduit cette intégrale à $0 = -\frac{aa}{2} \times l\overline{a-b} - \frac{aa}{2} \times l\overline{a+b} + q$, d'où réſulte $q = \frac{aa}{2} \times l\overline{a-b} + \frac{aa}{2} \times l\overline{a+b}$. Donc cette intégrale complette ſera $ATVH = \frac{aa}{2} \times l\overline{a-b} + \frac{aa}{2} \times l\overline{a+b} - \frac{aa}{2} \times l\overline{a-u} - \frac{aa}{2} \times l\overline{a+u} = \frac{aa}{2} \times l\frac{a-b}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{a+b}{a+u}$ pour tous les cas. Donc auſſi (*Lem.* 2. *pag.* 196) les eſpaces parcourus pendant des tems quelconques AT, ſeront par tout ici entr'eux comme les grandeurs $\frac{aa}{2} \times l\frac{a-b}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{a+b}{a+u}$ correſpondantes, ou ſimplement (à cauſe de la fraction conſtante $\frac{aa}{2}$) comme les correſpondantes $l\frac{a-b}{a-u} + l\frac{a+b}{a+u}$, c'eſt-à-dire, en raiſon des ſommes des Logarithmes des fractions $\frac{a-b}{a-u}$, $\frac{a+b}{a+u}$, correſpondantes.

VII. La même choſe peut ſe trouver encore par le moïen de l'équation Logarithmique $\frac{dt}{\frac{1}{2}a} = \frac{dx}{x}$, ou $dt = \frac{a}{2} \times \frac{dx}{x}$,

trouvée dans l'art. 2. de la Solution. Car cet art. 2. donnant auſſi $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$, l'on aura ici $udt = \frac{aa}{2} \times \frac{xdx - adx}{xx + ax} =$
$= \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{a+x} - \frac{a^3}{2} \times \frac{dx}{xx+ax}$.

Mais en prenant de plus $\frac{aa}{s} = x$, l'on aura $dx = -\frac{aads}{ss}$, $x + a = a + \frac{aa}{s} = \frac{as+aa}{s}$, $xx + ax = \frac{a^3 s + a^4}{ss}$; & par conſéquent $\frac{dx}{xx+ax} = \frac{-aads}{a^3 s + a^4} = -\frac{1}{a} \times \frac{ds}{a+s}$, ou $-\frac{a^3}{2} \times \frac{dx}{xx+ax} = \frac{aa}{2} \times \frac{ds}{a+s}$. Donc $udt = \frac{aa}{2} \times \frac{dx}{a+x} + \frac{aa}{2} \times \frac{ds}{a+s}$, & $\int udt = \frac{aa}{2} \times l\overline{a+x} + \frac{aa}{2} \times l\overline{a+s} + q$.

Or l'équation $u = \frac{x-a}{x+a} \times a$ donne $x = \frac{aa+au}{a-u}$: de ſorte qu'aïant auſſi $x = \frac{aa}{s}$, l'on aura pareillement ici $\frac{aa}{s} = \frac{aa+au}{a-u}$, ou $s = \frac{aa-au}{a+u}$; & de ces valeurs de x, s, il réſulte $a + x = a + \frac{aa+au}{a-u} = \frac{aa-au+aa+au}{a-u} = \frac{2aa}{a-u}$, & $a+s = a + \frac{aa-au}{a+u} = \frac{aa+au+aa-au}{a+u} = \frac{2aa}{a+u}$. Donc $\int udt = \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+u} + q$.

Mais le cas de $\int udt$ ($ATUH$) $= 0$, rendant $u = b$, réduit cette intégrale à $0 = \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-b} + \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+b} + q$, d'où réſulte $q = -\frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-b} - \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+b}$. Donc cette intégrale complette ſera $ATUH = \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-u} + \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+u} - \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a-b} - \frac{aa}{2} \times l\frac{2aa}{a+b} = \frac{aa}{2} \times l\frac{a-b}{a-u} + \frac{aa}{2} l\frac{a+b}{a+u}$, comme dans le précedent art. 6. Donc auſſi (*Lem. 2. pag.* 196.) les eſpaces parcourus ſeront encore ici, comme là, en raiſon des ſommes des Logarithmes des fractions $\frac{a-b}{a-u}$, $\frac{a+b}{a+u}$, correſpondantes.

VIII. Pour voir comment ces deux derniers articles s'accordent avec les précedens, il n'y a qu'à conſiderer que ſuivant la nature des Logarithmes, la ſomme de deux Logarithmes

Logarithmes vaut toûjours le Logarithme du produit des deux grandeurs dont ils sont Logarithmes, & que la moitié du Logarithme de ce produit vaut aussi toûjours la Logarithme de la racine de ce même produit : suivant cela on verra que $l\frac{a-b}{a-u} + l\frac{a+b}{a+u} = l\frac{\overline{a-b}\times\overline{a+b}}{\overline{a-u}\times\overline{a+u}} = l\frac{aa-bb}{aa-uu}$, & $\frac{1}{2}\times l\frac{aa-bb}{aa-uu} = l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$. Donc $\frac{1}{2}\times l\frac{a-b}{a-u} + \frac{1}{2}\times l\frac{a+b}{a+u} =$ $= l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$. Par conséquent les espaces exprimés par le premier membre de cette derniere égalité dans les art. 6.7. sont les mêmes que le second membre de cette même égalité exprime dans les articles qui les précedent. Ainsi tous ces articles sont parfaitement d'accord entr'eux touchant les espaces dont ils donnent les rapports.

IX. Ces mêmes espaces se trouveront aussi par des *series* ou suites infinies, en continuant à l'infini la division de $\frac{aaudu}{aa-uu}$ comme l'on a fait dans l'art. 8. du Corol. *6*. pag. 203. Car cette division infinie donnant $\frac{aaudu}{aa-uu}$ (*sudt*) $= \pm udu \pm \frac{u^3du}{aa} \pm \frac{u^5du}{a^4} \pm \frac{u^7du}{a^6} \pm \frac{u^9du}{a^8} \pm$ &c. dont les signes supérieurs sont pour les fig. 1. 2. dans lesquelles $a > u$ rend la differentielle de $\frac{aaudu}{aa-uu}$ positive, & les inferieurs pour la fig. 3. dans laquelle $a < u$ rend cette differentielle négative ; l'on aura, en intégrant, *sudt* (*ATUH*) $= \pm \frac{uu}{2} \pm \frac{u^4}{4aa} \pm \frac{u^6}{6a^4} \pm \frac{u^8}{8a^6} \pm \frac{u^{10}}{10a^8} \pm$ &c. $+ q$. Mais le cas de *ATUH* $= 0$, rendant $u = b$, réduit cette intégrale à $0 = \pm \frac{bb}{2} \pm \frac{b^4}{4aa} \pm \frac{b^6}{6a^4} \pm \frac{b^8}{8a^6} \pm \frac{b^{10}}{10a^8} \pm$ &c. $+ q$; d'où résulte $q = \mp \frac{bb}{2} \mp \frac{b^4}{4aa} \mp \frac{b^6}{6a^4} \mp \frac{b^8}{8a^6} \mp \frac{b^{10}}{10a^8} \mp$ &c. Donc cette intégrale complette sera *ATUH* $= \pm \frac{uu}{2} \pm \frac{u^4}{4aa} \pm \frac{u^6}{6a^4} \pm \frac{u^8}{8a^6} \pm \frac{u^{10}}{10a^8} \pm$ &c.... $\mp \frac{bb}{2} \mp \frac{b^4}{4aa} \mp \frac{b^6}{6a^4} \mp \frac{b^8}{8a^6} \mp \frac{b^{10}}{10a^8} \mp$ &c. Les signes supérieurs étant encore pour le cas des fig. 1. 2. & les inferieurs pour celui de la fig. 3. Donc (*Lem. 2. p.* 196.) les espa-

ces parcourus pendant des tems quelconques AT (t), seront encore ici dans tous les cas comme ces *series* ou suites correspondantes continuées à l'infini.

COROLLAIRE XIII.

FIG. IV. V. VI. Le raport de ces espaces parcourus pendant les tems AT, peut encore se trouver par le moïen d'une hyberbole équilatere IXO qui passe par l'angle X d'un quarré $ABYX$ fait sur AB, entre les asymptotes BI, BA prolongée vers O, tout ce qu'on voit des fig. 1. 2. 3. dans les fig. 4. 5. 6. y demeurant le même que là. Car si par le point Q, & par chaque point δ, dans lesquels le quart de cercle $B\delta\beta$ des fig. 4. 5. & l'hyperbole $B\delta I$ de la fig. 6. sont rencontrés par HQ, $U\delta$, paralleles à BI, on mene les ordonnées à MN, & RZ avec son infiniment proche rz, lesquelles rencontrent l'hyperbole IXO en N, Z, z, & son asymptote BI en M, R, r; cette hyperbole donnera $RZ = \frac{AB \times AX}{BR} =$ $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$, à cause que (*hyp.*) $AX = AB = a$, & que $BR = G\delta = \sqrt{\pm aa \mp uu}$, dont les signes superieurs sont pour les fig. 4. 5. & les inférieurs pour la fig. 6. Ce qui donne aussi $Rr = \frac{udu}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$, en differentiant par $+$ les $-uu$ ($-TU \times TU$) dans les fig. 4. 5. dans lesquelles les TU croissent alternativement avec les BR ou $G\delta$, au lieu qu'elles croissent ou plûtôt décroissent ensemble dans la fig. 6. dans laquelle $+uu$ ($TU \times TU$) vient pour cela d'être differentiée par son propre signe $+$. Donc aussi $\pm Rr = \frac{\pm udu}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$. Par conséquent $\pm RZ \times Rr$ ($ZRrz$) $= \frac{\pm aaudu}{\pm aa \mp uu} = \frac{aaudu}{aa - uu}$ (*Corol.* 12.) $= udt$. Donc $\int udt$ ($ATUH$) $= \pm \int RZ \times Rr = \mp OBRZO + q$, en changeant $\pm$ en $\mp$, à cause que $OBRZO$ diminuë par tout ici à mesure que $ATUH$ croît. Mais le cas de $ATUH = 0$, rendant TU en AH, RZ en MN, & $OBRZO = OBMNO$, réduit cette intégrale à $0 = \mp OBMNO + q$, d'où résulte $q = \pm OBMNO$. Donc cette intégrale complette est $ATUH = \pm OBMNO \mp OBRZO = \pm NMRZ$ (à cause que

du des fig. 4. 5. se change en—*du* dans la fig. 6.) $= NMRZ$. Donc auſſi (*Lem.* 2. *pag.* 196.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems *AT*, ſont entr'eux comme les aires hyperboliques *NMRZ* correſpondantes.

COROLLAIRE XIV.

Outre les manieres précedentes (*Corol.* 12. & 13.) de trouver les eſpaces ici parcourus pendant des tems quelconques *AT*, en voici encore une pour les trouver auſſi dans tous les cas poſſibles par le moïen d'une hyperbole équilatere quelconque $D\varpi I$ ajoûtée preſentement aux trois précedentes figures entre les aſymptotes orthogonales *AB*, *BI*, dans les fig. 1. 2. après y avoir prolongé *CB* vers *I*; & entre les orthogonales *BK*, *BI*, dans la fig. 3. après y avoir auſſi prolongé *CB* vers *I*, & de plus *AB* vers *K*: c'eſt-à-dire en géneral (après avoir pris $B\Delta = AB$ dans la fig. 3. & avoir ajoûté Δ en *A* dans les fig. 1. 2. pour l'uniformité de l'expreſſion) par le moïen d'une hyperbole équilatere quelconque $D\varpi I$ entre les aſymptotes orthogonales *BI*, $B\Delta$, dans les fig. 1. 2. 3. Pour le voir, FIG. I. II. III.

I. Soient priſes par tout dans les fig. 1. 2. 3. $A\Pi . AG :: AG . AB$. Et $AK . AH :: AH . AB$. Enſuite après avoir mené des points Δ, Π, *K*, les ordonnées ΔD, $\Pi\varpi$; $K\Upsilon$, paralleles à *BI*, & qui rencontrent l'hyperbole $D\varpi I$ en *D*, ϖ, Υ; ſoient encore (comme ci-deſſus) $AH = b$, $AT = t$, $AG\ (TU) = u$; & de plus les variables $A\Pi = m$, $\Pi\varpi = n$, avec les conſtantes $\Delta D = c$, $B\Delta\ (AB) = a$: delà réſulte $B\Pi = a - m$ dans les fig. 1. 2. & $B\Pi = m - a$ dans la fig. 3. c'eſt-à-dire en génerale $B\Pi = \pm a \mp m$, dont les ſignes ſuperieurs ſont pour les fig. 1. 2. & les inférieurs pour la fig. 3.

II. Cela poſé, l'on aura $AB\ (a) . AG\ (u) :: AG\ (u) . A\Pi\ (m) = \frac{uu}{a}$. Et conſéquemment auſſi $dm = \frac{2udu}{a}$. Mais l'hyperbole $D\varpi I$ donne auſſi $B\Pi\ (\pm a \mp m) . B\Delta\ (a) :: \Delta D\ (c) . \Pi\varpi\ (n) = \frac{ac}{\pm a \mp m}$ (en multipliant le haut & le bas de cette fraction par ± 1) $= \frac{\pm ac}{a - m}$ (à cauſe que $m = \frac{uu}{a}$

donne $a - m = a - \frac{uu}{a} = \frac{aa - uu}{a}) = \pm \frac{aac}{aa - uu}$. Donc en géneral $ndm = \pm \frac{2anudu}{aa - uu}$, ou (en multipliant le tout par $\pm \frac{a}{2c}$) $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aaudu}{aa - uu}$ (*Corol.* 12.) $= udt$. Par conséquent, en intégrant, l'on aura $\int udt$ ($ATUH$) $\pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \pm \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi + q$, les $YK\Pi\varpi$ croissant avec les $ATUH$. Mais le cas de $ATUH = 0$, qui rendant $AG = AH$, rend aussi (*art.* 1.) $A\Pi = AK$, & conséquemment $YK\Pi\varpi = 0$, réduit cette intégrale à $0 = 0 + q$. Donc $ATUH$ ($\int udt$) $= \pm \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi$ (à cause que du des fig. 1. 2. se change en $-du$ dans la fig. 3.) $= \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi$ sera cette intégrale juste & précise. Donc aussi (*Lem.* 2. *pag.* 196.) les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des vitesses restantes ou effectives TU(u) seront entr'eux comme les aires hyperboliques $YK\Pi\varpi$ correspondantes.

III. Il est manifeste qu'au lieu de prendre $\int udt$ ($ATUH$) $= \pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \pm \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi + q$ pour l'intégrale cherchée dans l'art. 2. comme l'on y vient de faire, on y auroit pû prendre aussi $\int udt$ ($ATUH$) $= \pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \frac{a}{2c} \times D\Delta\varpi\Pi + q$ pour cette intégrale. Car puisque le cas de $ATUH = 0$, qui rend (*art.* 2.) $A\Pi = AK$, & conséquemment $D\Delta\Pi\varpi = \pm D\Delta KY$, sçavoir $D\Delta\Pi\varpi = D\Delta KY$ dans les fig. 1. 2. où ces grandeurs sont également positives, & $D\Delta\Pi\varpi = - D\Delta KY$ dans la fig. 3. où la seconde de ces grandeurs est négative par rapport à la premiére ; réduiroit la seconde intégrale $ATUH = \frac{a}{2c} \times D\Delta\Pi\varpi + q$ à $0 = \pm \frac{a}{2c} \times D\Delta KY + q$, d'où résulte $q = \mp \frac{a}{2c} \times D\Delta KY$: il est, dis je, manifeste que cette seconde intégrale complette seroit $ATUH = \frac{a}{2c} \times D\Delta\Pi\varpi \mp \frac{a}{2c} \times D\Delta KY = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi$, c'est-à-dire, encore $ATUH = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi$, de même que de la premiere $ATUH = \pm \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi + q$ dans l'art. 2.

IV. Il est encore visible qu'on auroit aussi trouvé la même intégrale complette en prenant $\int udt$ ($ATUH$) $= \pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\varpi I + q$. Car puisque le cas de $ATUH = 0$, qui rend (*art.* 2.) $A\Pi = AK$, & conséquemment $IB\Pi\varpi I = IBKYI$, réduiroit cette intégrale à $0 = -\frac{a}{2c} \times IBKYI + q$, d'où résulteroit $q = \frac{a}{2c} \times IBKYI$; cette intégrale complette seroit encore ici $ATUH = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\varpi I + \frac{a}{2c} \times IBKYI = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi$, comme dans les art. 2. 3.

V. Donc (*art.* 2. 3. 4.) les trois intégrales primitives $ATUH = \pm \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi + q$, $ATUH = \frac{a}{2c} \times D\Delta\Pi\varpi + q$, $ATUH = -\frac{a}{2c} \times IB\Pi\varpi I + q$, donneront également ici $ATUH = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi$: c'est-à-dire par tout (*Lem.* 2. *pag.* 196.) que les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT (t) en vertu des vitesses TU (u), seront entr'eux comme les aires hyperboliques correspondantes $YK\Pi\varpi$.

VI. Donc aussi le cas de la vitesse AF ou (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 195.) $AH = 0$, c'est-à-dire des vitesses commencées à zero, rendant (*art.* 1.) $AK = 0$, & conséquemment KY en AD dans la fig. 1. les espaces ici parcourus pendant des tems quelconques AT, seront en ce cas entr'eux comme les aires hyperboliques correspondantes $DA\Pi\varpi$, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 9. de la pag. 205. FIG. I.

COROLLAIRE XV.

I. Si l'on considere présentement que $\frac{du}{aa - uu} = \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a - u} + \frac{1}{2a} \times \frac{du}{a + u}$, & que la Solution donne (*art.* 1.) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$, l'on aura ici en géneral $dt \left(\frac{aadu}{aa - uu}\right) = \frac{a}{2} \times \frac{du}{a - u} + \frac{a}{2} \times \frac{du}{a + u}$, dont l'intégrale est t (AT) $= -\frac{a}{2} \times l\overline{a - u} + \frac{a}{2} l\overline{a + u} + q = \frac{a}{2} \times \frac{a + u}{a - u} + q$, le Logarithme de $a - u$ devant être FIG. I. II. III.

négatif pour la raison raportée dans l'art. 6. du Corol. 12. Mais le cas de $A\,(t)=0$, qui rend $u=b$, réduit cette intégrale à $0=\frac{a}{2}\times l\frac{a+b}{a-b}+q$, d'où résulte $q=-\frac{a}{2}\times l\frac{a+b}{a-b}$. Donc cette intégrale complette sera $AT=\frac{a}{2}\times l\frac{a+u}{a+u}-\frac{a}{2}l\frac{a+b}{a-b}$. Donc les tems $AT\,(t)$ emploïés à parcourir les espaces trouvés dans les Corol. 12. 13. 14. y seront en géneral, c'est-à-dire, dans tous les cas des fig. 1. 2. 3. comme les grandeurs correspondantes $\frac{a}{2}\times l\frac{a+u}{a-u}-\frac{a}{2}\times l\frac{a+b}{a-u}$, ou simplement (à cause de $\frac{a}{2}$ constante) comme les differences $l\frac{a+u}{a-u}-l\frac{a+b}{a-b}$ des Logarithmes $l\frac{a+u}{a-u}$, $l\frac{a+b}{a-b}$, correspondans.

II. Cela suit encore de l'équation Logarithmique $\frac{dt}{\frac{1}{2}a}=\frac{dx}{x}$ trouvée dans l'art. 2. de la Solution en y supposant $\frac{x-a}{x+a}\times a=u$. Car cette supposition donnant $ax-aa=xu+au$, ou $ax-xu=aa+au$, d'où résulte $x=\frac{aa+au}{a-u}$; l'équation $\frac{dt}{\frac{1}{2}a}=\frac{dx}{x}$; ou $dt=\frac{a}{2}\times\frac{dx}{x}$, donnera encore en géneral (en intégrant) $t\,(AT)=\frac{a}{2}\times lx+q=\frac{a}{2}\times l\frac{aa+au}{a-u}+q$ (en prenant $a=1$) $=\frac{a}{2}\times l\frac{a+u}{a-u}+q$; d'où résultera (comme dans l'art. 1.) $AT\,(t)=\frac{a}{2}\times l\frac{a+u}{a-u}-\frac{a}{2}\times l\frac{a+b}{a-b}$ pour cette intégrale complette; & conséquemment les tems $AT\,(t)$ emploïés à parcourir les espaces trouvés dans les précédens Corol. 12. 13. 14. seront encore ici en même raison que dans l'art. 1.

III. Ces art. 1. & 2. fournissent encore une nouvelle construction de la Courbe HUC des vitesses restantes (u) malgré les résistances supposées. Car si après avoir fait les orthogonales AB, ATC, on prend les abscisses AG de la premiere AB (prolongée du côté de B dans la fig. 3.) pour ces vitesses restantes ou actuelles (u), & que de la même origine A on prenne sur ATC les abscisses $AT=$

$= \frac{a}{2} \times l\, \frac{a+u}{a-u} - \frac{a}{2} \times l\, \frac{a+b}{a-b} = \frac{a}{2} \times l\, \frac{\overline{a+u} \times \overline{a-b}}{\overline{a-u} \times \overline{a+b}}$ il ſuit en general des art. 1. 2. que la ligne *HUC*, qui paſſera par tous les points *U* des parallelogrammes rectangles *AGUT* faits chacun des deux coordonnées *AG* (u), *AT* (t), ainſi trouvées, ſera la Courbe cherchée des viteſſes effectives ou reſtantes (u), laquelle ſervira ici, comme dans l'art. 5. de la Solution à conſtruire l'autre Courbe *ARC* des réſiſtances totales ou des viteſſes perduës.

IV. De ce que (*art.* 3.) $AT = \frac{a}{2} \times l\, \frac{\overline{a+u} \times \overline{a-b}}{\overline{a-u} \times \overline{a+b}}$, il eſt encore manifeſte que le cas de $u=a$, rendant $\frac{a+u}{a-u} = \frac{2a}{0}$, rendra auſſi pour lors $AT\ (t) = \frac{a}{2} \times l\, \frac{2a \times \overline{a-b}}{0 \times \overline{a+b}} = \frac{a}{2} \times l\, \frac{2aa-2ab}{0}$ infini : c'eſt-à-dire non-ſeulement qu'il faudroit ici dan toutes les fig. 1. 2. 3. un tems infini pour rendre u (*TU*) $= a$ (*AB*) ; mais encore que l'on y auroit u (*TU*) $= a$ (*AB*) à la fin d'un tel tems, pendant tout lequel les viteſſes *TU* (*Corol.* 2. 3.) augmenteroient ou diminuëroient toûjours juſqu'à ce qu'elles fuſſent enfin devenuës égales à cette terminale *AB*. D'où il réſulte encore que *BC* doit être une aſymptote de la Courbe *HUC* dans tous les cas ; & que la viteſſe ne peut être ici uniforme depuis le commencement juſqu'à la fin, que lorſque la premiere *AH* (b) eſt égale à la terminale *AB* (a) ainſi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 4. 7. 8. 9. dont ceci eſt encore une preuve nouvelle.

L'équation $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$ *de la Courbe* HUC *des viteſſes reſtantes* (u) *étant ici* (Solut. art. 1.) *la même que dans l'art.* 2. *de la Solut.* 1. *du Probl. des pag* 196. 197. *avec cette ſeule difference que le cas de* AT (t) = 0, *qui rend là* TU (u) = 0, *rend ici* TU (u) = AH (b) ; *il eſt manifeſte que les deux Remarques faites ſur ce Problême-là dans les pag.* 209. 210. 211. *touchant le rapport qu'y ont entr'elles* la peſanteur du mobile, la réſiſtance qui s'oppoſe à ſa chute à chaque inſtant ; & la difference ou l'excès de force dont cette peſanteur ſurpaſſe cette

résistance : *il est dis je, manifeste que ces deux Remarques des pag.* 209.210.211. *conviennent aussi en tout à ce Problême-ci, excepté que le cas de* $t=0$, *rend là* $u=0$, *& ici* $u=b$. *Ce seroit donc une repetition inutile que de les raporter ici.*

SCHOLIE.

I. Pour ce qui est de la Courbe *KEC* des résistances instantanées (dr), dont les ordonnées sont (*hyp.*) $ET=z$ $(dr)=\frac{uu}{a}$, on trouvera (comme dans le Schol. de la pag. 211.) que son équation est $dt=\frac{aadz}{2a\sqrt{iz}-2z\sqrt{az}}$. Mais cette équation, qui dans le Schol. de la pag. 211. faisoit passer cette Courbe par *A*, la fait passer ici par *K* dans tous les cas possibles, aïant son ordonnée $AK\ (z)=\frac{bb}{a}$ (*hyp.*) $=\frac{AF\times AF}{AB}$ (*Lem.* 1. *art.* 4 *pag.* 195.) $=\frac{AH\times AH}{AB}$, c'est-à-dire (*Corol.* 14. *art.* 1.) la même que l'abscisse asymptotique *AK* de l'hyperbole $\Upsilon\varpi I$; puisque $u=b$ (*Corol.* 1.) en *A*, y rend $z\left(\frac{uu}{a}\right)=\frac{bb}{a}$.

II. Par la même raison l'on aura par tout $TE=A\Pi$; puisque (*hyp.*) $TE=z=\frac{uu}{a}$, & que (*Corol.* 14. *art.* 1.) $A\Pi=\frac{AG\times AG}{AB}=\frac{TV\times TV}{AB}=\frac{uu}{a}$. D'où l'on voit que le point *E* de rencontre des droites $\varpi\Pi$, *TU*, prolongées de ce côté-là, sera un des points de la Courbe *KEC*; & ainsi de tous ses autres points à l'infini.

III. on voit aussi de là, suivant le Corol. 14. que si l'on eût tracé d'abord la Courbe *KEC* en y prenant par tout $TE=\frac{TV\times TV}{AB}$ correspondante, c'est-à-dire, *TE* troisiéme proportionnelle à *AB*, *TU* correspondante; & qu'après avoir aussi tracé une hyperbole équilatere quelconque $\Upsilon\varpi I$ entre les asymptotes orthogonales $B\Delta$, *BI*, on eût mené des points *K*, *E*, de la Courbe *KEC*, les droites $K\Upsilon$, $E\varpi$, paralleles à *BI*, lesquelles eussent rencontré l'hyperbole $\Upsilon\varpi I$ en Υ, ϖ, & son autre asymptote $B\Delta$ en *K*, Π; le Corol. 14. fait, dis-je, voir que l'on auroit eu pour lors, & pour tous les cas possibles, les aires hyperboliques

ques $YK\Pi\varpi$ en raiſon des eſpaces ici parcourus pendant les tems AT correſpondans.

IV. L'équation (*art.* 1.) $TE = z = \frac{uu}{a} = \frac{TV \times TV}{AB}$ faiſant voir que les TE augmentent ou diminuent avec les TU, il eſt manifeſte que puiſque la Courbe HUC (*Corol.* 4.) s'approche continuellement de la droite BC à meſure que AT augmente, juſqu'à ce que AT infinie ait rendu $TU = AB$, & conſéquemment $TE = \left(\frac{TV \times TV}{AB}\right) = \frac{AB \times AB}{AB} = AB$; la Courbe KEC doit auſſi toûjours s'approcher de la droite BC juſqu'à ce que AT infinie ait auſſi rendu $TE = AB$. D'où l'on voit que cette droite BC doit être une aſymptote de la Courbe KEC de même qu'elle en eſt une (*Corol.* 4.) de la Courbe HUC.

V. L'équation generale (*art.* 1.) $dt = \frac{aadz}{2a\sqrt{az} - 2z\sqrt{az}}$ ſe changeant en $dt = \frac{aadz}{2a\sqrt{bb} - \frac{2bb}{a} \times \sqrt{bb}} = \frac{a^3 dz}{2aab - 2b^3}$ au point A, qui (*art.* 1.) y rend z $(AK) = \frac{bb}{a}$; il eſt aiſé de voir que dans tous les cas poſſibles la rencontre en K de la Courbe KEC avec la premiere AK $\left(\frac{bb}{a}\right)$ de ſes ordonnées TE (z), doit ſe faire ſous un angle BKE dont le ſinus ſoit à celui de ſon complement : : $a^3 . 2aab - b^3$. De ſorte que le cas de $b = 0$ de la fig. 1. y rendra le premier de ces ſinus au ſecond : : $a^3 . 0$. Par conſéquent la Courbe KEC y ſera touchée en A par ſon axe ATC, ainſi qu'on l'a déja vû pour ce cas dans le Schol. nomb. 1. de la pag. 211.

VI. Cette même équation $dt = \frac{aadz}{2a\sqrt{az} - 2z\sqrt{az}}$, ou $aadz = 2adt\sqrt{az} - 2zdt\sqrt{az}$, differentiée (en faiſant dt conſtante) donnant $aaddz = \frac{aadtdz}{\sqrt{az}} - \frac{azdtdz}{\sqrt{az}} - 2dtdz\sqrt{az} = \frac{aa - az - 2az}{\sqrt{az}} \times dtdz = \frac{aa - 3az}{\sqrt{az}} \times dtdz$; & la Courbe KEC exprimée (*art.* 1.) par cette équation generale, aïant $ddz = 0$ en ſon point d'inflexion, ſi elle en a un; l'on y aura $0 = \frac{aa - 3az}{\sqrt{az}} \times dtdz$, ou ſimplement $0 = aa - 3az$; ce qui donnant $z = \frac{1}{3}a$, fait

voir que cette Courbe *KEC* a effectivement un point d'inflexion, mais seulement dans les cas qui peuvent donner $z = \frac{1}{3}a$, c'est-à-dire $TE = \frac{1}{3}AB$. D'où il suit.

1°. Que le cas de la fig. 3. dont la moindre des ordonnées TE (z) est (*art.* 4.) $= AB$ (a), en est exclus.

2°. Que les cas de $\frac{bb}{a} > \frac{1}{3}a$, $\frac{bb}{a} = \frac{1}{3}a$, en sont aussi exclus dans les fig. 1. 2. puisque la plus petite des ET (z) y étant (*art.* 4. 5.) $= AK = \frac{bb}{a}$, il ne pourroit jamais y avoir de z $(ET) = \frac{1}{3}a$, si $\frac{bb}{a} > \frac{1}{3}a$; & que si $\frac{bb}{a} = \frac{1}{3}a$, la premiere AK $\left(\frac{bb}{a}\right)$ des ordonnées ET (z) seroit elle-même cette ET $(z) = \frac{1}{3}a$.

3°. Donc (*nomb.* 1. 2.) la Courbe *KEC* ne peut avoir de point d'inflexion que dans les fig. 1. 2. & seulement lorsque $\frac{bb}{a} < \frac{1}{3}a$, c'est-à-dire, seulement lorsque $b < a\sqrt{\frac{1}{3}}$: dans lequel cas elle en aura toûjours un à l'extrémité *E* d'une ordonnée TE $(z) = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}AB$. Ce qui fait voir que dans la fig. 2. qui ne demande (*hyp.*) que $b < a$, cette Courbe en aura quelquefois un, & quelquefois n'en aura point, selon que $\frac{bb}{a}$ y sera moindre, égale, ou plus grande que $\frac{1}{3}a$; Mais dans la fig. 1. qui exige (*hyp.*) $b = 0$, elle en aura toûjours un, ainsi qu'on l'a déja vû dans le nomb. 2. du Schol. de la pag. 211. pour ce même cas de $b = 0$, ou de *K* en *A*.

AUTRE SOLUTION.

FIG. VII. VIII. IX. I. On vient de trouver (*Sol.* 1. *art.* 1.) $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa - uu}$ pour l'équation de la Courbe *HUC* des vitesses ici restantes (u). Soit presentement $\pm \frac{a^4}{ss} = aa - uu$, ou $uu = aa \mp \frac{a^4}{ss} = \frac{aass \mp a^4}{ss}$, dont les signes supérieurs sont pour le cas de a $(AB) > b$ (AF) dans les fig. 7. 8. & les inférieurs pour le cas de a $(AB) < b$ (AB) dans la fig. 9. ajoûtant dans toutes trois $AB = a$ à la construction génerale du Lem. 1. pag. 194. comme dans les fig. 1. 2. 3. de la Solut. 1. L'on

aura par tout ici $u = \frac{a}{s}\sqrt{ss \mp aa}$, & $du = \frac{-ads\sqrt{ss \mp aa} + \frac{assds}{\sqrt{ss \mp aa}}}{ss}$ $= \frac{-assds \pm a^3 ds + assds}{ss\sqrt{ss \mp aa}} = \frac{\pm a^3 ds}{ss\sqrt{ss \mp aa}}$. Donc $\frac{du}{aa - uu}\left(\frac{dt}{aa}\right) =$ $= \frac{\pm ds}{\pm a\sqrt{ss \mp aa}} = \frac{ds}{a\sqrt{ss \mp aa}}$, ou $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$: c'est-à-dire $dt =$ $= \frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}$ pour le cas de $a > b$ dans les fig. 7. 8. & $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss + aa}}$ pour celui de $a < b$ dans la fig. 9. lesquelles équations sont à une même hyperbole équilatere *SMPC* differemment placée sur chacun de ses axes conjugués, aïant son demi-axe transverse $OS = a = AB$; ses abscisses $OQ = s$ prises depuis son centre O sur celui de ses axes qui passe par son sommet S dans le cas de $a > b$ des fig. 7. 8. & sur son axe conjugué dans le cas de $a < b$ de la fig. 9. & ses appliquées à ces axes, sçavoir les intérieures correspondantes $QP = \sqrt{ss - aa}$ dans le premier cas, & les exterieures correspondantes $QP = \sqrt{ss + aa}$ dans le second : c'est-à-dire en géneral $QP = \sqrt{ss \mp aa}$, dont — est pour les fig. 7. 8. & + pour la fig. 9.

Toutes les lettres A, Δ, M, H, F, N, λ, S, K, dans la fig 7. appartiennent au même point A : on n'en a mis une partie en ligne, que faute de place autour de ce point.

II. Pour placer presentement cette hyperbole par raport au reste commun (*Lem.* 1. *pag.* 194.) à la premiere Solution & à celle-ci, il faut trouver la distance *AO* du centre *O* de cette hyperbole à l'origine *A* des expressions *AT* des tems (t) écoulés depuis le commencement du mouvement. Pour cela il faut considerer qu'en prenant encore ici leurs perpendiculaires correspondantes *TU* pour les vitesses (u) restantes des primitives *TV* (v) à la fin de ces tems *AT* (t) malgré les résistances supposées, desquelles vitesses restantes *TU* (u) la premiere soit *AH* (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 195.) $=$ *AF* (b) initiale supposée; *TU* en *AH* au commencement du mouvement, y doit rendre $u = b$. Ainsi l'équation (*art.* 1.) $\pm \frac{a^4}{ss} = aa - uu$, rendant s (OQ) $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$, *TU* en *AH* perpendiculaire en *A* avec *AF* sur *OC*, doit aussi y rendre $s = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$.

Par conséquent la plus petite *OA* des abscisses OQ (s) ici

néceſſaires, doit y être $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$; & ſon ordonnée correſpondante $QP = \sqrt{ss \mp aa} = \sqrt{\frac{a^4}{\pm aa \mp bb} \mp aa} = \sqrt{\frac{a^4 - a^4 + aabb}{\pm aa \mp bb}} = \frac{ab}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$ alors en AM perpendiculaire au point A ſur OC de même que AB, AH, AF : c'eſt-à-dire, $OA = \frac{aa}{\sqrt{aa - bb}}$, $AM = \frac{ab}{\sqrt{aa - bb}}$ dans les fig. 7. 8. & $AO = \frac{aa}{\sqrt{bb - aa}}$, $AM = \frac{ab}{\sqrt{bb - aa}}$ dans la fig. 9. De ſorte qu'on aura dans toutes $OA \,.\, AM :: a \,.\, b :: AB \,.\, AH$.

III. Donc en continuant de prendre par tout de l'origine A vers C ſur ATC, les abſciſſes AT (t) pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ſi l'on prend $OA = \frac{aa}{\sqrt{aa - bb}}$ ſur CTA prolongée vers O, $OS = a$ ſur OA depuis le centre O vers A, dans les fig. 7. 8. Et $AO = \frac{aa}{\sqrt{bb - aa}}$ encore ſur CTA prolongée vers O, $OS = a$ ſur ſa perpendiculaire en O, dans la fig. 9. L'hyperbole $SMPC$ décrite du centre O, & du demi-axe tranſverſal $OS = a$, qui continué en ſoit l'axe intérieur, ſera celle qu'exige ici l'équation generale $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$ de l'art. 1. c'eſt-à-dire, $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss - aa}}$ pour les fig. 7. 8. & $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss + aa}}$ pour la fig. 9.

IV. L'art. 2. d'où cela ſe tire, fait voir auſſi en general & en particulier le rapport entr'elles de l'ordonnée AM $\left(\frac{ab}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}\right)$ de la précedente hyperbole $SMPC$, de AF ou de AH (b) expreſſion de la premiere des viteſſes (u), & de AB priſe $= a$ ſur la même perpendiculaire qu'elles en A à la droite OC : ſçavoir

1°. Qu'en general $AB(a) \,.\, AM \left(\frac{ab}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}\right) :: \sqrt{\pm aa \mp bb} \,.\, b$. c'eſt-à-dire en particulier pour le cas de $a > b$ des fig. 7. 8. $AB \,.\, AM :: \sqrt{aa - bb} \,.\, b$. Et pour le cas de $a < b$ de la fig. 9. $AB \,.\, AM :: \sqrt{bb - aa} \,.\, b$. D'où l'on voit que AB ſera égale,

moindre, ou plus grande que AM dans les fig. 7. 8. selon que $\sqrt{aa - bb}$ y sera egale, moindre, ou plus grande que b, ainsi que le permet l'hypothese qu'on y fait de $a > b$; mais que dans la fig. 9. AB sera toûjours moindre que AM, à cause que $b > a$ y rend toûjours $\sqrt{bb - aa} < b$.

2°. Qu'en géneral aussi $AH\ (b) . AM \left(\frac{ab}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}\right) :: \sqrt{\pm aa \mp bb} . a$. C'est-à-dire encore en particulier pour le cas de $a > b$ des fig, 7. 8. $AH . AM :: \sqrt{aa - bb} . a$. Et pour le cas de $b > a$ de la fig. 9. $AH . AM :: \sqrt{bb - aa} . a$. D'où l'on voit au contraire que AH sera toûjours moindre que AM dans les fig. 7. 8. dont le cas de $a > b$ rend toûjours $\sqrt{aa - bb} < a$; & que dans la fig. 9. AH sera égale, moindre, ou plus grande que AM, selon que $\sqrt{bb - aa}$ y sera égale, moindre, ou plus grande que a, ainsi que le permet aussi l'hypothêse qu'on y fait de $b > a$.

V. Tout cela étant ainsi reconnu, soient du centre O les droites OP, Op, infiniment près l'une de l'autre, lesquelles rencontrent l'hyperbole $SMPC$ en P, p, & de ce dernier point p encore une ordonnée pq parallele à PQ. L'on aura en géneral (*art.* 1) le triangle rectangle $OQP = \frac{s\sqrt{ss \mp aa}}{2}$, dont la differentielle sera $PpqQ \pm POp = \frac{ds\sqrt{ss \mp aa}}{2} + \frac{ssds}{2\sqrt{ss \mp aa}} = \frac{ssds \mp aads + ssds}{2\sqrt{ss \mp aa}} = \frac{2ssds \mp aads}{2\sqrt{ss \mp aa}}$. Mais on a aussi (*art.* 1.) $PpqQ = ds\sqrt{ss \mp aa} = \frac{2ssds \mp 2aads}{2\sqrt{ss \mp aa}}$. Donc $\pm POp = \frac{2ss \mp aa - 2ss \pm 2aa}{2\sqrt{ss \mp aa}} \times ds = \frac{\mp aads}{2\sqrt{ss \mp aa}}$, ou $POp = \frac{aads}{2\sqrt{ss \mp aa}} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$. Mais on vient de trouver (*art.* 1.) $dt = \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$, d'où résulte $\frac{adt}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{ads}{\sqrt{ss \mp aa}}$. Donc $\frac{adt}{2} = POp$, ou $dt = \frac{2}{a} \times POp$; & (en intégrant) $t\ (AT) = \frac{2}{a} \times POS + q$. Mais le cas de $AT\ (t) = 0$, qui rend $POS = MOS$, réduit cette intégrale à $0 = \frac{2}{a} \times MOS + q$, d'où résulte $q = -\frac{2}{a} \times MOS$. Donc cette intégrale complette sera ici $AT = \frac{2}{a} \times POS - \frac{2}{a} \times MOS = \frac{2}{a} \times MOP$ (à cause de $OS = a$.

$= AB) = \frac{2 \times MOP}{OS} = \frac{2 \times MOP}{AB}$ pour tous les cas poſſibles : de ſorte que les tems AT (t) écoulés depuis le commencement du mouvement, ſeront par tout ici en raiſon des trilignes ou ſecteurs hyperboliques MOP correſpondans dans tous les cas poſſibles.

VI. Aïant auſſi en géneral (*art.* 1.) $\frac{a}{s}\sqrt{ss \mp aa} = u = TU$, & $QP = \sqrt{ss \mp aa}$, dont $a = AB$, & $s = OQ$; l'on aura pareillement en géneral $TU = \frac{AB \times QP}{OQ}$, ou $AB = \frac{OQ \times TV}{QP}$. Mais après avoir fait du point H la droite $H\lambda$ parallele à AO, & qui rencontre OM en λ, ſi l'on tire par ce point λ une autre droite NG parallele à AB, & qui rencontre OA, OP, en N, G ; l'art. 2. qui donne ici en géneral AH ou $N\lambda . AB :: AM . AO :: N\lambda . NO$. donnera auſſi $NO = AB$ (*art.* 1.) $= OS$: de ſorte que N ſe trouvera au ſommet S de l'hyperbole $SMPC$ dans les fig. 7. 8. Donc on y aura pareillement & dans la fig. 9. $NO = \frac{OQ \times TV}{PQ}$, ou $NO . TU :: OQ . PQ :: NO . NG$. Par conſéquent $NG = TU$ (u) dans tous les cas poſſibles : De ſorte que les viteſſes reſtantes TU (u) à la fin des tems AT ou (*art.* 5.) MOP, ſeront par tout ici entr'elles comme les NG correſpondantes.

VII. Donc (*art.* 5. 6.) ſi l'on prend par tout ici AT (t) $= \frac{2 \times MOP}{OS}$, $TU(u) = NG$ correſpondante, & qu'on acheve le parallelogramme rectangle GT fait de ces deux lignes AT, NG ; l'angle V de ce parallelogramme ſera un des points de la Courbe cherchée HUC des viteſſes ici reſtantes (u) malgré les réſiſtances ſuppoſées ; & ainſi à l'infini des autres points de cette Courbe. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

COROLLAIRE XVI.

Puiſque les art. 1. 6. de cette Solut. 2. donnent ici en géneral $ON = AB = OS$, ſi l'on prolonge CB juſqu'à la rencontre de NG en Z, l'on y aura auſſi par tout $NZ = ON = OS$ demi-axe tranſverſe de l'hyperbole équilatere $SMPC$; &

par conſéquent ſi l'on tire la droite OZ prolongée vers C, cette droite OZC ſera ici une des aſymptotes de cette hyperbole dans tous les cas. Donc OP, qui (*Solut.* 2. *art.* 2.) doit par tout ici commencer en OM, ne pouvant jamais couper NZ que depuis λ juſqu'en Z, les ordonnées TU (*Solut.* 2. *art.* 6.) $=NG$ ne peuvent jamais être moindres que AH dans les fig. 7.8. ni être plus grandes que AH dans la fig. 9. Mais ſeulement commencer par lui être égales, ſçavoir lorſque OP en OM, rendant $OQ=OA$, rend le triligne hyperbolique $MOP=0$, & (*Solut.* 2. *art.* 5.) $AT=0$; puiſqu'alors NG (TU) $=N\lambda=AH$, & que depuis ce premier inſtant du mouvement, les NG (TU) croiſſent toûjours dans les fig. 7. 8. & diminuent toûjours dans la fig. 9. juſqu'à ce qu'enfin elles ſoient devenuës $=NZ=AB$ par la poſition de OP en OZC; laquelle rendant le triligne hyperbolique MOP infini, & conſéquemment auſſi (*Solut.* 2. *art.* 5.) AT infinie de même que OQ, fait voir que les TU commencées en AH, ne peuvent être égales à AB qu'aprés un tems infini AT, ni être jamais plus grandes que AB dans les fig. 7. 8. ni plus petites que AB dans la fig. 9.

De tout cela ſuivent encore les Corol. 1. 2. 3. 4. 5. 7. 8 9. 10. 11. *déja tirés de la Solut.* 1.

COROLLAIRE XVII.

Le cas des TU (u) $=AB$ (a) qui ſuivant le précedent Corol. 16. arriveroit toûjours après un tems infini dans le milieu ſuppoſé, changeant l'égalité $dt=\frac{aadu}{aa-uu}$ trouvée dans la Solut. 1. art. 1. pour celle de la Courbe HUC, en $dt=\frac{aadu}{aa-aa}=\frac{aadu}{0}$, fait voir que les accroiſſemens ou décroiſſemens (du) des viteſſes effectives (u), y ſeroient par tout nuls; ce qui ſe voit auſſi en ce qu'en ce cas de $u=a$, l'équation $v-r=u$ trouvée dans l'art. 1. du Lem. 1. pag. 194. donneroit $v-r=a$, & conſéquemment $dv-dr=0$, ou $dv=dr$, c'eſt-à-dire (*remarq.* 1. *pag* 209.) la peſanteur du mobile égale à la réſiſtance que lui feroit alors le

milieu ſuppoſé, en regardant cette peſanteur conſtante comme cauſe des accroiſſemens inſtantanés (*dv*) de la viteſſe primitive (*v*). Donc l'équilibre qui réſulteroit ainſi en ce cas de $u = a$ entre la peſanteur du mobile & la réſiſtance (*dr*) du milieu ſuppoſé, empêchant cette peſanteur d'augmenter cette viteſſe effective (*a*), & la réſiſtance de la diminuer; cette même viteſſe *AB* (*a*) doit être la plus grande que la peſanteur de ce corps pût jamais lui donner dans le milieu ſuppoſé, c'eſt-à-dire ſuivant le langage de M. Hughens, qu'elle doit être la terminale de ce corps, ainſi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 7. 15.

COROLLAIRE XVIII.

Puiſque *TV* (*v*) exprime ici (*hyp.*) la viteſſe primitive à la fin du tems *AT* (*t*) c'eſt-à-dire ce que le mobile en auroit eu à la fin de ce tems en tombant (ſi l'on veut) en vertu de ſa peſanteur conſtante & d'une puiſſance qui d'abord l'eût jetté verticalement de haut en bas d'une viteſſe $= AF$ (*b*) dans un milieu ſans réſiſtance ni action; & que (*Solut.* 1. & 2.) *TU* (*u*) exprime de même ce que la réſiſtance ſuppoſée du milieu où il ſe meut effectivement, lui laiſſe de cette viteſſe primitive à la fin de ce même tems *AT* : cette viteſſe *TU* reſtante de la primitive *TV* à la fin de ce tems dans ce milieu réſiſtant, ſera à cette primitive $:: TU . TV :: TU . TX + XV :: TU . AF + XV$ (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 195.) $:: TU . AH + XV$ (à cauſe de l'angle *XFV* ſuppoſé de 45. deg.) $:: TU . AH + FX$ $:: TU . AH + AT$ (*Solut.* 2. *art.* 6.) $:: NG . N\lambda + AT$. Mais (*Solut.* 2. *art.* 5.) $AT = \frac{2 \times MOP}{AB}$ (*Solut.* 2. *art.* 6.) $= \frac{2 \times MOP}{ON}$. Donc chaque viteſſe reſtante *TU* ſera par tout ici à la correſpondante primitive $TV :: NG . N\lambda + \frac{2 \times MOP}{ON} :: \frac{ON \times NG}{2} . \frac{ON \times N\lambda}{2} + MOP :: ONG . ON\lambda + MOP$. C'eſt-à-dire, comme le triangle rectangle *ONG* eſt à la ſomme correſpondante faite du triangle rectangle *ON*λ & du ſecteur hyperbolique *MOP*.

On

On voit de-là que le cas de la viteſſe initiale AF (b)$=$o dans la fig. 7. y rendant pareillement (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 195.) AH ou (*Solut.* 2. *art.* 6.) $N\lambda=$o, $AM=$o, $MS=$o, $AS=$o, $AO=OS$ (*Solut.* 2. *art.* 1.) $=AB$ (*Solut.* 2. *art.* 6.) $=ON$, $AN=$o, $NG=AG$, $MOP=AOP$; chaque viteſſe reſtante TU (u) doit être en ce cas à la primitive correſpondante TV (v) : : $OAG \,.\, AOP$. C'eſt-à-dire, comme le triangle rectangle OAG eſt au ſecteur hyperbolique AOP correſpondant, ainſi qu'on l'a déja vû pour ce même cas dans le Corol. 15. pag. 215. FIG. VII.

COROLLAIRE XIX.

Il ſuit encore de la Solut. 2. que le tems qu'il faudroit à la ſeule peſanteur conſtante d'un corps pour lui donner dans un milieu ſans réſiſtance ni action une viteſſe verticale VX qui fut égale à la terminale AB qu'il auroit (*Corol.* 7. 15. 17.) dans un milieu réſiſtant en raiſon des quarrés des viteſſes de ce corps, ſeroit à ce qu'il en faudroit à ce même corps jetté d'abord verticalement de haut en bas d'une viteſſe AF (b) dans ce milieu réſiſtant, pour y avoir en vertu de ſa peſanteur & de cette projection la viteſſe TU (u) ou (*Solut.* 2. *art.* 6.) NG malgré la réſiſtance de ce milieu : : $AB \,.\, \frac{2 \times MOP}{AB}$. puiſque le premier de ces tems ſeroit $FX=VX$ (*hyp.*) $= AB$, & que le ſecond ſeroit AT (*Solut.* 2. *art.* 5.)$=\frac{2 \times MOP}{AB}$. Donc le premier de ces tems ſeroit auſſi au ſecond : : $\frac{AB \times AB}{2}$. MOP (la Solut. 2. art. 6. donnant $NO=AB$, & la conſtr. $AB=NZ$) : : $\frac{NO \times NZ}{2}$. MOP : : $ONZ \,.\, MOP$. c'eſt-à-dire, comme le triangle rectangle ONZ ſeroit au ſecteur hyperbolique correſpondant MOP. FIG. VII. VIII. IX.

On voit auſſi de-là, que le cas de la viteſſe initiale AF (b) $=$o, de la fig. 7. dans le milieu réſiſtant, y rendant (comme ſur la fin du Corol. 18.) $ON=AB$, NZ en AB, & ON en OA, & y changeant ainſi le triangle ONZ en OAB, & le ſecteur MOP en AOP; le premier des deux tems FIG. VII.

en queſtion ſeroit en ce cas de la fig. 7. au ſecond : : *OAB*. *AOP*. c'eſt-à-dire, comme le triangle rectangle *OAB* eſt au ſecteur hyperbolique correſpondant *AOP*, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 16. des pag. 215. 216.

COROLLAIRE XX.

FIG. VII. VIII. IX. Il ſuit auſſi de la Solut. 2. que le tems qu'il faudroit à la ſeule peſanteur conſtante d'un corps pour lui donner dans un milieu ſans réſiſtance ni action, une viteſſe verticale *VX* qui fût égale à l'initiale *AF* imprimée d'abord verticalement de haut en bas dans un milieu réſiſtant en raiſon des quarrés des viteſſes de ce corps, ſeroit à ce qu'il en faudroit à ce corps ainſi jetté dans ce milieu réſiſtant pour y avoir en vertu de ſa peſanteur & de cette projection la viteſſe *TU* (u) ou (*Solut.* 2. *art.* 6.) *NG* malgré la réſiſtance de ce milieu : : *AF*. $\frac{2\times MOP}{AB}$. puiſque le premier de ces tems ſeroit $FX = VX$ (*hyp.*) $= AF$, & que le ſecond ſeroit *AT* (*Solut.* 2. *art.* 5.) $= \frac{2\times MOP}{AB}$. Donc le premier de ces tems ſeroit auſſi au ſecond : : $\frac{AF\times AB}{2}$. *MOP* (la Solut. 2. art. 6. donnant $AB = NO$, & l'art. 4. du Lem. 1. pag. 195. donnant auſſi $AF = AH$ (*Conſtr.*) $= N\lambda$) : : $\frac{N\lambda\times NO}{2}$. *MOP* : : $ON\lambda$. *MOP*. C'eſt-à-dire comme le triangle rectangle $ON\lambda$ ſeroit au ſecteur hyperbolique *MOP*.

FIG. VII. D'où l'on voit que le cas de la viteſſe initiale $AF = 0$ de la fig. 7. dans le milieu réſiſtant, y rendant auſſi $N\lambda = 0$, puiſque (*Lem.* 1. *art.* 4. *pag.* 195.) $AF = AH$ (*Conſtr.*) $= N\lambda$; le triangle $ON\lambda$, & conſéquemment auſſi le premier des tems en queſtion y ſeroit nul ou zero : auſſi ne faut-il aucun tems pour n'acquerir aucune viteſſe.

COROLLAIRE XXI.

FIG. VII. VIII. IX. I. Puiſque (*Solut.* 2. *art.* 1.) $\pm \frac{a^4}{ss} = aa - uu$, ou $uu = aa \mp \frac{a^4}{ss}$, & conſéquemment $udu = \pm \frac{a^4 sds}{s^4} = \pm \frac{a^4 ds}{s^3}$; l'on aura $\frac{udu}{aa-uu} = \frac{ds}{s}$, ou $\frac{aaudu}{aa-uu} = \frac{aads}{s}$. Mais l'art. 1. de la Solut. 1.

donne $dt = \frac{aadu}{aa - uu}$, ou $udt = \frac{aaudu}{aa - uu}$. Donc $udt = \frac{aads}{s}$, & (en intégrant) $\int udt$ ($ATUH$) $= aa \times ls + q$. Mais le cas de P en M, qui rend OQ (s) $= OA$ (*Solut.* 2. *art.* 2.) $= \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$, $MOP = 0$, & conséquemment aussi (l'art. 5. de la Solut. 2. donnant $AT = \frac{2 \times MOP}{AB}$) $AT = 0$, & $ATUH = 0$, réduit cette intégrale à $0 = aa \times l \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}} + q$, d'où résulte $q = - aa \times l \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$. Donc cette intégrale complette sera en géneral $ATUH = aa \times ls - aa \times l \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}} = aa \times l \frac{s\sqrt{\pm aa \mp bb}}{aa}$ (à cause de $OQ = s$, & de $OA = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp bb}}$) $= aa \times l \frac{OQ}{OA}$. Mais (*Lem.* 2. *pag.* 196.) les espaces parcourus pendant des tems quelconques t (AT ou $\frac{2 \times MOP}{AB}$) sont entr'eux comme les sommes $\int udt$ ($ATUH$) des vitesses u (TU) emploïées à les parcourir. Donc les espaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2 \times MOP}{AB}$, sont entr'eux dans tous les cas comme les grandeurs $aa \times l \frac{OQ}{OA}$ correspondantes, ou (à cause de aa constante) comme les Logarithmes des fractions $\frac{OQ}{OA}$ correspondantes.

II. Si l'on considere presentement que l'art. 2. de la Solut. 2. donne en géneral $s = \frac{aa}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$, la substitution de cette valeur de s dans l'expression générale (*art.* 1.) $aa \times l \frac{s\sqrt{\pm aa \mp bb}}{aa}$ des espaces ici parcourus pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2 \times MOP}{AB}$ correspondans, donnera aussi en géneral ces espaces en raison des grandeurs $aa \times l \frac{\sqrt{\pm aa \mp bb}}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$ correspondantes, ou simplement (à cause de a constante) en raison des Logarithmes correspondans $l \frac{\sqrt{\pm aa \mp bb}}{\sqrt{\pm aa \mp uu}}$: c'est-à-dire (les signes supérieurs sous chaque

ſigne radical, étant pour le cas de $a > b$ dans les fig. 7. 8. & les inférieurs pour celui de $b > a$ dans la fig. 9.) en raiſon des Logarithmes correſpondans $l\frac{\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{aa-uu}}$ dans les fig. 7. 8. & en raiſon des correſpondans $l\frac{\sqrt{bb-aa}}{\sqrt{uu-aa}}$ dans la fig. 9. conformément à l'art. 2. du Corol. 12. dans lequel ces mêmes grandeurs ont auſſi été trouvées pour les expreſſions de ces mêmes eſpaces.

COROLLAIRE XXII.

Si l'on ajoûte préſentement aux fig. 7. 8. 9. une autre hyperbole équilatere φZC entre les aſymptotes orthogonales OC, $O\varphi$, laquelle rencontre AB, PQ, en β, R, aïant le même centre O que la premiere $SMPC$; mais ſon ſommet en Z, aïant OZ pour ſon demi-axe tranſverſe, l'aſymptote OZC de l'autre pour ſon axe interieur, & $sy=aa$, ou $y=\frac{aa}{s}$ pour ſon équation aſymptotique, dont les coordonnées ſont $s=OQ$, & $y=QR$; l'on aura ici yds ($QqrR$) $=\frac{aads}{s}$ (*Corol.* 21. *art.* 1.) $=udt$. Donc (en intégrant) $\int udt$ ($ATUH$) $=\int yds+q=\varphi OQR\varphi+q$. Mais le cas de $ATUH=0$, qui rendant TU en AH, rend NG (*Solut.* 2. *art.* 6.) $=N\lambda$, OP en OM, QP en AM, QR en $A\beta$, & conſéquemment $\varphi OQR\varphi=\varphi OA\beta\varphi$; réduit cette intégrale à $0=\varphi OA\beta\varphi+q$, d'où réſulte $q=-\varphi OA\beta\varphi$. Donc cette intégrale complette ſera $ATUH$ ($\int udt$) $=\varphi OQR\beta\varphi-\varphi OA\beta\varphi=QA\beta R$. Par conſéquent (*Lem.* 2. *pag.* 196.) les eſpaces ici parcourus pendant les tems AT (t), ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2\times MOP}{AB}$, en vertu des viteſſes TU (u) reſtantes à chaque inſtant des primitives TV (v) malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſeront auſſi entr'eux en raiſon des aires hyperboliques $QA\beta R$ correſpondantes dans tous les cas poſſibles.

COROLLAIRE XXIII.

Donc auſſi après un tems infini AT ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) MOP les eſpaces parcourus par ce mobile ſeroient ici infinis dans tous les cas poſſibles; puiſque le ſecteur MOP

infini rendant l'abſciſſe OQ infinie, l'aire $Q A \beta R$ le ſeroit auſſi; & par conſéquent l'eſpace (*Corol.* 22.) qui devroit être ici parcouru pendant ce tems infini, ſeroit pareillement infini.

Cela ſuit encore de tous les articles des Corol. 12. 13. 14. 21. & ſi clairement encore qu'il n'y a qu'à jetter les yeux deſſus pour le voir.

COROLLAIRE XXIV.

De ce que (*Corol.* 22.) $QqrR = yds = udt = TU \times dt$, l'on aura $\frac{QqrR}{TU} = dt$ (*Solut.* 2. *art.* 5.) $= \frac{2}{a} \times POp = \frac{2 \times POp}{AB}$, & conſéquemment $QqrR . POp :: TU . \frac{1}{2} AB$. C'eſt-à dire, (*Corol.* 7. 15. 17.) que les aires hyperboliques élémentaires correſpondantes $QqrR$, POp, ſont entr'elles comme les viteſſes TU (u) correſpondantes ſont chacune à la moitié de la terminale AB (a)

COROLLAIRE XXV.

I. Soit encore comme dans les fig. 1. 2. 3. du Corol. 14. une hyperbole équilatere quelconque $D\varpi I$ ajoûtée aux fig. 7. 8. 9. entre les aſymptotes orthogonales NZ, ZI, dans les fig. 7. 8. après y avoir prolongé CZ vers I; & entre les orthogonales KZ, ZI, dans la fig. 9. après y avoir auſſi prolongé CZ vers I, & de plus NZ vers K: c'eſt-à-dire en géneral (après avoir pris $Z\Delta = ZN = BA$ dans la fig. 9. & avoir ajoûté Δ en N dans les fig. 7. 8.) une hyperbole équilatere quelconque $D\varpi I$ entre les aſymptotes ZI, $Z\Delta$, dans les fig. 7. 8. 9. ſoient priſes par tout dans ces figures, $N\Pi . NG :: NG . NZ$. Et $NK . N\lambda :: N\lambda . NZ$. Enſuite après avoir mené des points Δ, Π, K, les ordonnées ΔD, $\Pi\varpi$, KY, comme dans les fig. 1. 2. 3. Soient encore (ſur NZ, comme dans ces figures, ſur AB) $\Delta Z = NZ = AB = a$, $N\lambda = AH = b$, $\Delta D = c$, $\frac{2}{a} \times MOP$ (*Solut.* 2. *art.* 5.) $= AT = t$, $N\Pi = m$, $\Pi\varpi = n$. FIG. VII. VIII. IX.

II. Il réſulte de tout cela $Z\Pi = a - m$ dans les fig. 7. 8. & $Z\Pi = m - a$ dans la fig. 9. c'eſt-à-dire, en géneral $Z\Pi = \pm a \mp m$, dont les ſignes ſupérieurs ſont pour les fig. 7. 8.

& les inférieurs pour la fig. 9. comme dans l'art. 1. du Corol. 14. en d'autres Lettres équivalentes des fig. 1.2.3. Ce qui donnera $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aaudu}{aa-uu} = udt$, & $\int udt$ (*ATUH*) $= \pm \frac{a}{2c} \times \int ndm = \frac{a}{2c} \times YK\Pi\varpi$, comme dans les autres articles de ce Corol. 14. C'est-à-dire (*Lem.* 2. *pag.* 196.) que les espaces parcourus pendant les tems *AT* (t) ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2}{a} \times MOP$ en vertu des vitesses restantes *TU* (u) ou (*Solut.* 2. *art.* 6.) *NG* , seront ici entr'eux comme les aires hyperboliques $YK\Pi\varpi$ correspondantes.

III. Puisque (*art.* 1.) NZ (a) . NG (u) :: NG (u). $N\Pi(m) = \frac{uu}{a}$. Et que (*art.* 2.) $Z\Pi = \pm a \mp m$, l'on aura $Z\Pi = \pm a \mp \frac{uu}{a}$, ou (en multipliant le tout par $\pm$ 1.) $\pm Z\Pi = a - \frac{uu}{a}$. Mais l'art. 1. de la Solut. 1. donne $\frac{dt}{aa} = \frac{du}{aa-uu}$, ou $dt = \frac{aadu}{aa-uu} = \frac{adu}{a-\frac{uu}{a}}$. Donc $dt = \pm \frac{adu}{Z\Pi} = \pm \frac{NZ \times Gg}{Z\Pi}$: c'est-à-dire en géneral (à cause de *NZ* constante) les instans dt ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) *POp* en raison des fractions $\frac{Gg}{Z\Pi}$ correspondantes ; & conséquemment aussi (à cause de $\Pi\varpi . \Delta D :: Z\Delta . Z\Pi = \frac{\Delta D \times Z\Delta}{\Pi\varpi}$) comme les correspondantes $\frac{\Pi\varpi \times Gg}{\Delta D \times Z\Delta}$, ou simplement (à cause de $\Delta D \times Z\Delta$ constant) comme les produits $\Pi\varpi \times Gg$ correspondans pour tous les cas possibles, ainsi qu'on l'a déja vû en d'autres lettres équivalentes dans les Corol. 23. & 25. des pag. 224. 225. 226. pour le cas de la fig. 7. des mouvemens commencés à zero de vitesse.

IV. Puisque (*art.* 2.) $\pm \frac{a}{2c} \times ndm = \frac{aaudu}{aa-uu}$, ou $\pm ndm = \frac{2acudu}{aa-uu}$, & que l'art. 5. de la Solut. 2. donne $POp = \frac{a}{2} \times dt$ (*Solut.* 1. *art.* 1.) $= \frac{1}{2} \times \frac{a^3du}{aa-uu}$; l'on aura ici en géneral $\pm ndm . POp :: \frac{2acudu}{aa-uu} . \frac{1}{2} \times \frac{a^3du}{aa-uu} :: cu . \frac{1}{4}aa :: u . \frac{aa}{4c}$. De sorte que si l'on suppose présentement que l'axe transverse, jusqu'ici arbitraire, de l'hyperbole $D\varpi I$, soit $= Z\Delta \times \sqrt{2}$

$= a\sqrt{2}$, & conſéquemment $\Delta D\ (c) = \frac{1}{4}\ Z\Delta\ (\frac{1}{4}a)$, ou $4c = a$; l'on aura ici $+\ ndm . POp :: u . a :: NG . NZ$. c'eſt à-dire en géneral, que les élemens correſpondans *ndm*, *POp*, des aires hyperboliques *YKΠϖ*, *MOP*, pareillement correſpondantes, ſeront par tout ici entr'eux comme les viteſſes correſpondantes, *NG* (*u*), *NZ* (*a*). Donc les eſpaces parcourus en vertu de ces viteſſes pendant un même inſtant quelconque *dt* ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2}{a} \times POp$, étant entr'eux comme ces mêmes viteſſes, ils ſeront pareillement ici entr'eux :: *ndm*. *POp*. Donc auſſi le premier de ces eſpaces parcouru de la viteſſe *NG* ou *TU* (*u*) pendant l'inſtant *dt*, étant (*art.* 2. & *Corol.* 14.) comme l'aire élémentaire *ndm* correſpondante de l'hyperbolique *YKΠϖ*, ſi l'on prend cet élement hyperbolique *ndm* pour cette eſpace inſtantanée, l'on aura pareillement le petit triligne hyperbolique *POp* correſpodant pour l'eſpace parcouru de la viteſſe *NZ* ou *AB* (*a*) pendant le même inſtant *dt*; & par tout de même. Donc (en intégrant) l'eſpace parcouru de la viteſſe variée *TU* (*u*) pendant les tems *AT* (*t*) ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\frac{2}{a} \times MOP$ malgré les réſiſtances ſuppoſées, ſera à l'eſpace parcouru de la viteſſe terminale uniforme *AB* (*a*) pendant le même tems :: *YKΠϖ* . *MOP* . Et par tout ici de même pour tous les cas poſſibles, ainſi qu'on l'a déja vû dans les Corol. 24. & 25. art. 4. des pag. 225. 226. 227. pour le cas de la fig. 7.

COROLLAIRE. XXVI.

I. Puiſque (*hyp.*) les réſiſtances inſtantanées *z* (*dr*) $= \frac{uu}{a}$, le cas de $u = a$, c'eſt-àdire (*Corol.* 7. 15. 17.) de la viteſſe effective ou reſtante *TU* (*u*) devenuë égale à la terminale *AB* (*a*) après un tems *AT* (*t*) infini, doit auſſi rendre *z* (*dr*) $= a$. Mais (*Corol.* 9.) le mouvement devant demeurer ici uniforme pour toûjours lorſqu'il en eſt à cette viteſſe terminale, celle de ces réſiſtances inſtantanées qui s'y oppoſe, doit alors être égale à la peſanteur du mobile : autrement leur inégalité ne permettroit pas cette

uniformité de mouvement. Donc en prenant $\frac{uu}{a}$ pour ces résistances instantanées du milieu supposé, l'on aura pareillement a pour la pesanteur du mobile ; & conséquemment aussi $\pm a \mp \frac{uu}{a}$ pour la difference ou excès de force dont cette pesanteur surpassera chacune de ces résistances dans les fig. 7. 8. ou sera surpassée par chacune d'elles dans la fig. 9. les signes supérieurs étant pour les fig. 7. 8. & les inférieurs pour la fig. 9. Mais (*Corol.* 25. *art.* 1. & 3.) $NZ = a$, $N\Pi = \frac{uu}{a}$, & $Z\Pi = \pm a \mp \frac{uu}{a}$. Donc en géneral la pesanteur constante du mobile, chaque résistance instantanée qu'il trouve dans le milieu où on le suppose tomber, & la difference dont la plus forte des deux surpasse l'autre, sont ici entr'elles comme les grandeurs NZ, $N\Pi$, $Z\Pi$, correspondantes, desquelles la troisiéme $Z\Pi$ exprime l'excès de la pesanteur par-dessus la résistance dans les fig. 7. 8. & l'excès de la résistance par-dessus la pesanteur dans la fig. 9.

II. Mais si l'on imagine chacune des aires hyperboliques $YK\Pi\varpi$ divisées en parties égales quelconques par des paralleles à ZI : c'est-à-dire (*Corol.* 14. *art.* 2. 3. 4. 5. & *Corol.* 25. *art.* 2.) les espaces ici parcourus pendant les tems AT, divisés chacun en parties égales quelconques; il est manifeste que les $Z\Pi$ correspondantes seront en progression géometrique. Donc (*art.* 1.) les excès ($Z\Pi$) de la pesanteur (NZ) du mobile par-dessus chacune des résistances instantanées ($N\Pi$) du milieu dans les fig. 7. 8. ou de chacune de ces résistances par-dessus cette pesanteur dans la fig. 9. seront en progression géometrique à la fin des parties égales correspondantes des espaces ici parcourus en vertu des vitesses TU pendant les tems AT ou (*Solut.* 2. *art.* 5.) $\times \frac{1}{2} MOP$ dans tous les cas possibles, ainsi qu'on l'a déja vû en d'autres lettres équivalentes dans le Corol. 19. art. 3. pag. 220. pour le cas de la fig. 7.

III. On voit delà que si l'on prenoit ces excès $Z\Pi$ dont la pesanteur du mobile surpasse chaque résistance instantanée dans les fig. 7. 8. où est surpassée par chacune d'elles

dans

dans la fig. 9. pour des nombres dont le plus grand *ZK* fût pris pour l'unité ; les espaces ici parcourus pendant les tems *AT* correspondans, en seroient les Logarithmes.

IV. Donc si dans les fig. 10. 11. 12. on suppose *KL*, Π*X*, paralleles à *ZC*, & dont la premiere *KL* rencontre *AB* (prolongée dans la fig. 12.) en *L* ; que par ce point *L* passe une Logarithmique *LXC* d'une soutangente = *ZK* = *BL* = 1, aïant *ZC* pour asymptote, & qui rencontre Π*X* en *X*, par lequel point *X* soit *DS* parallele à *BA*, & qui rencontre perpendiculairement en *S*, *D*, les paralleles *AC*, *BC* : cela supposé, & tout le reste demeurant le même que dans les fig. 7. 8. 9. l'on aura ici (*art.* 3.) *AS* ou *BD* en raison des espaces parcourus pendant les tems *AT* en vertu des vitesses *NG* ou *TU* restantes à chaque instant malgré les résistances *N*Π ou *SX* du milieu supposé, en prenant (ainsi que dans l'art. 3.) les excès *Z*Π de la pesanteur (*NZ*) du mobile sur chacune des résistances instantanées (*N*Π), ou de chacune d'elles sur cette pesanteur, pour des nombres dont le plus grand *ZK* ou *BL* seroit l'unité ; puisque les abscisses *AS* ou *BD* en seroient les Logarithmes. Et reciproquement si l'on prenoit ici ces abscisses *AS* ou *BD* pour les espaces parcourus pendant les tems *AT* correspondans, les ordonnées *DX* ou *Z*Π seroient en raison des excès de la pesanteur *DS* ou *ZN* du mobile sur chacune des résistances instantanées *SX* ou *N*Π correspondantes du milieu supposé, ou de chacune de ces résistances sur cette pesanteur. Fig. X. XI. XII.

V. Cela étant, & Logarithmique *LXC* d'une Soûtangente = *ZK* = 1, aïant son ordonnée *BL* = *ZK*, étant ainsi ajoûtée à la Courbe *HUC* des vitesses restantes (*u*) & sur la même asymptote *BC* qu'elle ; si l'on mene une ordonnée quelconque *TU* (*u*) de cette Courbe *HUC* ; qu'on fasse *UG* parallele à *TN*, & qui rencontre *NZ* en *G* ; qu'on prenne *N*Π troisiéme proportionelle à *NZ*, *NG*, comme l'on a pris (*Corol.* 25.) *NK* troisiéme proportionnelle à *NZ*, *N*λ, ou *AL* troisiéme proportionnelle à *AB* (*a*), *AH* (*b*) ; qu'on fasse Π*X* parallele à *NC*, & qui rencon-

tre la Logarithmique *LXC* en *X*; & qu'on mene par ce point *X* la droite *DS* parallele à *BA*, & qui rencontre perdiculairement en *S*, *D*, les paralleles *AC*, *BC* : il est visible.

1°. Qu'en prenant, par exemple, les *AT* pour les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, l'on aura ici tout à la fois *TU* ou *NG* (*Solut.* 1. *art.* 1. & *Solut.* 2. *art.* 6.) pour les vitesses restantes à la fin de ces tems malgré les résistances supposées; *BD* ou *AS* (*art.* 4.) pour les espaces parcourus en vertu de ces vitesses *TU* (*u*) pendant ces mêmes tems *AT* (*t*); *N*Π ou *SX* (*art.* 1) pour les résistances qui s'y opposent à la fin de ces espaces ou de ces tems; *NZ* ou *AB* ou *SD* (*art.* 1.) pour la pesanteur constante du mobile; *Z*Π ou *DX* (*art.* 1. 2. 3. 4.) pour les excès de force dont cette pesanteur surpasse les résistances instantanées *SX*, ou est surpassée par elles à la fin des tems *AT*.

2°. Il est pareillement visible que si au lieu de prendre *AT* pour les tems écoulés, l'on eût pris à volonté quelqu'une des autres grandeurs *TU*, *BD*, *SX*, *DX*, *AB*, &c. pour ce qu'on vient de lui voir exprimer dans le nomb. 1. l'on auroit trouvé de même les tems écoulés depuis le commencement du mouvement, en raison des *AT* correspondantes, & tout le reste comme dans ce nomb. 1. Les citations qui y sont emploïées, rendent tout cela manifeste.

Les deux Solutions précedentes pourroient encore fournir plusieurs autres Corollaires que je supprime pour n'être pas trop long.

REMARQUE.

Si l'on compare les Corol. 2.3.4.6.7.8.9.16.17.23. de ce Problême-ci avec les Corol. 2.4.5.6.10. du Probl. 2. pag. 128. &c. des Mem. de 1708. On verra en géneral pour tous les cas des projections verticales de haut en bas dans des milieux résistans, que les hypothêses de leurs résistances *en raison des vitesses des corps jettés*, & *en raison des quarrés de ces vitesses*, ont ceci de conforme,

1°. Qu'elles rendent également après un tems infini les

viteſſes, qui malgré ces réſiſtances réſulteroient de la force de projection & de la peſanteur conſtante du corps jetté, égales dans chaque milieu à la terminale de ce corps, c'eſt-à-dire, à la plus grande qu'il pût y acquerir après un tems infini en vertu de ſa ſeule peſanteur.

2°. Que juſque-là ces viteſſes reſtantes de celle de projection & des primitivement accelerées par la peſanteur conſtante du mobile, en raiſon des tems écoulés, s'accelereroient ou ſe retarderoient de part & d'autre, c'eſt-à-dire dans chacune des hypothéſes précedentes, ſelon que les viteſſes de projection ſeroient moindres ou plus grandes que les terminales du corps jetté permiſes par les milieux où elles ſe feroient.

3°. Qu'au contraire ces viteſſes reſtantes, après être devenuës égales aux terminales correſpondantes, reſteroient toûjours uniformes de part & d'autre, ſi le mouvement continuoit dans chaque milieu : de ſorte que ſi la viteſſe de projection étoit égale de part & d'autre à la terminale qui y conviendroit au corps jetté, ſa viteſſe actuelle s'y trouveroit uniforme pour toûjours dès le premier inſtant de la projection nonobſtant l'action continuelle de ſa peſanteur à laquelle la réſiſtance de chacun des milieux ſuppoſés ſe trouveroit alors égale dans toute la durée de l'un & de l'autre de ſes mouvemens.

4°. Que les eſpaces parcourus pendant des tems infinis, ſeroient pareillement infinis de part & d'autre.

5°. Que les Courbes des viteſſes reſtantes malgré les réſiſtances de chacune des deux hypothéſes précedentes, doivent avoir une aſymptote parallele à leur axe, & diſtante de lui d'une quantité qui de part & d'autre exprime la viteſſe terminale du corps jetté.

6°. Que chacune de ces Courbes, & celle des réſiſtances totales, qui lui répond ſur le même axe, ont leurs convexités ou leurs concavités tournées en même ſens ou du même côté.

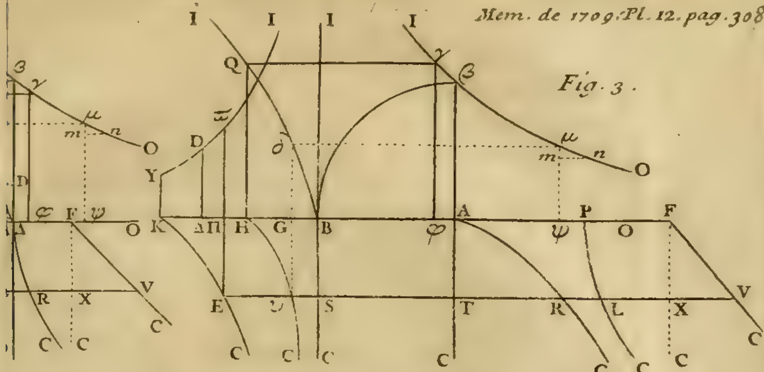
C'eſt là ce que la comparaiſon fortuite des Corollaires cités au commencement de cette Remarque, m'y a fait appercevoir

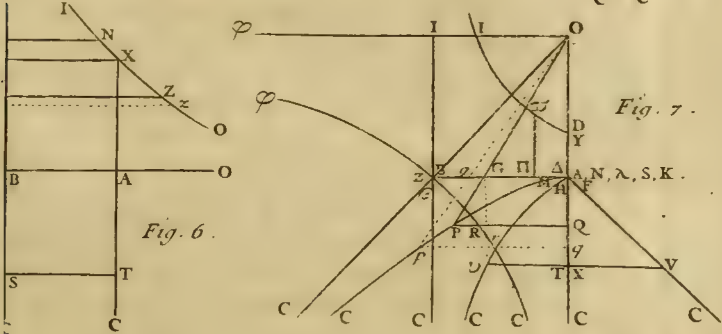
de conformité nonobstant la difference des hypothêses qu'on y fait touchant les résistances des milieux : peut-être que la comparaison, faite entr'eux, des autres Corollaires de ce Problême-ci & du Probl. 2. pag. 128. &c. des Mem. de 1708. y feroit aussi appercevoir d'autres conformités ; mais cela est trop aisé à faire pour s'y arrêter davantage : il suffit d'y avoir fait penser.

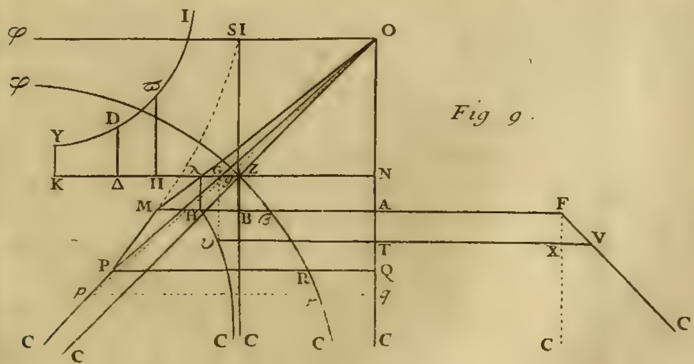
Il est aisé de voir aussi qu'en faisant b=o *dans tout ce qui précéde le Problême de la pag. 196. se trouvera n'être qu'un Corollaire de celui-ci, dont les deux Solutions générales avec leurs Corollaires deviendront alors propres & particulieres à celui-là : De sorte qu'on auroit pû l'ometrre en concluant ainsi de ce qui précede, tout ce qu'on en a démontré depuis la pag. 196. jusqu'à la pag. 227. Mais le Memoire où il se trouve, & celui-ci, ainsi réduits à un, l'auroient rendu trop long, outre qu'il y a des Esprits à qui l'intelligence du particulier sert pour entendre le géneral ; ce qui est fort commun, & cependant d'autant plus surprenant que le géneral est toûjours plus simple que le particulier.*

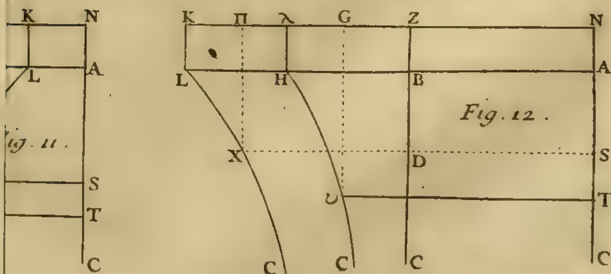
Voilà pour les mouvemens primitivement accelerés en raison des tems écoulés, c'est-à-dire, dont les vitesses dans le vuide auroient eu des accroissemens égaux en tems égaux : lesquels mouvemens seroient faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives que ces milieux permettroient au mobile, soit qu'il eût commencé par quelqu'une, ou non. On verra de même dans un autre Memoire ce qui concerne les mouvemens primitivement retardés en raison des tems à écouler jusqu'à leur entiere extinction dans le vuide : lesquels mouvemens seroient aussi faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses effectives des corps mûs permises par ces milieux.



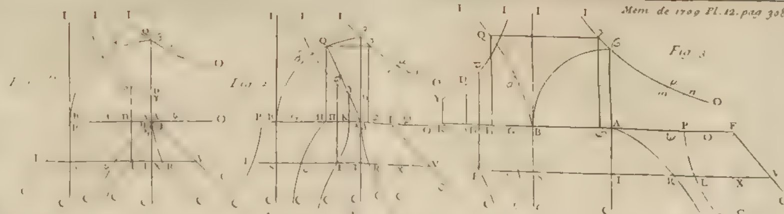


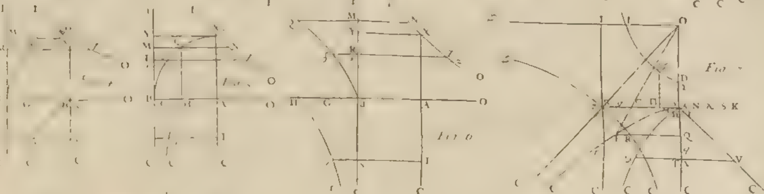


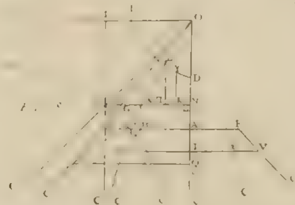


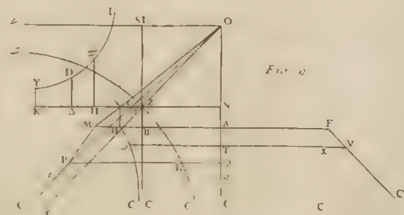


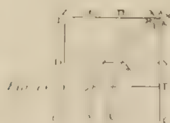
Berey fecit

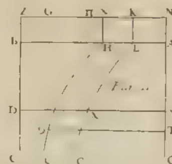

Fig. 3
Q
A
P
F
B
I
K
L
X
O
C

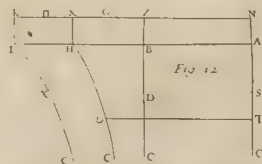

M
G
A
O
I
C
N
K
V


O
D
A
F
I
V
C


O
Y
D
F
V
X
A
B
M
C




G
N
H
L
A
D
T
C


Fig. 12
N
A
H
B
D
S
T
C

OBSERVATIONS SUR LES ECREVISSES DE RIVIERE.

Par M. Geoffroy le jeune.

Parmi le grand nombre d'Obſervations qu'on a faites ſur certaines parties de l'Hiſtoire naturelle, il y en a qui demeurent obſcures & comme ignorées, faute d'être confirmées par de nouvelles experiences. Cependant pour rendre la Phyſique floriſſante, ce n'eſt pas aſſez de faire de nouvelles découvertes, il eſt encore important d'empêcher que les anciennes ne ſe perdent. C'eſt-pourquoi il faut quelquefois remanier de nouveau certaines matieres, qui au bout d'un tems paroiſſent négligées, & dont on ne peut rien dire que ſur la foi de quelqu'Auteur à qui il n'eſt pas toûjours sûr de ſe fier. 1709. 23. Aouſt.

En prenant cette voïe on a le plaiſir, ou de confirmer l'opinion vulgaire, ou de la refuter, ou du moins de l'éclaircir. Car quand il n'y a que peu de perſonnes qui aïent traité une matiere, il n'arrive gueres qu'ils l'aïent épuiſée. C'eſt ce qui m'a porté de nouveau à faire quelques obſervations ſur les Ecreviſſes de Riviere, & particulierement ſur les pierres qu'on y découvre dans le tems qu'elles changent de dépoüilles, & qui à cauſe de leur figure, ſont nommées Yeux d'Ecreviſſes.

L'opinion la plus commune touchant ces ſortes de pierres, eſt qu'elles ſe trouvent dans le cerveau des Ecreviſſes de Riviere. C'eſt celle de Geſner, d'Agricola, & de Belon. Cependant il s'en faut bien qu'elles ſoient dans le cerveau de ces animaux, puiſqu'on les trouve plûtôt autour de leur eſtomach.

Vanhelmont paroît être le premier qui s'en ſoit apper-

çû; mais comme il s'eſt rendu ſuſpect en bien des rencontres, ſon ſentiment n'a pû prévaloir ſur celui qui étoit déja reçû. Il n'a donc été ſuivi que de peu de perſonnes qui ont vû que l'experience étoit pour lui.

Cet Auteur avoit obſervé, que vers la my-Juin les Ecreviſſes commencent à devenir malades, parce que c'eſt là environ le tems qu'elles doivent changer de dépoüilles. Elles demeurent pendant neuf jours & davantage languiſſantes & comme mortes; & il prétend que dans cet eſpace de tems il ſe forme une nouvelle membrane qui enveloppe leur eſtomach, & qu'entre les deux il s'épanche une liqueur laiteuſe, qui deſcendant aux deux côtez ſe durcit en pierre. Cette nouvelle membrane lui ſemble naître de la pellicule qui ſe forme ſur cette liqueur laiteuſe, comme il a coûtume de s'en former une ſur du lait chaud. Elle devient le nouvel eſtomach, & le vieux qui eſt au dedans, avec le reſte de cette liqueur & les pierres même, ſe réſout peu à peu, & ſert de nourriture à l'animal pendant vingt-ſept jours que durent ces pierres; car alors il ne mange point, & on ne lui trouve aucune autre choſe dans l'eſtomach.

Il ne m'a pas été poſſible de ſuivre de point en point tout ce que rapporte Vanhelmont; mais j'ai fait quelques obſervations qui s'accordent avec les ſiennes.

J'ai trouvé des Ecreviſſes fort molles; & ſi prêtes à quitter leurs écailles, qu'elle étoit déja levée; enſorte qu'elle laiſſoit voir la nouvelle comme une membrane aſſez épaiſſe à qui il ne manquoit que le tems pour la rendre auſſi dure que celle qui ſe détachoit.

J'ai remarqué que l'écaille qui ſe levoit étoit fort mince, & que la membrane interieure qui a coûtume de la tapiſſer n'y étoit plus attachée, & formoit la nouvelle écaille.

J'ai obſervé la même choſe dans la queuë que l'on nomme communément le Col de l'Ecreviſſe, dont les tables ſe levoient fort aiſément, & laiſſoient paroître la membrane qui devoit leur ſucceder.

En caſſant les pinces j'ai trouvé la même choſe; ainſi on

peut dire, que dans le tems que l'Ecrevisse se dépoüille de son écaille, la membrane interne s'en détache parfaitement; elle devient plus épaisse, & enfin forme l'écaille.

J'ai ensuite observé, que celles qui commençoient à quitter leurs écailles & où la membrane intérieure étoit assez épaisse, avoient des pierres qui étoient tout-à-fait formées aïant la figure d'une tête de champignon naissant.

Pour remonter à la naissance de ces pierres, j'ai ouvert des Ecrevisses en d'autres tems de l'année sans y rien trouver. Mais dans les dernieres Observations que j'ai faites ce mois-cy, j'ai ouvert des Ecrevisses vigoureuses & qui ne faisoient que commencer leur muë, j'ai trouvé à la place de chaque pierre une lame ou plaque blanche qui nageoit au milieu d'une glaire, & qui étoit apparemment l'embrion de la pierre. Cette pierre & le suc glaireux étoient envelopez dans un petit sac membraneux & fort delié.

J'en ai trouvé d'autres où les pierres étoient toutes formées, & dont l'estomach étoit solide & plein d'une liqueur brune, mousseuse & fetide.

Au dessous du sac qui renferme les pierres, j'ai trouvé une vesicule membraneuse aplatie & dont je ne connois point l'usage. J'ai observé seulement, que lorsqu'il ne paroît plus de pierre, cette vesicule se rempli d'une eau claire & douce, & occupe le même espace qu'occupoit la pierre.

Dans d'autres j'ai trouvé les pierres grosses, belles, & une nouvelle membrane très-délicate qui envelope les pierres & l'estomach. Aïant levé cette membrane, on y distinguoit très-parfaitement trois nouvelles dents toutes semblables à celles du vieil estomach; de maniere que l'on ne peut point douter que cette membrane ne devienne par la suite le véritable estomach.

Dans des Ecrevisses qui avoient mué, j'ai trouvé l'estomach plein d'une liqueur brune. La membrane de l'estomach étoit tendre, il ne paroissoit point de matiere

visqueuse ni aucun vestige d'ancien estomach. Les pierres étoient fort diminuées, & paroissoient comme rongées par quelque dissolvant. Elles étoient envelopées d'une membrane fort fine qui étoit la seule cloison qui les séparât de la captivité de l'estomach.

Dans d'autres Ecrevisses qui avoient mué depuis plus long-tems, je n'ai point apperçû leurs pierres à leur place accoûtumée; mais je les ai trouvées tout-à-fait dans l'estomach, & jointes ensemble par leurs parties concaves.

Dans d'autres dont la nouvelle écaille étoit déja presque tout-à-fait dure, je n'ai apperçû à l'endroit où les pierres ont coûtume d'être renfermées, qu'une tache blanche qui n'étoit autre chose que les deux membranes de la Vesicule qui renfermoit la pierre & qui s'étoient affaissées l'une sur l'autre. A'iant ouvert l'estomach je l'ai trouvé plein d'une liqueur jaune & d'alimens sans aucun vestige de pierre. J'y ai même trouvé des morceaux d'écailles & de pattes d'autres Ecrevisses à demi digerées. J'ai remarqué dans ces dernieres, que l'espace qu'occupoient les pierres étoit rempli par une autre vessie pleine d'eau dont j'ai déja parlé.

Toutes ces Observations nous prouvent,

1°. Que les pierres qui se tirent de la tête des Ecrevisses, ne sont point dans leur cerveau; mais qu'elles tiennent à l'estomach qui est placé au-dessous.

2°. Il est visible qu'elles ne donnent pas naissance à la nouvelle écaille, comme quelques-uns l'ont prétendu, puisqu'elles subsistent encore quand l'écaille est formée.

3°. On voit encore, qu'en quittant leurs écailles, elles changent d'estomach, sans qu'il paroisse que le reste des autres parties se renouvellent, excepté l'intestin qui m'a paru se renouveller comme l'estomach.

4°. Il est encore à remarquer, que les pierres ne se trouvent dans les Ecrevisses qu'au tems de leur mûë; qu'elles se trouvent ensuite envelopées dans le nouvel estomach, où elles diminuent insensiblement jusqu'à leur entiere destruction.

5°. Il

5°. Il paroît donc que ces pierres auſſi-bien que la membrane du vieil eſtomach, ſervent de nourriture à l'animal pendant la maladie que lui cauſe ſa muë.

Quelques Auteurs prétendent, que la couleur bleuë de certaines pierres d'Ecreviſſes vient d'une maladie particuliere qui ſurvient à quelques-unes dans le tems de leur muë. Si ce n'en eſt pas la veritable cauſe, du moins eſt-il certain, que les pierres qui ſe trouvent de cette couleur, prennent une couleur de chair par la cuiſſon. J'ai même obſervé que la ſimple chaleur du Soleil les rougiſſoit.

C'eſt ce qui fait que parmi celles que nous emploïons, nous en trouvons de bleuës & de couleur de chair. Il me paroît difficile à croîre, que la plus grande partie de ces pierres qu'on nous vend ſoient contrefaites comme quelques-uns l'ont prétendu, à cauſe, ſelon eux, de la grande quantité qui s'en emploïe; puiſque nous voïons les Ecreviſſes ſe trouver preſque par tout en très-grande abondance. Outre cela ces pierres ſont diſpoſées par couche comme le Bezoard, ce que l'art auroit peine à imiter. D'ailleurs en les calcinant, elles noirciſſent, s'exfolient, & portent une odeur urineuſe. Ce qui marque qu'elles ſont veritablement tirées du regne animal. En effet par l'analyſe on en tire de l'eſprit urineux avec un peu de ſel volatile. Il y a apparence qu'on tire les yeux d'Ecreviſſes que nous employons, de celles qui ſont en vie, & que les bleües ou les rougeâtres qui s'y trouvent mêlées, viennent des malades & des mortes.

On attribuë ordinairement aux yeux d'Ecreviſſes une vertu ſimplement abſorbante; mais l'experience ſuivante prouve, qu'ils ont d'autres proprietez qui les portent juſque dans la maſſe du ſang.

Une perſonne pour des aigreurs qu'elle avoit, aïant pris une potion où il entroit des yeux d'Ecreviſſes, ſe ſentit tout à coup priſe d'une eſpece d'hereſipele au viſage qui lui devint bouffi avec de grands piquotemens. Cette bouffiſure s'étendit juſqu'à la gorge & l'empêchoit d'avaler avec facilité. On craignit d'abord qu'il n'y eût quelque

chose de mêlé parmi les yeux d'Ecrevisses, ou qu'ils n'eussent été pilez dans un mortier de cuivre dont ils auroient pris la mauvaise qualité. On donna la même potion avec d'autres yeux d'Ecrevisses qui produisirent toûjours le même effet. La Malade aïant appris qu'il y avoit des yeux d'Ecrevisses dans la potion, tira le Medecin de l'inquiétude où il étoit, en lui disant qu'elle se ressouvenoit, que la même chose lui étoit arrivée toutes les fois qu'elle avoit mangé des Ecrevisses. En effet l'usage des yeux d'Ecrevisses cessé, les accidens cesserent. Depuis on a remarqué que les Ecrevisses causoient à son fils les mêmes accidens. Sur quoi il n'est pas hors de propos de remarquer, combien les temperamens troublent souvent l'effet des remedes.

Quoiqu'on ne parle que des pierres qui se trouvent dans les Ecrevisses de riviere, il y a pourtant une espece d'Ecrevisses qui est celle que l'on nomme *Astacus Marinus*, en François *Homar*, où l'on en trouve. Cette espece est toute semblable à nos Ecrevisses de riviere à la grosseur près.

Au reste s'il y a des gens qui ont de l'aversion pour les Ecrevisses, Vanhelmont a remarqué que les Ecrevisses en ont une si grande pour les Porcs, que s'il en passe quelqu'un auprès d'elles, cela les fait mourir. C'est pourquoi, dit-il, dans le Brandebourg où la pêche en est abondante, les Voituriers qui les transportent sont obligez de faire sentinelle la nuit pour empêcher qu'il ne passe de Porcs sous leur charette ; car s'il en passoit un, il ne s'en trouveroit pas une en vie le lendemain matin.



EXTRAIT OU ABREGE DU PROJET

de M. Reneaume sur les Manuscrits de feu M. de Tournefort.

PAR M. TERRASSON.

En execution de l'art. 48 *du Reglement donné par le Roi à l'Academie Royale des Inscriptions, daté du* 16 *Juillet* 1701, *cette Academie* & *l'Academie Royale des Sciences se font tous les six mois une députation réciproque, dans laquelle elles s'envoyent rendre compte l'une à l'autre par un discours fait exprès, de ce qui s'est lû ou dit de plus remarquable en chacune pendant ces six mois. M. Terrasson fut chargé de ce rapport pour l'Academie des Sciences lorsqu'il y fut reçû en* 1707; *& c'est d'un de ses Discours que cet Extrait est tiré. Comme il ne s'agit encore que d'un Projet, M. Reneaume n'a pas voulu que son Memoire qui est fort étendu, occupât ici une grande place; & l'on n'a pas crû aussi devoir differer jusqu'à l'entiere execution d'un dessein si vaste, de donner une idée de ces sçavans Manuscrits, dont le Catalogue seul fait tant d'honneur à la memoire encore recente de M. de Tournefort.*

TOutes les Societez, & sur tout celles des Gens de Lettres, regardent les Particuliers morts dans leur sein comme leur appartenant toûjours par leur nom & par leur memoire; & elles ne se glorifient pas moins des grands hommes qu'elles ont eus, que de ceux qu'elles ont encore. Cette considération, MESSIEURS, m'oblige à mettre au nombre des Pieces dont je dois vous rendre compte dans ce Discours, les Manuscrits qu'on a trouvez dans le Cabinet de feu M. de Tournefort. Inventeur & original dans une Science où il ne sembloit pas qu'on pût l'être, la distribution générale qu'il a faite des Plantes

A Messieurs de l'Academie des Medailles & Inscriptions.

a réduit en Siſtême ce qui n'étoit auparavant qu'un Catalogue très-incomplet, & les principes ſur leſquels il a fondé cette diſtribution, ſont ſi judicieux & ſi naturels, qu'on peut déſormais ſans connoître toutes les Plantes ſçavoir néantmoins toute la Botanique. M. de Tournefort n'avoit pû faciliter & abreger ainſi cette ſcience pour le Public, qu'après avoir eſſuïé pour en apprendre lui-même tout le détail un nombre infini de perils & de travaux qui étoient au-deſſus du courage ordinaire & de la deſtinée même des Sçavans. Son deſſein n'étoit pourtant point encore accompli, & lui-même n'avoit regardé ſes Inſtitutions de la Botanique que comme l'eſſai d'un Ouvrage bien plus grand qu'il méditoit. C'eſt ce qu'on a reconnu pleinement par les douze volumes in folio de Recueils & de Memoires que M. de Tournefort rempliſſoit & augmentoit tous les jours, & dont la Republique des Lettres a herité ſous le nom & dans la Perſonne de Monſieur l'Abbé Bignon. Mais plus ces Volumes ſont chargez de faits, de découvertes, d'obſervations, moins ils ſont en état d'être expoſez au Public, avant qu'une main ſçavante leur ait donné une forme digne de la réputation de leur Auteur. M. Reneaume chargé de ce ſoin par Monſieur l'Abbé Bignon, a propoſé à l'Academie ſes vûës ſur ce ſujet; & il ne paroit pas que M. de Tournefort eût pû porter les ſiennes plus loin. Le premier Volume de ces Manuſcrits eſt le ſeul dont M. Reneaume ne prétend pas faire uſage, parce qu'il ne contient que la liſte des Plantes du Jardin Roïal en particulier; & qu'ainſi il ne peut être utile qu'à ceux qui ont la direction de ce Jardin, dont l'ordonnance même a été fort changée. Mais les onze Volumes qui ſuivent, fourniront, ſelon lui, deux Ouvrages differens. Le premier ſera un in-quarto intitulé, *Topographia Botanica cum notis, &c.* Cet Ouvrage ſera tiré du ſecond, du troiſiéme, du quatriéme & du cinquiéme Volume des Manuſcrits de nôtre Auteur. Le premier de ces quatre contient les Herboriſations de M. de Tournefort aux environs de Paris, dont il a fait imprimer la meilleure

partie en 1698, & plusieurs autres faites en d'autres lieux par d'autres mains que la sienne. Le second est la Nomenclature des Plantes observées par l'Auteur tant en France qu'en Espagne & en Portugal : outre cela, un Memoire des Plantes des Pirenées & de la Provence, qui lui avoit été communiqué par Monsieur le premier Medecin : & un autre qui venoit de M. Laugier fameux Botaniste. Joignant à cela les Herborisations que M. Reneaume a faites lui-même dans la Sologne & dans le Berri, & celles de M. Chomel dans l'Auvergne : plaçant là le Corollaire des Plantes étrangeres que l'Auteur avoit apportées du voïage de l'Orient, & toutes les autres qui seront fournies par des Botanistes sçavans & fideles de tous les endroits du Monde ; on en fera le fond de la nouvelle Topographie. A l'égard des Notes qu'il faut joindre à cet Ouvrage pour le rendre plus agreable & plus utile, si elles sont purement critiques, il les prendra dans le troisiéme Volume intitulé par l'Auteur même *Plantarum adversaria.* C'est un Recüeil très-curieux des differences qu'il avoit remarquées dans les Botanistes sur les noms & sur les descriptions des Plantes. Il distingue les bonnes & les mauvaises figures qu'ils en ont fait faire : il releve les erreurs où ils sont tombez en confondant sous un même nom des especes differentes, ou en établissant des especes differentes sur de simples varietez d'individus. Si ces Notes regardent l'usage de ces Plantes dans la Medecine, il les prendra dans le quatriéme Volume qui en est rempli ; mais comme le choix n'en est pas fait, & qu'il est important de ne pas abuser sur cet article de la confiance que le Public auroit d'ailleurs en cet Ouvrage, M. Reneaume emploïera la derniere exactitude à verifier les vertus attribuées par l'Auteur à chaque Plante quand elles seront moins connuës.

Voilà le projet abregé du premier Ouvrage qu'on pourroit appeller l'Histoire locale & critique des Plantes par opposition à leur Histoire naturelle & generale qui sera la matiere du second Ouvrage bien plus grand & plus consi-

derable que le premier. Il ſera pris des ſept derniers Volumes de nôtre Auteur. Le premier de ces ſept eſt intitulé ou porte pour étiquette, *Obſervationes Botanicæ*. Ces Obſervations ſont ſemées ſelon l'ordre alphabetique, & laiſſent par conſéquent de grands vuides entre elles : le tout enfin n'eſt qu'ébauché ; ou s'il s'y trouve quelques deſcriptions parfaites, elles ſont du même ordre que celles qui rempliſſent les ſix derniers Volumes, & il faut les y rapporter. Ces ſix Volumes ſont ce qu'il y a de plus complet dans ces Manuſcrits. C'eſt un ample tréſor & un riche fond pour une Botanique univerſelle ; ils ſont remplis également & ſous un même titre de deſcriptions de Plantes. Ces deſcriptions ne concernent pas ſeulement le port de chaque Plante priſe en ſa hauteur naturelle : Elles ſont faites ſur des études & des obſervations journalieres, & de ſaiſon en ſaiſon, ou d'année en année à meſure que ces Plantes croiſſent dans le Jardin Royal ou dans les Campagnes. On y fait mention des differences des Climats, ſelon leſquelles une Plante qui porte des fleurs & des fruits ſur ſon terroir, ne porte ailleurs que des feüilles. On y parle de leur culture ou de leur naiſſance volontaire. Mait tout cela n'eſt pas également verifié ; & M. de Tournefort qui n'avoit pû voir par lui-même tout ce qu'il dit, marque ſon doute en pluſieurs endroits. De plus le nom de chaque Plante ne porte pas avec lui ſa deſcription ; & ce qu'il y en a ſert d'engagement à traiter ainſi toutes les autres. C'eſt en ceci que M. Reneaume compte moins ſur ſes ſoins & ſur ſes travaux qui ne ſçauroient ſuffire à une execution ſi vaſte, que ſur les ſecours de Meſſieurs nos Botaniſtes, & ſur tout de M. Marchant, qui cultive lui-même une infinité de Plantes curieuſes, & qui en donne tous les ans de ſi belles deſcriptions à l'Academie. Il emploïera auſſi celles de M. Chomel. Il conſultera l'Herbier de M. Morin que M. de Tournefort lui-même indique quelquefois. Il remontera aux premiers memoires de l'Academie dreſſez par feu M. Dodard ; il n'excluëra point les Memoires étrangers quand ils viendront de quelque

main ſûre, tels que ſont entre autres ceux du P. Plumier qui a beaucoup étudié les Plantes de l'Amerique. Pour l'ordre ſous lequel on rangera toutes ces Plantes, il n'en eſt point de meilleur que celui de la Methode établie dans les Inſtitutions. Par là on fera ſentir de plus en plus la commodité de cette Méthode ; on y accoûtumera les jeunes Botaniſtes, & la place ſera toûjours marquée pour les Plantes qu'on découvrira de ſiecle en ſiecle. Mais en nommant ces Plantes par rapport aux claſſes & aux genres de la Mèthode, on joindra à chacune le nom ou le ſynonyme qu'elles ont dans Gaſpard Bauhin & dans d'autres vieux Botaniſtes ſi elles leur ont été connuës : on citera même leurs pages pour la commodité des confrontations ; & afin qu'en réformant leur ordre & leur nomenclature, on ne perde pas les lumieres qu'on peut tirer de leurs recherches.

Le corps de l'Ouvrage ſera enrichi de figures, & précedé de quelques Traitez préliminaires, qui expliqueront en général la nature des Plantes, leur anatomie ou leur conſtruction interne, & ainſi du reſte. On y joindra l'Hiſtoire non des Plantes, car c'eſt l'ouvage même ; mais de la Botanique regardée comme ſcience. On en rapportera le renouvellement & l'éclat à Gaſton de France Duc d'Orleans, Oncle de Sa Majeſté, qui aſſembloit dans ſon Palais les plus ſçavans hommes en cette matiere ; parmi leſquels ſe diſtinguoit M. Marchant le Pere, qui a laiſſé à l'Academie les plus belles figures qu'elle ait dans ſon Tréſor. L'on finira par des Tables faites ſur differentes vûës de commodité, & qui préſenteront tout l'ouvrage ſous toute ſorte d'aſpects. Un Corps de Botanique ſi entier & ſi achevé, & qui ſoûtiendroit le titre de *Summa Botanica*, n'appartiendroit plus, à proprement parler, ni à M. de Tournefort ni à M. Reneaume, mais il ſeroit dû à l'Academie entiere : De telle ſorte neantmoins, que ſur le Plan & les Memoires de M. de Tournefort, M. Reneaume guidé par les conſeils de Meſſieurs nos Academiciens auroit donné un Ouvrage, dans lequel on trouveroit tout l'ordre, toute

l'uniformité, toute la perfection qu'on ne peut attendre que d'un seul esprit & d'une seule main, toute la discussion: Toute l'étenduë, toute l'infaillibilité qui peut résulter des Conferences d'une sçavante Compagnie.

ECLAIRCISSEMENS SUR LA CONSTRUCTION DES E'GALITEZ.

SECOND MEMOIRE.

PAR M. ROLLE.

1709. 9. Aoust. VOici la suite des Eclaircissemens que j'ai donnés sur la Construction des Egalitez dans un Memoire du 11 Juillet 1708. Ce Memoire est imprimé parmi les autres Memoires que l'Academie a donnés au Public la même année, page 339. Il est necessaire d'en rappeller le souvenir pour l'intelligence de ce qui suit.

ARTICLE I. C'est une maxime de la Methode en question : Que dans une effection géométrique le nombre des Points où les Courbes se rencontrent, est toûjours égal au nombre des différentes Racines réelles de l'Egalité que l'on s'est proposé de construire.

C'est encore une maxime de la même Méthode : Que chacun de ces Points donne une de ces Racines.

J'ai marqué plusieurs exceptions de ces maximes dans mon premier Memoire. Mais je n'ai pas encore expliqué comment il arrive dans l'effection géometrique, que les Courbes se rencontrent en autant de points qu'il y a de differentes racines réelles dans l'Egalité à construire sans donner aucune de ces racines : de maniere qu'en certains cas, la premiere des deux maximes que je viens de citer se trouve parfaitement remplie, & que dans ces mêmes cas

cas l'autre maxime eſt par tout combattuë : que l'on ne trouve pas les racines qu'on demande, & que l'on en trouve d'autres qui en ont de fortes apparences. C'eſt la premiere difficulté que je tâcherai d'expliquer dans ce premier article.

Il y a des cas auſſi, où le nombre des points de rencontre eſt tantôt plus grand, & tantôt plus petit que le nombre des differentes racines de l'Egalité propoſée, & où il arrive, comme dans les cas précédens, que la méthode ne donne aucune de ces racines & en donne d'autres qui impoſent. J'en donnerai ici des exemples.

En d'autres cas, cette méthode donne, ou toutes les racines de l'Egalité à conſtruire, ou ſeulement quelques-unes. Mais en même tems elle donne auſſi des racines réelles qui n'appartiennent pas à cette Egalité, & cela par des cauſes très-differentes de celles qui ont été expliquées dans le premier Memoire. En ſorte qu'il ſeroit ſouvent difficile de diſtinguer dans la conſtruction les racines que l'on demande de celles qu'il faut rejetter. Ainſi, il eſt bon d'en donner des exemples, & c'eſt par-là que finira ce premier article.

Je n'entreprens pas, cette fois, de faire connoître toute l'étenduë de ces inconvéniens, ni l'étenduë des autres inconvéniens de la Méthode qui ſeront indiqués dans ce Memoire. Je me propoſe ſeulement d'en prouver la réalité, en attendant une nouvelle Theorie qui marquera ce qu'il faut retenir de cette Méthode, & ce qu'il faudroit y ajoûter pour la mettre en état de produire les effets qu'on lui attribuë, lorſque cela eſt poſſible.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple, l'Egalité que l'on ſe propoſe de conſtruire ne renferme qu'une racine réelle. La Méthode ne donne pas cette racine, & donne une racine réelle étrangere.

L'Egalité à conſtruire eſt celle qu'on voit en *A*.

$$A.\ x^5 + a^4 x - 2a^5 = 0.$$

Le lieu donné eſt le lieu marqué *B*.

$$B \ldots yyxx + 2a^4 = a^3 x.$$

Et le ſecond lieu que fournit la Méthode ſe préſente d'abord comme il eſt en *C*.

$$C \ldots aax^3 - 4a^3xx + 4a^4x + xy^4 - 2ay^4 = 0.$$

Mais il ſe diviſe par $x - 2a$, & la diviſion le réduit aux termes marquez *D*.

$$D \ldots aaxx - 2a^3x + y^4 = 0.$$

Comme la racine que donne la conſtruction eſt toûjours la même, ſoit que l'on prenne *C*, ou que l'on prenne *D*, il eſt mieux de prendre le plus ſimple. Ainſi, il faut conſtruire ſur un même axe *EO* & une même origine *O*, le lieu donné *B* & le lieu trouvé *D*, ſuivant la Méthode. Ce qui produira l'effet que déſigne la premiere figure.

FIG. I.

Le premier lieu fournit la feüille infinie *CRMPNSC*. Et le ſecond lieu donne le Cercle du ſecond genre *OFCGO*.

Ces deux Courbes ſe touchent au point *C* & ne ſe rencontrent que dans ce point. D'où il faudroit conclure ſelon la Méthode, que l'appliquée *OC* commune aux deux Courbes eſt la racine de l'Egalité *A*, & conclure auſſi que cette Egalité n'a point d'autre racine.

Mais il ſe trouve tout au contraire que l'Egalité *A* renferme une racine que la conſtruction ne donne pas, & que la racine *OC* qu'elle donne, n'eſt pas de cette Egalité.

Car 1°, la Reſolution analytique de l'Egalité *A* fait voir que a eſt l'unique racine réelle de cette Egalité; de plus, cette racine ne ſe trouve pas dans la conſtruction: parce qu'il faudroit pour cela qu'elle fût dans les lieux *B*. *D*. & en la ſubſtituant à la place de x dans le lieu *B*, il arrive que la valeur de y qui devroit en être l'abſciſſe n'eſt autre choſe que la valeur imaginaire $\sqrt[2]{-aa}$. Ainſi, la racine de *A* ne ſe trouve pas dans le premier lieu, ni par conſéquent dans la conſtruction.

2°. Je dis qu'il n'y a qu'une racine dans la conſtruction, & que cette racine eſt étrangere. Car en comparant les lieux conſtruits *B*. *D*, pour faire évanoüir y, la réduite ſe

divise par la proposée *A*, & donne au quotient l'Egalité $xx - 4ax + 4aa = 0$; ainsi cette Egalité renferme toutes les racines étrangéres qui peuvent se trouver dans la construction. Mais elle ne donne que $2a$ pour la valeur de x, & $2a$ étant substituée à la place de x dans les lieux *B*. *D*. chaque substitution donne $y = 0$, & ne donne point d'autre valeur de y. D'où il suit que la Méthode dans cet exemple, n'a introduit que la seule racine étrangere $2a$, & que cette racine est dans la construction, puisqu'elle se trouve dans une solution des lieux. De là il suit aussi qu'elle n'y est qu'une fois; puisque l'une & l'autre substitution n'a donné qu'une valeur de y pour abscisse. Donc l'effection géométrique ne donne pas la racine de l'Egalité à construire (par 1°.) & donne une racine qui n'appartient pas à cette Egalité (par 2°.). *Ce qu'il falloit*, &c.

Remarque. Pour reconnoître les veritables racines dans la construction & les distinguer des racines étrangeres que la Méthode y introduit. Pour sçavoir aussi combien de fois les unes & les autres s'y trouveront, & pour s'assurer de celles qui n'y entrent pas, il suffiroit de résoudre en termes analytiques le Problême qu'expriment les lieux construits d'une maniere relative à cette Méthode. On a pû se donner quelque idée de la résolution de ce Problême dans l'exemple précédent, & l'on auroit occasion de perfectionner cette idée dans d'autres Exemples que l'on verra ici. Mais l'on verra encore mieux dans les Memoires suivans, les diffiultez qui en sont inséparables & la necessité de les résoudre, quand on veut reconnoître les écueils de la Méthode en question.

SECOND EXEMPLE.

Les Courbes se coupent en deux point dans cet exemple, & il n'y a aussi que deux racines réelles dans l'Egalité à construire. Mais les racines que donnent ces points ne sont pas de cette Egalité.

L'Egalité proposée est l'Egalité *E*. Je la prens fort

ſimple, afin que le calcul ne ſoit pas rebutant.

$E \ldots 4xx - aa = 0.$

Pour la conſtruire on donne le lieu *F*.

$F \ldots yyxx + 6a^4 = 9aaxx + 4a^3x.$

Et la Méthode fournit le ſecond lieu *G*.

$G \ldots yy + 15aa = 16ax.$

Conſtruiſant ces lieux ſelon cette Méthode ſur l'axe *DL* & ſur l'origine *O*, l'effection géométrique ſera repreſentée comme dans la ſeconde figure.

Les valeurs poſitives de x dans le lieu *F* donnent les rameaux infinis *BSP*. *BTQ*.

Les valeurs négatives de x fourniſſent encore des rameaux à l'infini *AM*. *AN*.

Le lieu *G* donne la parabole *VSCTZ*.

Cette parabole rencontre l'autre Courbe aux points *S*, *T*, & ne la rencontre que dans ces deux points. Ainſi, la conſtruction donne les deux racines *SD*, *TL*, & n'en donne point d'autres. D'où il faudroit conclure, ſuivant la Méthode en queſtion, que ces deux racines ſont celles de l'Egalité propoſée *E*, & qu'elle n'en renferme point d'autres. Il ſembleroit même que cela ſe confirme, en ce que *SD*, *TL* ſont de même grandeur & différemment placées dans la conſtruction, & que les deux racines de l'Egalité à conſtruire ſont auſſi de même grandeur ſous differens ſignes. Mais comme cette Egalité eſt fort ſimple & ces racines commenſurables, & que la racine étrangere eſt auſſi commenſurable, il eſt très-facile de s'aſſurer par les voïes dont je me ſuis ſervi dans le premier Exemple : Que la Méthode donne dans celui-ci autant de racines réelles, qu'il y en a dans l'Egalité que l'on s'étoit propoſé de conſtruire, & qu'il n'y a dans la conſtruction aucune des racines de cette Egalité.

A la place de l'Egalité *E*, on peut en prendre une autre auſſi compoſée qu'on voudra, ſoit dans ſes termes ou dans l'élévation de ſon degré, & ſe propoſer de la conſtruire en prenant *F* pour le premier lieu. Alors on verra que les Courbes ſe rencontreront en deux points pour la

racine étrangere, quand même toutes les racines de la proposé seroient imaginaires. De plus, les racines de la proposée étant réelles, elles ne se trouveront pas dans la construction lorsqu'elles ne seront point de celles que renferme le lieu F; & la compensation des deux inconvéniens produira un troisiéme inconvénient qui aura du rapport à celui que désignent les deux premiers Exemples. On peut faire de semblables observations sur chaque premier lieu, dont il sera parlé dans les Remarques suivantes.

REMARQUE I. Si l'on veut un Exemple où les Courbes se rencontrent en autant de points qu'il y a de racines dans l'Egalité à construire sans donner aucune de ses racines : de maniere que les racines étrangeres soient de differentes grandeurs ; on n'a qu'à prendre le lieu $yyx^3 + xx + 8 = 6x$, & se proposer de construire l'Egalité $x^4 - 4x + 2 = 0$. Alors on verra que les Courbes se rencontrent en deux points, & que les deux racines qu'ils donnent sont differentes. On y verra aussi que ce ne sont point les deux racines réelles que cette Egalité renferme.

REMARQUE II. Il y a quantité d'Exemples où le nombre des points de rencontre est plus grand ou plus petit que le nombre des racines réelles de l'Egalité proposée.

Exemple I. Si l'on se propose de construire l'Egalité $xx + 2 = 0$, le premier lieu étant $yxx + 1 = x$: alors le second lieu sera $x + 2y = 1$. Et la droite rencontrera la Courbe en un point. Ainsi la construction donnera une racine réelle. Cependant il est visible que la proposée ne renferme que des racines imaginaires.

Exemple II. Si l'on a le lieu $yyxx + x = 4$, pour construire l'Egalité $x^3 - 3x + 1 = 0$, les Courbes ne se rencontreront qu'en un point, & néanmoins il y a trois racines réelles & differentes dans l'Egalité proposée..

REMARQUE III. Souvent la Méthode donne les racines de l'Egalité proposée ou du moins quelques-unes, lorsque le nombre des points de rencontre surpasse le nombre de ces racines & même quand il surpasse le nombre des dimensions de cette Egalité. Delà plusieurs difficultez

quand il faut les démêler des racines étrangeres dans la conſtruction. On commencera à ſentir ces difficultez, ſi l'on prend le lieu $yyxx + 6a^4 = 9aaxx + 4a^3x$, pour conſtruire l'égalité $x^3 - 3aax + a^3 = 0$. La Méthode donnera le ſecond lieu $4axx + 21aax + ayy = 3yyx + 9a^3$. Et l'on trouvera que la conſtruction ne donne que deux racines de l'Egalité propoſée, quoique les Courbes ſe coupent en ſix points, & qu'il y ait trois racines dans cette Egalité.

On verra encore mieux ce ſurcroît de racines étrangeres & les difficutez qu'elles produiſent dans la Méthode, ſi l'on prend pour le premier lieu d'une conſtruction celui que l'on voit ici en *K*.

$$K \ldots y^3x^7 + 6aab^4x^4 + a^3x^7 + a\,b^4 = 4aayx^7 + b^4x^6 + 9a^4b^4xx = 0.$$

Alors les Courbes ſe rencontreront toûjours en dix-huit points pour les ſeules racines étrangeres, quand même l'Egalité à conſtruire ne renfermeroit que des racines imaginaires. Ce qui augmente conſiderablement lorſque cette Egalité renferme des racines réelles differentes des racines étrangeres. Par exemple, dans l'hypotheſe que l'Egalité à conſtruire renferme douze racines réelles ſeulement, toutes differentes entr'elles & differentes auſſi des racines étrangeres; les Courbes ſe rencontreroient du moins en trente points, & tout au plus en cinquante-quatre points, ſelon la grandeur de ces douze racines ou le rapport qu'elles auroient aux racines étrangeres.

REMARQUE IV. Il y a un grand nombre de lieux qui fourniſſent des racines étrangeres de l'eſpece indiquée par les précedens exemples, quand on ſe ſert de la Méthode en queſtion. Car s'il arrive que le premier terme de l'inconnuë principale ſoit affecté de l'autre inconnuë dans le premier lieu, & que parmi les termes moïens de cette inconnuë principale, il y ait un monome dans lequel l'autre inconnuë ne ſe trouve pas. Alors, cette Méthode introduit toûjours des racines étrangeres dans les Réduites de quelque nature que ſoit l'Egalité à conſtruire. Ces racines ſe trouvent encore toûjours une ou pluſieurs fois

dans la conſtruction lorſqu'elles ne ſont pas imaginaires & que leurs abſciſſes ſont auſſi ou réelles ou 0. Ce qui arrive ſouvent auſſi, lorſqu'il n'y a point de ces monomes.

Il peut encore s'introduire des racines étrangeres dans l'uſage de cette Méthode, quoique le premier terme de l'inconnuë principale ne renferme pas l'autre inconnuë. On en verra un exemple dans la Remarque ſuivante.

REMARQUE V. Il y a des racines étrangeres qui ſont égales aux véritables racines ; & il y a des cas auſſi où les unes & les autres ſeroient inacceſſibles, quoique compriſes dans la conſtruction ; parce que ces racines ſeroient placées à une diſtance infinie de l'origine. En voici un Exemple.

Si l'on ſe propoſe de conſtruire l'Egalité $xx - 3ax + 2aa = 0$ en prenant $xx = xy - 2ay$ pour le premier lieu, la Méthode donnera le ſecond lieu $yx + 2aa = 2ay + 3ax$, & ces deux hyperboles ſe couperont à portée pour la racine $+ a$. Mais pour l'autre racine $2a$, ces Courbes ne ſe rencontreroient que dans un point inacceſſible; c'eſt celui où elles toucheroient une aſymptote qui eſt commun à l'une & à l'autre. Ainſi cette racine ſeroit placée dans la conſtruction à une diſtance infinie de l'origine, & il en ſeroit de même de la racine étrangere qui s'eſt introduite : parce qu'elle eſt égale à la véritable racine $2a$.

REMARQUE VI. La Combinaiſon du premier & du ſecond lieu ni celle des autres lieux qui en réſultent, ne ſerviroient pas à remedier aux inconveniens que j'ai marqués dans ce premier article ni aux inconveniens expliqués dans le premier Memoire. Ce ne ſeroit pas auſſi un moïen general pour éviter ceux qui viennent des racines étrangeres, de prendre un premier lieu où l'inconnuë principale auroit des valeurs poſitives & négatives de toutes les grandeurs. Cette condition ſe trouve dans l'exemple de la 5e Remarque, & l'inconvenient ne laiſſe pas d'y être. Et quoique la même condition ſe puiſſe trouver dans la moitié des premiers lieux que renferme la détermination générale de la 4e Remarque, cela n'empêche pas que la Mé-

thode ne jette dans l'inconvénient des racines étrangeres indiqué dans cette Remarque.

ARTICLE II. On est dans ces préjugez, que les Courbes se touchent toûjours dans les constructions, quand elles donnent des racines égales, & qu'elles ne se coupent jamais au point où elles ont une même tangente. Il est rare aussi en un sens, qu'elles se coupent lorsqu'elles donnent ces racines; mais il ne laisse pas d'y en avoir quantité d'Exemples. En voici un qui en fournit une infinité d'autres dans chaque genre, où l'on verra que les Courbes se coupent au point qui donne les racines égales, & que ces Courbes ont une même tangente dans ce même point.

Exemple. Si l'on se propose l'Egalité L dont toutes les racines sont égales.

$$L \ldots x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0.$$

Et que pour la construire on ait le premier lieu $xx = ay$, la Méthode donnera le second lieu M.

$$M \ldots xy - 3ay + 3ax - aa = 0.$$

Construisant l'un & l'autre lieu sur un même axe OF & une même origine O, la construction sera representée comme dans la 3e Figure. De maniere que les Courbes se coupent en un point C, & que l'appliquée FC exprime chacune des racines de la proposée L.

Mais à cause que ces racines sont égales, on seroit porté à croire que les Courbes ne se coupent pas au point C, & l'on est fortifié dans ce sentiment, quand on prend les tangentes de l'une & de l'autre Courbe au même point C. Car ces deux tangentes se trouvent égales, & comme ces Courbes n'ont qu'un même axe & une même origine; que leur appliquée & leur abscisse est aussi la même en ce point; il est évident que ces deux tangentes se confondent, & ne font qu'une même tangente. Ce qui est la marque la plus ordinaire des Courbes qui se touchent. Et c'est aussi ce qui m'a obligé de prendre ici une autre voïe pour prouver que le point C donne les racines égales de l'Egalité L, & que la parabole OCH coupe l'hyperbole BCG au même point.

1°. Je

1°. Je dis que la construction donne toutes les racines égales de l'Egalité L, & que toutes ces racines n'ont qu'une seule abscisse.

Car la résolution analytique de cette Egalité donne $x=a$ pour chacune de ces racines égales, & nous assure qu'elle n'a point d'autres racines.

De plus, substituant a dans les lieux à la place de x, les deux substitutions donnent $y=a$, pour une abscisse de la racine $x=a$, & ne donnent point d'autre valeur de y.

Donc, la construction &c. Ce qu'il falloit &c.

2°. Les Courbes ne se rencontreront qu'en un point dans la construction.

Car, en faisant évanoüir y, la Réduite des lieux se trouve la même que l'Egalité à construire: ainsi, il ne s'est introduit aucune racine étrangére dans la construction.

On vient de voir aussi par (1°.) que toutes les racines de cette Egalité n'ont qu'une seule abscisse. Donc les Courbes ne se rencontrent qu'en un point dans la construction.

3°. Il y a deux points sur l'axe OF; l'un au dessus de F où la parabole est plus proche de cet axe que l'hyperbole, & l'autre au dessous de F, où l'hyperbole est plus proche du même axe que la parabole. Ce qui peut se prouver en cette maniere.

A'iant pris $y=0$ pour un abscisse de la parabole au point O qui est au dessus de F, on aura $x=0$ pour son appliquée. Ainsi, le point O est à cette parabole. Mais prenant $y=0$ pour un abscisse de l'hyperbole, on trouve $y=\frac{1}{3}a$ pour l'appliquée OA de cette Courbe, & $\frac{1}{3}a$ est plus grand que 0. Donc au point O qui est au dessus de F, l'hyperbole s'éloigne de l'axe OF plus que le parabole.

Prenant aussi $y=2a$ sur le même axe pour un point R au dessous de F & pour l'abscisse de l'une & de l'autre Courbe, on aura $x=\sqrt[2]{2aa}$ pour l'appliquée RH de la parabole, & $x=\frac{7}{5}a$ pour l'appliquée RG de l'hyperbole.

Mais $\frac{7}{5}a$ eſt plus petite que $\sqrt[2]{2aa}$. Donc RG eſt plus petite que RH. Donc, il y a un point R ſur l'axe OF au deſſous de F où l'hyperbole eſt plus proche de cet axe que la parabole.

Donc, il y a deux points ſur l'axe OF &c.

4°. Entre les deux appliquées OA, RH, les deux Courbes demeurent toûjours concaves vers l'axe OF. Il ne ſe trouve entre ces deux appliquées ni inflexion, ni recourbement, ni rebrouſſement, ni aſymptote, ni limite, ni rien qui rompe cette concavité vers cet axe. Ce que je ſuppoſe évident dans cet exemple; parce que ces Courbes ont été fort examinées & ſont auſſi fort connuës.

Ainſi, la Conſtruction dans l'exemple propoſé, donne toutes les racines égales de l'Egalité L au point C par (1° & 2°).

Les Courbes ſe coupent au même point C par (3° & 4°), puiſque la Courbe la plus proche de l'axe au deſſus de C eſt celle qui s'en éloigne davantage au deſſous de ce point, & que dans l'intervalle ces deux Courbes demeurent toûjours concaves vers l'axe OF.

Donc le point C donne les racines égales de l'Egalité L que l'on s'étoit propoſé de conſtruire, & la parabole OCH coupe l'hyperbole BCG au même point C. Ce qu'il falloit prouver.

REMARQUE I. On peut ſçavoir par cette voïe, ſi deux Courbes géometriques quelconques ſe touchent ou ſe coupent aux points où elles ſe rencontrent. Mais dans le deſſein qu'on auroit de former ſur cela une Méthode generale, ce ſeroit peu de réduire ces Courbes à un même axe & à une même origine, il faudroit encore avoir les limites propres aux appliquées qui donnent les points de rencontre avec la détermination des points notables qui ſe trouveroient entre ces limites, parmi leſquels je comprens ceux qui terminent des aſymptotes, lorſque ces aſymptotes eux-mêmes ne ſont pas du nombre des limites.

REMARQUE II. Sur l'idée de ce premier exemple L, M, On peut trouver en differentes manieres autant de for-

mules qu'on voudra qui fourniront une infinité de lieux de tous les genres dont les Courbes couperont à Tangentes égales une Courbe géometrique donnée dans un de ses points pris à volonté; pourvû que ce point ne soit pas de ceux qui seront exceptez ci-après.

Pour donner un avant-goût de ces Formules j'en proposerai seulement deux ou trois du premier genre, dans lesquelles je prends pour la Courbe donnée, la parabole *N*.

$N \ldots xx = cy.$

En multipliant l'Egalité *L*, par $x - h$ & prenant *N* pour le premier lieu de l'Egalité résultante, on aura pour second lieu la formule qu'on voit en *O*.

$$O \ldots ccyy - hcxy + 3ahcy - 3aahx + ha^3 = 0.$$
$$- 3acxy + 3aacy - a^3x.$$

Prenant pour *h* une ligne connuë à volonté, & construisant les lieux *N*, *O* sur un même axe & une même origine, ils se rencontreront en deux points, excepté le cas où ces points se confondent. Un de ces points donnera $x = a$ pour les racines égales de l'Egalité *L*, & l'autre $x = h$ pour la racine introduite. De maniere que si l'on prend arbitrairement un point sur la parabole *N* hors son sommet, & *a* pour son appliquée, les Courbes se rencontreront dans ce même point. Sur quoi il faut observer.

1°. Si $h = -a$ le lieu *O* ne donnera que deux lignes droites, dont l'une touchera la parabole & l'autre la coupera au point donné ou choisi.

2°. Si $h = a$, l'hyperbole que donnera *O*, touchera la parabole *N* au point choisi.

3°. Si $h = -3a$ le lieu *O* fournira une parabole qui coupera à Tangentes égales la parabole donnée au point donné.

4°. Et lorsque le point donné ou choisi sera celui du sommet de la parabole *N*, le lieu *O* ne fournira que deux lignes droites, dont l'une se confondra avec un des axes generateurs.

5°. Mais en tout autre point de la parabole donnée,

les autres valeurs de h fourniront dans O une infinité d'hyperboles qui couperont cette parabole à Tangentes égales au point donné ou choisi.

Si $h = -\frac{1}{3}a$, l'hyperbole DCH, coupera la parabole donnée $DOLV$ (*fig.* 4.) au point donné C.

Si $h = 2a$, l'hyperbole $TCSV$, coupera aussi la parabole en C.

Et $h = \theta$ donnera une autre hyperbole OCK qui coupera encore la parabole donné au point C.

Ainsi de suite à l'infini. Ensorte que cette infinité de Courbes se couperont en C & n'auront qu'une même Tangente dans ce point C.

Les bornes de ce Memoire & le choix des propositions qu'il doit renfermer ne permettent pas de mettre ici les preuves des intersections. En attendant on peut s'en assurer dans chaque Exemple par la voïe dont je me suis servi sur l'Exemple LM. Pour l'identité des Tangentes il ne faut aucun détail. Car, laissant h indéterminé dans O, on trouvera d'abord que la soûtangente sur l'axe des y est $\frac{2aa}{c}$, de même que dans N. Ce qui peut servir pour abréger la démonstration générale des Intersections qui se font en C. Voici d'autres Formules.

REMARQUE III. Dans la Remarque précedente on peut faire varier le second lieu autant qu'on voudra par la voïe des substitutions. A la place de $x - h$, on peut aussi prendre un multiplicateur de L, où x ait autant de termes qu'on voudra & dont tous les coëfficiens soient exprimez par des indéterminées chacun par une voïe differente des autres. Ce qui fournit plusieurs voïes différentes & très-generales pour trouver des Formules dans chaque genre dont les Courbes couperoient à Tangentes égales une Courbe donnée dans un point donné. A quoi on peut encore ajoûter la combinaison des lieux, comme une voïe des plus expeditives pour la varieté des Formules, comme on le dira dans un autre Memoire. J'en donnerai seulement deux ici qui se tirent aisément

de la 2e Remarque par la voïe des ſubſtitutions, ou par les combinaiſons.

La premiere eſt celle qu'on voit ici en *P*.

$$P \ldots nnxx - ccyy + 6aacy - nncy - 8a^3x + 3a^4 = 0.$$

Si $n = 2a$. La Formule *P* ne donne que deux lignes droites, dont l'une touche la Parabole donnée au poînt donné, & l'autre la coupe au même point.

Si le point donné eſt au ſommet de la parabole. Alors les hyperboles que fournit *P* la touchent dans ce même point.

En tout autre point de cette parabole, la Formule *P* fournit une infinité d'hyperboles differentes entr'elles & differentes encore de celles que donne *O*, ſelon les differentes valeurs que l'on prend pour *n*.

Si $n = 3a$ la Formule *P* donne une hyperbole *GDFM* (*fig.* 5.) qui coupe la parabole donnée *GON*, au point choiſi ou donné *F*.

Et lorſque $n = a$ la Formule *P* fournit une autre hyperbole *PFIG* qui coupe auſſi la paroboleau point *F*.

Les autres valeurs de *n* donneront dans *P* une infinité d'autres hyperboles qui couperont la parabole donnée en *F*; enſorte que *EF* ſera toûjours la valeur de chaque racine égale, & que cette infinité de Courbes n'aura qu'une même Tangente dans ce point *F*.

La ſeconde formule eſt celle qu'on voit ici en *Q*.

$$Q \ldots rrxx + ccyy - 6aacy - rrcy + 8a^3x - 3a^4 = 0.$$

Lorſque $r = c$, ce lieu fournit un cercle dont le raïon varie ſelon les differens points de la parabole donnée.

Mais ſi l'on prend arbitrairement pour *r* une valeur differente de *c*, la même Formule donnera une Ellipſe. Ainſi, pour chaque point de la parabole donnée, la Formule *Q* fournira un Cercle & une infinité d'Ellipſes qui la couperont à Tangentes égales dans tous ces points; excepté au ſommet, où ce Cercle & ces Ellipſes toucheront cette Parabole. Comme les interſections ſe feront dans le ſens de *PFIG* (*fig.* 5.) il paroît inutile de donner ſur cela une autre figure.

REMARQUE IV. Je donnerai en d'autres Memoires d'amples éclairciſſemens ſur les propoſitions ſuivantes.

1°. On peut trouver des Formules autant qu'on voudra dont les Courbes couperont une autre Courbe à Tangentes égales en autant de points qu'on voudra dans une même conſtruction. Pour cela, on a deux voïes dont on peut ſe ſervir, ou enſemble ou ſeparément.

La premiere conſiſte dans la multiplicité des abſciſſes de chaque racine égale. Par exemple, ſi l'Egalité à conſtruire eſt celle qu'on voit en L.

$$L \ldots x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0.$$

Et que l'on ait pour premier lieu le Cercle R.

$$R \ldots xx = 5aa - yy.$$

Ce Cercle coupera en deux points à Tangentes égales la Courbe que donne le ſecond lieu.

Les differens ordres de racines égales que renferme l'Egalité à conſtruire, ſont auſſi une voïe pour cette recherche. Ainſi, multipliant L par $x^3 - 6axx + 12aax - 8a^3 = 0$, on aura S.

$$S. x^6 - 9ax^5 + 33aax^4 - 63a^3x^3 + 66a^4xx - 36a^5x + 8a^6 = 0.$$

Et conſtruiſant cette Egalité en prenant $xx = ay$ pour le premier lieu, cette parabole ſera coupée en deux points à Tangentes égales par la Courbe du ſecond lieu. Cette ſeconde voïe convient aux Courbes données bien mieux que la premiere voïe.

Si l'on conſtruit S en prenant R pour le premier lieu, les deux voïes ſe trouveront de concert. Auſſi l'on verra que les Courbes ſe couperont en 4 points à Tangentes égales.

2°. Il y a quantité d'exemples où les Courbes ſe coupent à Tangentes inégales au point où elles donnent des racines égales, & même des exemples où cela ſe trouve pluſieurs fois dans une même conſtruction.

Si l'Egalité à conſtruire eſt T.

$$T \ldots x^{12} + 2a^5x^7 - 4a^6x^6 + a^{10}xx - 4a^{11}x + 4a^{12} = 0.$$

Et que l'on ait pour le premier lieu $x^3 = aay$. Alors le ſecond lieu ſera V.

$V \ldots y^4 + 2ayyx - 4aayy + aaxx - 4a^3x + 4a^4 = 0.$

Les Courbes se couperont en deux points. Un de ces points donnera les deux racines égales de T qui sont commensurables; l'autre point, les deux racinesé gales incommensurables, & l'on verra que dans chacun de ces points, les Tangentes des deux Courbes sont fort differentes. Si l'on veut sur cela un exemple dans lequel il n'y ait qu'une couple de racines égales, on n'a qu'à prendre $x^3 = aay$ pour construire $x^5 - ax^4 + a^3xx - 3a^4x + 2a^5 = 0$. On verra que les Courbes se coupent pour les racines égales & que les Tangentes ne sont pas les mêmes au point d'interſection qui donne ces racines.

3°. En d'autres cas, les Courbes se coupent à Tangentes égales, quoique l'Egalité proposée ne renferme point de racines égales, comme on le verra si l'on prend $yxx + 1 = x$ pour construire $x^4 - 2x + 1 = 0$. Alors les Courbes se couperont à Tengentes égales pour $x = 1$ qui est une des racines inégales de l'Egalité proposée. Il se trouve encore dans cet exemple qu'un autre rameau du second lieu coupe la Courbe du premier lieu au point de $x = 1$, pour les racines égales de la réduite, & néanmoins la Tangente de ce rameau n'est pas la même dans ce point que la Tangente de cette Courbe.

Il y a aussi des cas où les Courbes se touchent, & d'autres cas où elles se coupent à Tangentes égales, quoique toutes les racines de la proposée soient imaginaires.

4°. Il peut même arriver que la plûpart de ces inconveniens soient joints à d'autres inconveniens qui sont beaucoup plus considerables pour la méthode en question. Si pour construire $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, on a pour premier lieu $x^3 = 6xx - 12x + yy + 8$, le second lieu sera $x = 2 + yy$. Et l'on trouvera que les Courbes se touchent d'une maniere peu commune pour la racine $x = 2$: Qu'elles se coupent en deux endroits pour la racine $x = 3$, & qu'elles ne se rencontrent pas pour la racine $x = 1$.

ARTICLE III. Dans l'usage de la Méthode en question, le premier lieu est ou donné ou pris à volonté. Lorsqu'on

peut le prendre à volonté, on peut auſſi éviter les inconveniens qui regardent le fond de cette Méthode, ou en tirer avantage pour s'aſſurer en pluſieurs cas des conſtructions impoſſibles. Ce qui m'oblige de marquer ici entre tous ces inconveniens, ceux qui regardent particulierement le choix du premier lieu & l'uſage du ſecond lieu.

Car les premiers lieux les mieux choiſis donnent aſſez ſouvent de ſeconds lieux imaginaires, ou des lieux réels qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite; ou des lieux diviſibles qui dans l'uſage ordinaire, donneroient l'excluſion à des racines réelles de l'Egalité à conſtruire; & l'experience à fait voir qu'il eſt néceſſaire d'expliquer ces inconveniens avant que d'y remedier. Voici des Exemples avec des Remarques qui ſerviront à ce deſſein.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple l'Egalité à conſtruire renferme pluſieurs racines réelles: Elle eſt la même que la réduite des lieux, comme on le déſire dans la Méthode. Le premier lieu eſt auſſi réel; il fournit une Courbe dont les quatre rameaux s'étendent à l'infini & donnent une infinité d'appliquées poſitives avec une infinité d'appliquées négatives. Cependant le ſecond lieu que fournit la Méthode eſt un lieu abſolument imaginaire.

L'Egalité à conſtruire eſt l'Egalité *A*.

$A \ldots x^8 + n^6xx \pm n^7x - n^8 = 0.$

Le premier lieu eſt celui que l'on voit en *B*.

$B \ldots x^4 = nnyy + 2n^4.$

Et la Méthode donne le ſecond lieu *C*.

$C \ldots nnxx \pm n^3x + y^4 + 4nnyy + 3n^4 = 0.$

En voulant conſtruire ces lieux, on verra que *B* fournit une hyperboloïde du ſecond genre. Mais quand on viendra au ſecond lieu *C* que la Méthode a donné, on trouvera qu'en prenant à volonté une valeur réelle pour une des inconnuës laquelle on voudra; l'autre inconnuë n'a que des valeurs imaginaires, & ſi l'on obſerve comment

ment cela arrive, on s'appercevra qu'en vain l'on chercheroit une Solution réelle de ce lieu *C*. On le verra peut-être mieux si l'on dégage x par la régle ordinaire du second degré. Alors la valeur de cette inconnuë sera exprimée, comme on le voit en *D*.

$$D \ldots x = \pm \frac{1}{2} n \pm \sqrt[2]{-\frac{11}{4} nn - 4yy - \frac{y^4}{nn}}.$$

Où l'on peut voir qu'en prenant pour y une valeur réelle comme on voudra, ou positive, ou negative, ou même le 0, la somme des monomes que renferme le signe radical sera toûjours negative; & par conséquent ses racines toûjours imaginaires. On voit que les autres parties de la valeur de x n'ont rien qui puisse détruire ces racines, & qu'elles ne peuvent être séparées par la division. Ce qui me paroît suffire pour s'assurer que toutes les valeurs de x dans *D* sont des valeurs imaginaires lorsque y est réel; & pour s'assurer aussi que le lieu *C*, que la Méthode a donné, est un lieu absolument imaginaire.

On pourroit encore voir que ce lieu *C* n'a aucune solution réelle, en y appliquant la premiere des deux Méthodes que je donnai au public en 1699. pour la résolution generale des Questions indéterminées, & je serois obligé de me servir de cette Méthode si j'avois entrepris de faire connoître toute l'étenduë des principaux inconveniens de la Méthode dont il s'agit. Mais je me propose seulement de marquer la réalité de ces inconveniens, en quoi il m'a paru que l'Algebre la plus ordinaire pouvoit suffire, lorsqu'une des inconnuës ne passe point le second degré. Il y a quantité de lieux où les Inconnuës sont d'un degré plus élevé, qui peuvent être examinées à fond par la voïe des Cascades algébriques. Mais ce ne sont aussi que des cas particuliers, & il y a infiniment plus d'Exemples où il faut nécessairement une Méthode aussi generale que la Méthode des Indéterminées de l'année 1699. pour sçavoir si les lieux sont réels ou imaginaires & en distinguer les especes.

SECOND EXEMPLE.

La Propoſée eſt l'Egalité *E*.

$$E \ldots x^5 + a^3xx - 2a^3cx + a^3cc + a^3dd = 0.$$

On a $x^3 = ayy$ pour le premier lieu, & la Méthode donne le ſecond lieu *F*.

$$F \ldots xxyy + aaxx - 2aacx + aacc + aadd = 0.$$

En dégageant x ou y, on pourra voir que ce ſecond lieu eſt tout à-fait imaginaire, ſuivant ce qui a été dit dans le premier Exemple. On ne peut douter neanmoins que le premier lieu n'exprime une Courbe, ni que l'Egalité à conſtruire ne renferme du moins une racine réelle, quelque valeur que l'on veüille prendre pour *a. c. d.* puiſqu'elle eſt d'un degré impair. Il faut neanmoins excepter $d =$ [illegible], qui jette dans un autre écueil.

On peut remedier aux inconveniens que déſignent ces deux Exemples, en tranformant ou le premier lieu, ou l'Egalité propoſée. Ce qui ne ſeroit pas aiſé ſi l'on vouloit regler géneralement ces transformations.

Voici d'autres Exemples où les premiers lieux ſont d'un uſage ordinaire dans la Méthode en queſtion, & néanmoins cette Méthode ne laiſſe pas de donner de ſeconds lieux imaginaires & de ſeconds lieux qui n'expriment ni Droite ni Courbe. Mais l'on n'aura pas beſoin de transformations pour remedier aux inconveniens indiquez par ces Exemples.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple, on ſe propoſe de trouver un ſecond lieu qui exprime un Cercle. On prend pour premier lieu le plus commode de tous les lieux qui peuvent ſervir à ce deſſein, & l'Egalité à conſtruire eſt auſſi du degré le plus avantageux pour cette recherche. Cependant le ſecond lieu que la Méthode fournit ſe trouve imaginaire, quoique revêtu des apparences d'un lieu au Cercle.

L'Egalité à conſtruire eſt l'Egalité *G*.

$G \ldots x^4 + aaax - a^3x + a^4 = 0.$

Le premier lieu eſt la parabole ordinaire *H.*

$H \ldots xx - ay = 0.$ ou $xx = ay.$

1°. Ne ſubſtituant la valeur de xx priſe de *H*, que dans le premier terme de la propoſée *G*, il en réſulte le ſecond lieu *I.*

$I \ldots yy + xx - ax + aa = 0.$

qui eſt figuré comme un lieu au Cercle. Mais comme ce lieu eſt fort ſimple, il eſt fort facile auſſi de s'aſſurer que toutes les Solutions dont il eſt capable ſont imaginaires, & que le Cercle qu'il promet n'a rien de réel. Ainſi, il ſeroit inutile d'en apporter les raiſons, après ce qui a été dit dans l'explication du premier Exemple.

2°. Si l'on ſubſtituë la valeur de xx dans les deux premiers termes de *G*, on aura le ſecond lieu *K.*

$K \ldots yy + ay - ax + aa = 0.$

Et combinant *affirmativement* ce lieu *K* avec le lieu *H*, il en réſultera le lieu imaginaire *I.* En ſorte que ſi l'on inſiſte à vouloir que le ſecond lieu ſoit un Cercle ; les moïens, ou vagues ou précis, que la Méthode fournit, ne donneront qu'un Cercle imaginaire. Encore un Exemple de cette eſpece.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple la Méthode ne permet pas de faire varier les ſubſtitutions dans la recherche du ſecond lieu. Celui qu'elle fournit fait eſperer un Cercle ou une Ellipſe. Mais ce Cercle & cette Ellipſe ſe trouvent imaginaires.

La propoſée eſt l'Egalité *L.*

$L \ldots x^6 + ba^3xx - 2a^4bx + ba^5 = 0.$

Le premier lieu eſt $x^3 = aay$. Ainſi la ſubſtitution de aay à la place de x^3 ne ſe peut faire que dans le premier terme de *L*. Ce qui donne le ſecond lieu *M.*

$M \ldots ayy + bxx - 2abx + baa = 0.$

qui a les apparences d'un lieu à l'Ellipſe lorſque a eſt different de b, & celles d'un lieu au Cercle lorſque a eſt

égal à b. Mais en l'examinant selon ce qui a été dit dans le premier Exemple on verra aisément qu'il n'a aucune solution réelle ; non-seulement quand on prend pour a & pour b deux quantitez positives à volonté, mais aussi lorsque l'une & l'autre est négative ; de maniere que ce second lieu M n'exprime ni Courbe ni ligne droite dans ces deux hypothêses. Cependant le premier lieux est des mieux choisis & d'un frequent usage.

Si l'on prend encore $x^3 = aay$ pour construire l'Egalité N.

$$N \ldots x^{12} - 14a^3x^9 + a^4x^8 + 2a^5x^7 + 49a^6x^6 - 86a^8x^4 + a^{10}xx + 1296a^{12} = 0.$$

Le second lieu n'aura que trois solutions réelles ; ainsi, il n'exprimera ni Courbe ni ligne droite. Comme cette difficulté tient à celle des lieux imaginaires, il faut l'expliquer ici, & prendre pour cela un Exemple plus simple que N.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Le second lieu que fournit la Méthode dans cet Exemple est un lieu réel, mais d'une réalité qui n'exprime aucune Courbe ni même aucune ligne droite. Cependant le premier lieu est des mieux choisis, & l'Egalité à construire renferme des racines réelles.

L'Egalité proposée est celle qu'on voit en O,

$$O \ldots x^6 - 4aax^4 - 8a^3x^3 + 8a^4xx + 32a^6 = 0.$$

Pour la construire on a le lieu P.

$$P \ldots x^3 = bby.$$

Et la Méthode donne le second lieu marqué Q.

$$Q \ldots b^4yy - 4aabbxy - 8a^3bby + 8a^4xx + 32a^6 = 0.$$

Ce lieu est réel, parce que $x = 2a$, & $y = \frac{8a^3}{bb}$ en sont une solution, dont il est facile de s'assurer en y substituant ces valeurs. Mais il faut encore s'assurer qu'il n'en a point d'autres. Ce que l'on peut faire, comme on le va dire ici

Dégageant x par la régle ordinaire du second degré, on aura sa valeur sous la forme que l'on voit en R.

$$R \ldots x = \frac{hhy + \overline{8a^3 - hhb}^{\,2}\sqrt{-1}}{4aa}$$

Où il eſt évident 1°. Que le ſigne radical ne renferme aucune racine réelle, & que ſi ce ſigne ſubſiſtoit toûjours dans l'Egalité R, la valeur de x ſeroit toûjours imaginaire. 2°. Que le ſigne radical ne peut ſe détruire qu'en détruiſant ſon multiplicateur. 3°. Que ce multiplicateur eſt détruit en faiſant $8a^3 - hhy = 0$. Mais alors, on a $y = \frac{8a^3}{hb}$, & comme cette valeur eſt la ſeule qui ſe peut tirer de cette Egalité $8a^3 - hhy = 0$, c'eſt auſſi la ſeule qui peut en détruire tous les termes, & par conſéquent la ſeule encore qui peut détruire le ſigne radical de R. On a donc $y = \frac{8a^3}{hb}$ pour l'unique valeur de y qui convient à l'Egalité R, & il eſt évident que cette valeur étant ſubſtitué dans cette Egalité donne $x = 2a$. D'où il ſuit que l'Egalité R & par conſéquent l'Egalité Q, ont pour ſolution $x = 2a$, $y = \frac{8a^3}{hb}$, & qu'elles n'en ont point d'autre. En quoi l'on peut obſerver que l'infinie varieté des valeurs dont h eſt capable, n'empêche pas que l'inconvenient ne ſubſiſte.

REMARQUE. Si du dernier terme de l'Egalité O on ôte une quantité poſitive auſſi petite qu'on voudra, le ſecond lieu exprimera une Courbe ; & ſi au contraire on ajoûte à ce dernier terme une quantité poſitive telle qu'on voudra, le ſecond lieu ſera toûjours imaginaire, en prenant P pour le premier lieu,

On auroit un exemple plus ſimple dont la propoſée eſt réelle, ſi l'on prenoit $x^3 = yy$ pour conſtruire l'Egalité $x^5 + xx - 2x + 1 = 0$. Alors le ſecond lieu n'auroit qu'une ſolution dans laquelle $x = 1$. Mais on pourroit dire que le premier lieu n'eſt pas choiſi.

SIXIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple ſe réüniſſent les deux conditions que l'on a deſirées dans le premier & le 2d lieu. Cependant la Mé-

thode conduit aux inconveniens indiquez par les précedens Exemples.

On a pour l'Egalité à conſtruire, celle qui eſt en *S*.

$$S \ldots x^{16} - 6a^8x^8 + a^{14}xx - 2a^{15}x + r = 0.$$

dans laquelle *r* exprime une quantité ou égale à $10a^{16}$ ou plus grande que $10a^{16}$, à volonté.

Le premier lieu eſt celui qui eſt en *T*.

$$T \ldots x^4 = a^3y.$$

Et la Méthode fournit le ſecond lieu *V*.

$$V \ldots aaxx - 2a^3x + y^4 - 6aayy + r = 0.$$

Lorſque $r = 10a^{16}$ dans la propoſée *S*, le ſecond lieu *V* ſe trouve réel, mais il n'exprime ni Courbe ni ligne droite; parce qu'il n'a que deux ſolutions réelles. Et ſi l'on prend *r* pour une quantité plus grande que $10a^{16}$, comme $11a^{16}$, $20a^{16}$, &c. le ſecond lieu ſera toûjours imaginaire comme on le peut voir, en dégageant l'inconnuë *x*, & en rappellant les explications que j'ai données ſur le premier Exemple & l'Exemple 5.

Lorſque les Egalitez ſont du 16e degré & que le premier lieu n'eſt point donné, non-ſeulement on a ſouhaité que ce premier lieu fût celui qui eſt en *T*, mais auſſi que les inconnuës n'euſſent pas plus de quatre dimenſions dans le ſecond lieu. Ce ſont là toutes les conditions que l'on a deſirées dans les lieux pour la conſtruction de ces Egalitez, & l'on voit dans ce 6e Exemple que ces conditions n'empêchent par de tomber dans deux inconveniens conſiderables. Voici encore un Exemple ſur cela, avec d'autres Remarques.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

La Propoſée eſt l'Egalité *Z*.

$$Z \ldots x^{16} - 6a^4x^{12} + a^6x^{10} + 2a^7x^9 + 9a^8x^8 - 8a^{11}x^5 + a^{14}xx + a^{16} = 0.$$

Le premier lieu eſt *T* du 6e Exemple.

Et la Méthode donne ce ſecond lieu Π.

$$\Pi \ldots y^4 - 6ay^3 + xxyy + 2axyy + 9aayy - 8aaxy + aaxx + a^4 = 0.$$

qui a les conditions que l'on y a desirées. Mais en degageant x, on verra qu'il n'exprime ni Courbe ni ligne droite. Car le dégagement donne Δ.

$$\Delta \ldots x = \frac{4aay - ayy + \overline{y^3 - 3ayy + a^3}\sqrt[2]{-1}}{yy + aa}$$

Et suivant le détail du 5[e] Exemple, les solutions de cette Egalité seront celles du Problême que l'on voit en Ω.

$$\Omega \ldots \begin{cases} x = \dfrac{4aay - ayy}{yy + aa}. \\ y^3 - 3ayy + a^3 = 0. \end{cases}$$

dont les trois solutions sont réelles & incommensurables. Ainsi, l'Egalité Δ & par conséquent le lieu Π, auront ces trois solutions réelles & n'en auront point d'autres.

REMARQUE I. Si l'on remonte des conclusions aux prémisses & aux hypothêses, ce retour fournira deux Régles pour trouver des Exemples autant qu'on voudra, ou la Méthode donnera de seconds lieux imaginaires, ou bien de seconds lieux réels qui n'exprimeront ni Courbe ni Ligne droite, à volonté.

La premiere Régle donnera le second lieu; l'autre fournira le premier lieu & l'Egalité à construire.

Régle pour le second Lieu.

Aïant supposé la valeur de x comme on le voit ici en A.

$$A \ldots x = \frac{B + C\sqrt[2n]{D}}{E}.$$

1°. On prendra pour B & pour E des quantitez connuës à volonté, ou bien des quantitez dont y soit la seule inconnuë à laquelle on pourra donner autant de termes qu'on voudra & prendre pour leurs Coëfficiens des quantitez connuës telles qu'on voudra.

2°. On prendra pour n un nombre entier à volonté.

3°. Pour D, on prendra une quantité connuë & négative telle qu'on voudra. Ou bien la somme des termes d'une Egalité entierement imaginaire dont y soit la seule inconnuë, en observant de changer tous les signes de

cette ſomme avant que de la ſubſtituer à la place de *D*.

4°. Cela poſé, ſi l'on prend pour *C* une quantité connuë à volonté, l'inconnuë *x* n'aura que des valeurs imaginaires.

En prenant pour *C* la ſomme des termes d'une Egalité dont *y* ſoit la ſeule inconnuë & dont tous les Coëfficiens ſoient des quantitez connuës à volonté ; les valeurs de *x* ſeront tantôt réelles & tantôt imaginaires.

Toutes ces valeurs ſeront imaginaires, lorſque l'Egalité priſe pour *C* ſera entierement imaginaire.

Et ſi l'Egalité priſe pour *C* n'eſt pas imaginaire, l'Inconnuë *x* aura autant de valeurs réelles que cette Egalité renfermera de racines réelles.

Ainſi, l'Egalité *A* aura autant de ſolutions qu'il y aura de racines réelles dans l'Egalité que l'on prendra pour *C*, & comme il eſt libre de mettre dans cette derniere Egalité autant de racines qu'on voudra & telles qu'on voudra, on peut faire auſſi que l'Egalité *A* ait autant de ſolutions qu'on voudra, & même telles qu'on voudra ; parce que les valeurs de *B* & de *E* ſont arbitraires.

5°. Aïant ainſi donné ces valeurs à *B*. *C*. *D*. *E*. *n*. de maniére que *y* s'y trouve au moins une fois, on fera évanoüir le ſigne radical ; & l'Egalité qui en réſultera, ſera un lieu qui aura les mêmes ſolutions que l'Egalité *A* & qui n'en aura point d'autres.

A la place de x, *on pourroit mettre dans* A *une quantité algébrique où cette inconnuë & y auſſi, auroient autant de termes qu'on voudroit. Ce qui fourniroit une Régle beaucoup plus génerale que la précedente, & dans laquelle il y auroit peu d'exceptions. Une Régle bien plus génerale ſur cela ſans comparaiſon, ſeroit une Inverſe de la premiere Méthode que je donnai en* 1699. *pour la réſolution des queſtions indéterminées. Mais cette Inverſe ne pourroit pas être inſerée dans ce Memoire, & il ſuffit pour l'Inconvenient de la Méthode en queſtion que j'ai voulu marquer dans ce* 3e *article, de faire voir qu'elle fournit une infinité de ſeconds lieux qui n'expriment ni Droite ni Courbe & qu'elle donne chacun de ces lieux dans une infinité d'Exemples.*

Si

Si $B=2$. $E=1$. $n=1$. $D=-1$. $C=y-1$. La formule *A* donnera $x=2+\overline{y-1}\,\sqrt[2]{-1}$; & faiſant évanoüir le ſigne radical on aura le lieu *F*.

$$F \ldots xx+yy-4x-2y+5=0.$$

qui eſt réel & qui promet un Cercle, mais il n'exprime ni cercle ni aucune ligne. Car $x=2$, & $y=1$ en eſt l'unique ſolution. On va voir dans la ſeconde Régle qu'il y a une infinité d'Exemples où la Méthode donne *F* pour le ſecond lieu, quoique le premier lieu ſoit des mieux choiſis & que les ſubſtitutions qu'elle preſcrit dans la recherche de ce ſecond lieu, ſoient faites de la maniere la plus avantageuſe à cette Méthode.

Régle pour trouver le premier Lieu & l'Egalité à conſtruire, lorſque le ſecond Lieu eſt donné.

Un Lieu quelconque étant propoſé, on peut trouver autant d'Exemples qu'on voudra de la Méthode en queſtion; de maniere que le ſecond Lieu qu'elle fournira, dans tous ces Exemples, ſoit le même que le Lieu propoſé; & faire en même tems que le premier Lieu ſoit de ceux qui ſont les plus avantageux à cette Méthode. Voici la Régle.

1°. Aïant pris la Formule que l'on voit ici en *G* pour l'expreſſion des premiers Lieux,

$$G \ldots y=\frac{x^c \pm ba^{c-1}}{a^{c-1}}.$$

On fera, ou $b=0$, ou b réel à volonté; lorſque le Lieu propoſé aura des monomes entierement connus; & toûjours b réel, lorſque ce Lieu n'aura aucun de ces monomes.

Pour c on prendra à volonté, un nombre entier & poſitif qui ſurpaſſe le plus haut degré de x du Lieu propoſé, & ſi les coëfficiens de ce Lieu ne ſont que de nombres, on peut prendre pour a un nombre tel qu'on voudra. Enſorte que ſi le Lieu propoſé étoit, par exemple, le Lieu *F* de la Régle précedente, dans lequel le nom-

bre 2 désigne le plus haut degré de x; il faudroit prendre pour c un nombre plus grand que 2, & pour a un nombre à volonté. Si l'on se détermine à $c=3$. $a=1$ & $b=\theta$, la substitution de ces valeurs dans G, donnera le premier Lieu H.

$H \ldots y = x^3$.

2°. Faisant évanoüir l'inconnuë y qui est commune au lieu proposé (F) & au lieu trouvé (H) leur réduite sera l'Egalité à construire. Ainsi, dans cet Exemple, cette Egalité sera celle qu'on voit en I.

$I \ldots x^6 - 2x^3 + xx - 4x + 5 = \theta$.

En sorte que si l'on se propose de construire l'Egalité I en prenant pour le premier lieu celui qui est H, la Méthode donnera le second lieu F.

Et si l'on prend pour c un autre nombre entier à volonté au-dessus de 3, on aura un autre premier lieu & une autre Egalité à construire. Ainsi, l'on peut trouver autant d'Exemples qu'on voudra où la Méthode donnera le lieu F. C'est à dire, un lieu qui est figuré comme un lieu au Cercle & qui n'exprime ni Courbe ni Ligne droite.

Si le second lieu proposé étoit, par exemple, $xx = py - yy$, on prendroit pour b une ligne réelle : à cause que ce lieu n'a point de monome entierement connu.

Quoique la premiere Régle soit des plus commodes pour trouver des lieux imaginaires & des lieux réels qui n'expriment ni Droite ni Courbe, elle ne donne pas toûjours neanmoins les lieux les plus simples de ces deux especes quand on veut que l'inconnuë y se trouve en B. C. D. E. Et delà aussi l'Egalité à construire que fournit la seconde Régle, n'est pas aussi des plus simples. En voici un Exemple.

Aïant pris une Egalité imaginaire comme $yy - ry + rr = \theta$ pour la valeur de D, suivant la premiere Régle, on aura $D = -yy + ry - rr$.

Prenant aussi une Egalité imaginaire pour C comme $yy + bb = \theta$, quand on veut que le lieu qu'on cherche soit imaginaire, on aura $C = yy + bb$, ou bien $C = -yy - bb$.

Car l'une & l'autre expreſſion convient au deſſein.

Et ſi pour E & B dont les valeurs ſont entierement arbitraires, on prend $E = yy$ avec $B = eey$, il ſe trouvera en faiſant $n = 1$ que la Formule A donne le lieu imaginaire.

$$x = \frac{eey + yy + bb\sqrt[2]{-yy + ry - rr}}{yy}.$$

Délivrant ce lieu du ſigne radical, on l'aura ſous la forme K.

$$K \ldots y^6 - ry^5 + xxy^4 - 2eexy^3 + 2rrbbyy - rb^4y + rrb^4$$
$$+ 2bby^4 - 2rbby^3 + b^4yy$$
$$+ rry^4 \qquad + e^4yy$$

Si l'on veut des Exemples où la Méthode donne ce lieu imaginaire pour le ſecond lieu d'une conſtruction, de maniere que le premier lieu ſoit de ceux qui ſont les plus avantageux à cette Méthode, on prendra pour c de la Formule G, un nombre plus grand que 2. ſuivant la ſeconde Régle, & pour b, ou θ une ligne réelle à volonté, par la même Régle. Si $c = 2$, & $b = \theta$, on aura $y = \frac{x^3}{aa}$ pour le premier lieu : Et ſubſtituant cette valeur de y dans K comme le preſcrit cette Régle, il en réſultera l'Egalité à conſtruire que l'on voit ici en L.

$$L \ldots x^{18} - raax^{15} + a^4x^{14} + rra^4x^{12} + 2bba^4x^{12} - 2eea^6x^{10}$$
$$- 2rbba^6x^9 + 2rrbba^8x^6 + b^4a^8x^6 + e^4a^8x^6$$
$$- rb^4a^{10}x^3 + rrb^4a^{12} = \theta.$$

Ainſi, quand on ſe propoſera de conſtruire l'Egalité L par la Méthode en queſtion, cette Méthode donnera le ſecond lieu imaginaire K, lorſque le premier lieu ſera $x^3 = aay$. En cela, je ſuppoſe que dans la recherche du ſecond lieu, on pouſſe les ſubſtitutions juſques à ce que les inconnuës aïent le moins de dimenſions qu'il eſt poſſible, comme on le pratique dans la Méthode. Si on ne le faiſoit pas, la difficulté de la Méthode ſeroit differente & ne ſeroit pas moins conſiderable.

Il ſuit de la premiere Régle, qu'il y a une infinité de lieux imaginaires avec une infinité de lieux réels qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite, & l'on voit par la

ſeconde Régle qu'il y a auſſi une infinité d'Exemples où la Méthode donne chacun de ces lieux pour la conſtruction de l'Egalité propoſée ; c'eſt-à-dire, que la premiere Régle fournit une infinité d'Exemples , qui étant pris un à un , chacun donne par la ſeconde Régle une infinité d'autres Exemples où la Méthode fournit un ſecond lieu imaginaire , ou un lieu réel qui ne renferme ni Courbe ni Ligne droite. Ce qui marque une exception conſiderable de cette Méthode.

Cependant la premiere Régle ne donne pas à beaucoup près tous les lieux de ces deux ſortes. Par exemple , le lieu que l'on voit ici en *M*.

$$M\ldots\left\{\begin{array}{l} y^6 - 4aay^4 + 2a^3y^3 + 6a^4yy - 4ay^5 + a^6 \\ + 2x^6 - 12aax^4 + 4aayx^3 + 18a^4xx - 12a^5yx \end{array}\right\} = 0$$

eſt un lieu qui n'a que neuf ſolutions réelles , & que cette Régle ne le donne pas.

Il y a infiniment plus de ces lieux imparfaits qui ne peuvent ni ſe former ni s'expliquer par les Régles particulieres , que de ceux qui peuvent s'en déduire. La Formule *N* en donne encore une idée.

$$N\ldots x^{2m} - x^{2r+1} + y^{2h} - y^{2t+1} + 4 = 0.$$

Car ſi l'on prend $m = 3$. $r = 0$. $h = 3$. $t = 0$, on aura le lieu imaginaire *O*.

$$O\ldots x^6 - x + y^6 - y + 4 = 0.$$

Et prenant à volonté des nombres plus grands que 3 pour *m* & *h* , avec un nombre plus petit que *m* , pour *r* ; & un nombre plus petit que *h* , pour *t* ; tous les lieux qui en réſulteront ſe trouveront inexplicables par les Régles particulieres de l'Algebre. Mais l'on pourra en faire l'analyſe & s'aſſurer qu'ils n'ont aucune ſolution réelle en y appliquant la Méthode & la Theorie des Caſcades algébriques.

Il y a une infinité d'autres lieux de differens ordres où cette Méthode & cette Theorie ne ſuffiroient pas , & où il faudroit encore la Méthode des queſtions indéterminées que je donnai en 1699 avec une nouvelle Theorie , pour prouver que ces lieux ſont, ou imaginaires , ou de

ceux qui ſont réels & qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite.

Il paroît de ce détail, que l'Exception de la Méthode qui a pour meſure l'immenſe étenduë des Formules *A* & *G*, eſt engloutie dans une autre exception infiniment plus vaſte dont ces Formules & les Exemples *N*. *O* ne ſont que de foibles indices.

REMARQUE II. On verra d'autres inconveniens de la Méthode dans l'uſage qu'elle fait des lieux les mieux choiſis, ſi l'on prend les paraboles $xx = ay$, $x^3 = bby$. $x^4 = acny$. pour conſtruire les Egalitez marquées *G*, *H*, *I*, dans mon premier Memoire page 343.; ſelon ce que j'en ai dit dans la page 346. On y verra qu'en ne diviſant point l'Egalité à conſtruire, une partie de ſes racines ne ſe trouveroient pas dans l'effection géometrique ſi l'on conſtruiſoit les lieux comme on le fait ordinairement, & que leur Réduite ſeroit eſſentiellement differente de la Propoſée, ſi l'on ſuivoit les Régles ordinaires de l'évanoüiſſement des Inconnuës. Il eſt facile de remedier à cet inconvenient quand il eſt ſeul; mais il n'eſt pas aiſé de remedier à la plûpart des autres inconveniens de la Méthode que nous avons marquez ici & dans le premier Memoire. Cependant il ne ſeroit pas bien difficile de reformer la Méthode dans le cas où le premier lieu eſt arbitraire, & même l'on pourroit éviter en cela les inconveniens du 3e Article. Car une des inconnuës aura toûjours des valeurs de toutes les grandeurs dans un lieu, lorſque le plus haut degré de l'autre inconnuë y ſera exprimé par un nombre impair, & une Egalité n'a jamais de racines égales quand elle n'a point de Diviſeurs. De plus, le premier lieu étant pris dans la Formule *G* de la premiere Remarque, l'Egalité propoſée eſt toûjours imaginaire lorſque le ſecond lieu eſt imaginaire; & ſi, dans la même hypothêſe le ſecond lieu eſt un de ces lieux réels qui n'expriment ni Courbe ni Ligne droite, les racines de l'Egalité propoſée ſe trouveront parmi les Solutions réelles de ce lieu: Ou bien, cette Egalité ſera ima-

ginaire. Ainsi l'on pourra réformer la Méthode sur cette idée, lorque le premier lui est arbitraire.

On pourra voir aussi que cela abrege la Méthode, si l'on considere que dans le cas où le second lieu exprime une Courbe ou une Ligne droite, il faut plus de calcul pour s'en assurer que pour sçavoir dans les autres cas que ce lieu n'exprime aucune ligne, toutes choses d'ailleurs étant semblables; & l'on a encore l'avantage dans ces derniers cas de n'avoir point de Courbe à construire: puisque le second lieu n'en donne aucune, & que la question est alors résoluë sans former la Courbe du premier lieu.

On peut encore considerablement abreger la Méthode, lorsque les diviseurs du second lieu jettent dans l'inconvenient dont j'ai parlé cy-dessus. Car ce qui caracterise ces diviseurs, fournit une Régle simple & précise pour les trouver; & de-là une autre Régle pour trouver les diviseurs de l'Egalité à construire. Ce qui efface l'inconvenient & réduit cette Egalité à d'autres Egalitez beaucoup plus simples. A quoi il faut ajoûter que ces reformes ne font aucun obstacle à la recherche des lieux les plus simples, dans la supposition que le premier lieu est arbitraire; de maniere que sur cette hypothêse la Méthode en question se trouvera toûjours vraïe dans ses effets, capable d'une solide démonstration, & plus commode qu'avant sa réforme. Mais il faut encore donner un Memoire sur les inconveniens qui n'ont pas été assez expliquez avant que de regler les additions qu'il faut faire à cette Méthode. Quant à l'inconvenient des Courbes qui se coupent à Tangentes égales, quoiqu'on l'évite par les voïes que je propose ici; je ne prétens pas que ces voïes conviennent tout-à-fait à des Méthodes que l'on a données sur d'autres sujets, dans lesquelles il arrive aussi que des Courbes se coupent quelquefois à Tangentes égales. Comme les difficultez de ces Méthodes, indiquées par cet Inconvenient, sont differentes de celles que j'ai expliquées ici, il faut un autre détail pour les résoudre.

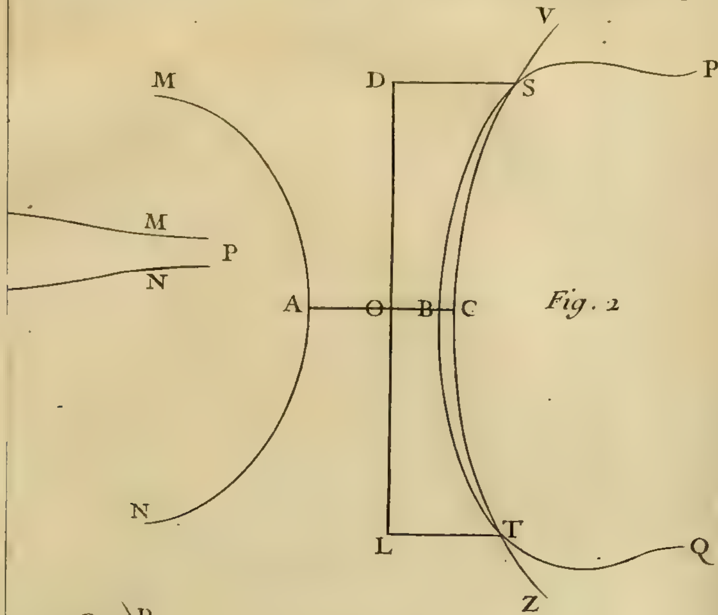


Fig. 2

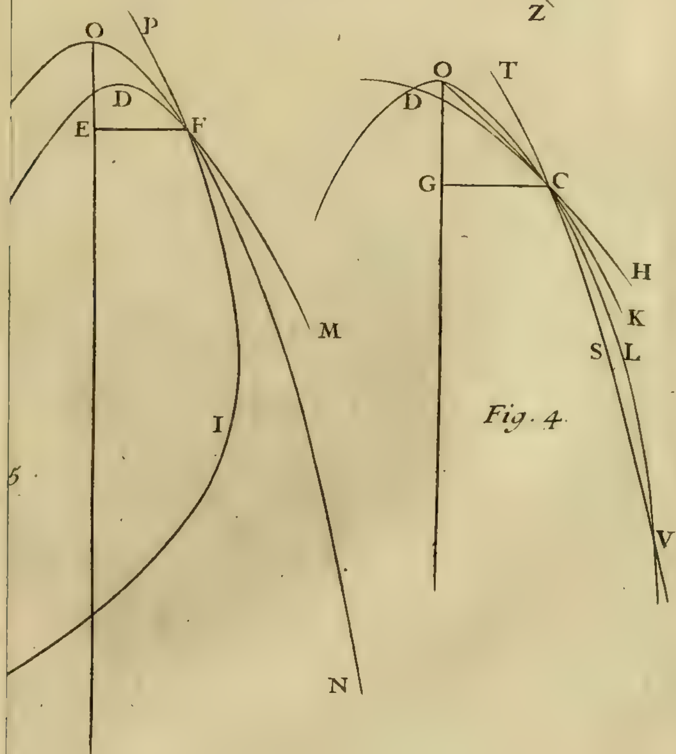


Fig. 4

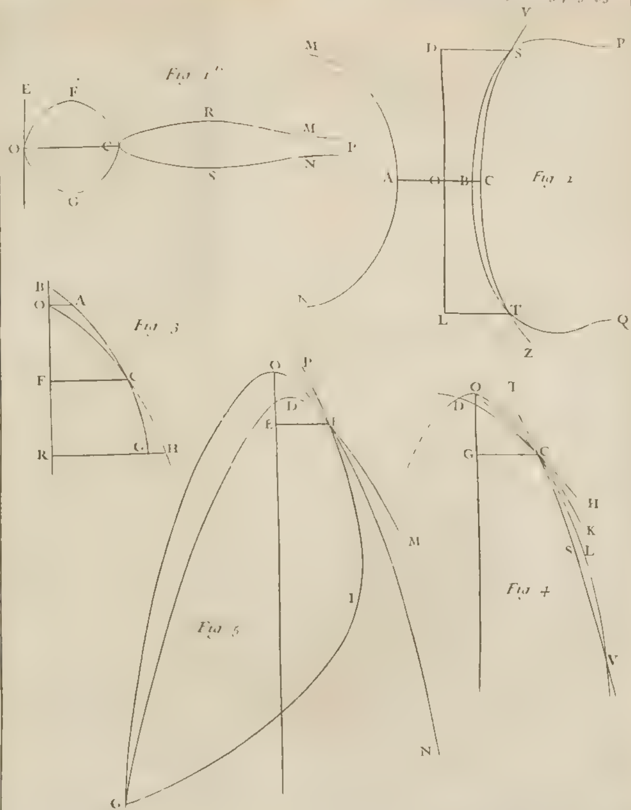


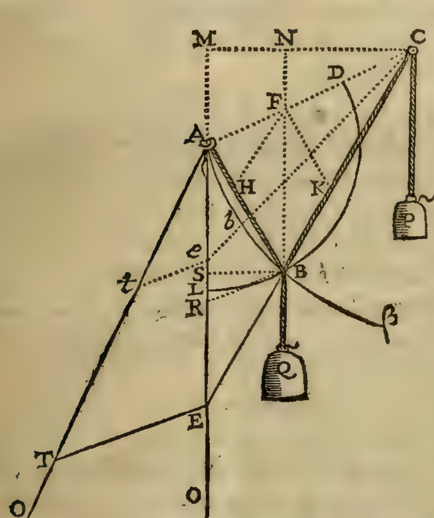
Fig. 1.
E
F
R
M
O
C
P
N
S
G
M
V
D
S
P
A
O
B
C
Fig. 2
N
L
T
Q
Z
B
O
A
Fig. 3
F
C
R
G
H
O
P
D
E
F
M
I
Fig. 5
N
G
O
T
D
G
C
H
K
S
L
Fig. 4
V

PROBLEME DE STATIQUE.

PAR M. VARIGNON.

CE Problême me fut proposé il y a quelques jours : voici la Solution que j'en trouvai presqu'aussi-tôt par le moïen d'une Courbe des plus aisées à décrire. 1709. 28. Aoust

PROBLÊME.



Deux Poids donnés P, Q, *étant attachés à une corde* ABCP, *qui retenuë par une de ses extremitez au clou* A, *passe librement par dessus une poulie* C *fixe entre ces poids : On demande en quel point* B, *ou en quelle situation* ABC *de la corde ces deux poids demeureront en équilibre entr'eux.*

SOLUTION.

Après avoir mené la droite *AC* avec la verticale *AEO*, d'un des points quelconque *E*, de laquelle soit en angle aussi quelconque la droite *ET*. *AE* : : *P* . *Q* Soit par les points *A*, *T*, la droite *ATO* rencontrée en une infinité d'autres points *t*, par une infinité de droites *et* paralleles à *ET*, & qui rencontrent aussi la verticale *AEO* en une infinité de points *e*, *E*, par lesquels du point *C* soient autant d'autres droites *Ce*, *CE*. Si l'on prend par tout sur elles depuis *AEO* les portions *eb*=*et*,

EB = *ET*, la Courbe *Ab Bβ* qui paſſera par tous les points *b*, *B*, ainſi trouvés, déterminera par ſa rencontre avec l'arc de cercle *DBL* décrit du centre *A* & du raïon donné *AB*, le point *B* auquel le poids *Q* demeurera en équilibre avec le poids *P*. *Ce qu'il falloit trouver.*

DE'MONSTRATION.

Soit le parallelogramme *HK* dont la diagonale *BF* ſoit ſur la verticale *QB* prolongée vers *F*; & les côtés *BH*, *BK*, ſur les portions *AB*, *BC*, de la corde *ABCP*. La reſſemblance des triangles rectilignes *FKB*, *ABE*, donnera *BK*. *BF* : : *BE*. *EA* (*conſtr.*) : : *ET*. *EA* (*hyp.*) : : *P*. *Q*. c'eſt-à-dire, *BK*. *BF* : : *P*. *Q*. Donc ſuivant le *projet d'une nouvelle Méchanique* (prop. des poids ſoûtenus avec des cordes) le poids *Q* demeurera ici en équilibre en *B* avec le poids *P*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Le raïon *AB* du cercle *DBL* étant arbitraire, on voit que de quelque longueur qu'il ſoit, le point *B* de ſuſpenſion du poids *Q* en équilibre avec le poids *P*, ſe trouvera toûjours ſur la Courbe *AbBβ*. Ainſi *ſi ce poids* Q, *au lieu d'être attaché en* B *à la corde* ABCP, *eût été propoſé coulant le long de cette corde entre le crochet* A *& la poulie* C, *& qu'on eût demandé en quel point de cette même corde il devoit s'arrêter en équilibre avec le poids* P : cette queſtion auroit été réſoluë par le moïen de la Courbe *AbBβ* faite comme ci-deſſus, en répondant que ce poids *Q* auroit pû demeurer ainſi en équilibre avec les poids *P* dans tout ce que la longueur de la corde *ABCP* lui peut permettre de points *B* qui puiſſent atteindre à cette Courbe *Ab Bβ*, & qu'il y ſeroit en effet demeuré dans tous ceux où cette corde auroit atteint cette Courbe; puiſque par la conſtruction de cette même Courbe *AbBβ*, ce poids *Q* y auroit été par tout au poids *P* : : *BF*. *BK*. Et conſéquemment auſſi en équilibre partout là avec le poids *P* ſuivant la propoſition qu'on vient de citer du *Projet d'une nouvelle Méchanique*. D'où l'on voit

voit que ce même poids Q peut ainsi demeurer en équilibre avec le même poids P en une infinité de points B de la corde $ABCP$ ainsi repliée jusqu'à la Courbe $AbB\beta$: de sorte que cette Courbe est le lieu de tous ces points B d'équilibre.

SCHOLIE.

I. Pour trouver l'équation de la Courbe $AbB\beta$, soit F le point où la droite AC est rencontrée par la verticale QB prolongée jusqu'à elle. Soient appellées AC, a; CF, x; FB, y; P, p; Q, q. L'on aura $CF(x). FB(y) :: CA(a). AE = \frac{ay}{x}$. Et par la nature ou construction (*Solut.*) de la Courbe $AbB\beta$, l'on aura aussi $Q(q). P(p) :: AE . ET$ (*constr.*) $:: AE\left(\frac{ay}{x}\right). EB = \frac{apy}{qx}$. Soit BR parallele à CA, & conséquemment $BR = FA = a - x$: l'on aura de plus $BR(a-x). BE\left(\frac{apy}{qx}\right) :: CA(a). CE = \frac{aapy}{qx \times \overline{a-x}}$.

Et conséquemment $\overline{CE}^2 = \frac{a^4ppyy}{qqxx \times \overline{a-x}^2}$.

Pour trouver encore une autre valeur de $\overline{CE}^2$, soit l'horizontale CM qui rencontre en M la verticale OEA prolongée jusqu'à elle. L'angle M étant ainsi droit, & l'angle CAE ou CAM étant donné aussi-bien que l'hypothenuse CA du Triangle rectangle AMC, son troisiéme angle sera aussi donné avec ses deux autres côtez CM, MA. Donc en appellant CM, b; MA, c; aïant alors $ME = MA + AE = c + \frac{ay}{x} = \frac{cx + ay}{x}$, l'on aura pareillement ici $\overline{CE}^2 (\overline{CM}^2 + \overline{ME}^2) = bb + \frac{ccxx + 2acxy + aayy}{xx} =$

$= \frac{bbxx + ccxx + 2acxy + aayy}{xx}$ (à cauſe de $aa = \overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MA}^2 = bb + cc$) $= \frac{aaxx + aayy + 2acxy}{xx}$.

Donc $\frac{a^4ppyy}{qqxx \times \overline{a - x}^2} = \frac{aaxx + aayy + 2acxy}{xx}$, ou $a^2ppyy = \overline{axx + ayy + 2cxy} \times qq \times \overline{a - x}^2$ eſt l'équation cherchée de la Courbe $AbB\beta$.

II. Voici encore une autre équation de la même Courbe $AbB\beta$. Pour la trouver ſoit BF prolongée juſqu'à la rencontre de CM en N : & après avoir appellé CN, u ; BN, z ; l'on aura CN (u) . BN (z) : : CM (b) . $ME = \frac{bz}{u}$. Et conſéquemment $AE = \frac{bz}{u} - c = \frac{bz - cu}{u}$. Mais la Solution donne $q . p$: : AE $\left(\frac{bz - cu}{u}\right)$. $EB = \frac{bpz - cpu}{qu}$. En en menant BS parallele à CM, l'on aura auſſi SB $(b - u)$. BE $\left(\frac{bpz - cpu}{qu}\right)$: : CM (b) . $CE = \frac{bbpz - bcpu}{qu \times \overline{b - u}}$. De plus CE $(\sqrt{\overline{ME}^2 + \overline{CM}^2})$ $= \sqrt{\frac{bbzz}{uu} + bb} = \frac{b}{u}\sqrt{zz + uu}$. Donc $\frac{b}{u}\sqrt{zz + uu} = \frac{bbpz - bcpu}{qu \times \overline{b - u}}$, ou $\sqrt{zz + uu} = \frac{bpz - cpu}{q \times \overline{b - u}}$ ſera encore l'équation de la Courbe $AbB\beta$ ſur l'axe CM au lieu du diametre CA.

L'accord de ces deux équations (art. 1. 2.) *eſt aiſé à découvrir.*

OBSERVATIONS

Touchant l'effet de certains Acides ſur les Alcalis volatils.

PAR M. HOMBERG.

1709. 13. Aouſt

LEs Alcalis volatils, ſoit des Plantes ou des Animaux, ne font pas indifferemment des effervescences & des ébullition avec toutes ſortes d'acides ; il faut que leurs

forces soient proportionnées entr'eux pour produire ces effets ; & quand elle ne le sont pas, ils se mêlent tranquillement dans une même liqueur, se confondent & demeurent ensemble sans se penetrer en aucune façon. On en peut voir un exemple dans la confusion du vinaigre distilé & de l'esprit d'urine, qui ne font nul effet l'un sur l'autre, à moins qu'on n'affoiblisse beaucoup l'esprit d'urine, ou que l'on ne verse une grande quantité de vinaigre distilé dessus, & en ce cas l'ébullition ne commence à se faire qu'au moment qu'on en a versé assez pour que la proportion requise s'y trouve, & alors l'ébullition se fait tout à coup, comme s'il n'y avoit que les seules dernieres goutes du vinaigre qui eussent produit cette ébullition, sans que la grande quantité qu'on en avoit mis auparavant y eût contribué.

Nous en voyons un exemple pareil dans la liqueur rousse qui distille de toutes les plantes immédiatement avant que l'huile fétide commence à paroître cette liqueur donne en même tems des marques d'alcali en faisant ébullition avec l'esprit de sel, & des marques d'acide en rougissant la teinture de Tournesol, c'est-à-dire, que l'acide & l'alcali nagent séparément dans cette liqueur sans se penetrer ; & ils restent en cet état pendant fort long-temps. J'ai examiné une pareille liqueur, il y avoit plus de quatre ans qu'elle avoit été faite, je l'ai trouvée semblable à celle qui venoit d'être fraîchement distillée.

Tout ceci n'arrive que dans les mélanges des alcalis volatils avec les acides distillez des vegetaux, & non pas avec les acides distillez des mineraux ; car si dans l'esprit d'urine, quelque fort ou quelque foible qu'il soit, on verse une goute d'esprit de sel ou semblable, il se fait sur le champ une ébullition à proportion de la quantité d'esprit de sel qu'on y aura mis, qui se continuë à mesure qu'on en met davantage, jusques à ce que toutes les parties de l'alcali soient rassasiées d'acide; ce qui arrive de même dans la liqueur rousse distillée des plantes, c'est-à-dire,

que l'acide mineral qu'on y mêle se joint dans le moment & avec ébullition à l'alcali volatile qui se trouve dans cette liqueur, pendant que l'acide vegetal, naturellement contenu dans la même liqueur, n'étoit pas capable de le faire, non plus que le vinaigre distilé en petite quantité dans l'observation précedente.

Pour donner la raison de cette différence selon l'idée que je m'en suis faite, je supposerois 1°. que les sels qui entrent dans les plantes sont les sels mineraux, tels que les racines des plantes les rencontrent dans la terre.

2°. Que les pointes acides de ces sels y sont comme par paquets, c'est-à-dire, que plusieurs de ces pointes sont couchées les unes sur les autres, & sont attachées ensemble de la même maniere que nous observons la structure de tous les corps qui sont naturellement aiguillez, comme sont l'antimoine, la ferrette d'Espagne, l'amianthe solide & qui ne s'est pas encore séparée en filasse, la pierre hematite & semblables.

3°. Que les pointes simples ou les aiguilles qui composent ces paquets se peuvent séparer les unes des autres sans se corrompre, comme nous l'observons encore dans la plûpart de ces mêmes corps aiguillez que nous venons de rapporter.

4°. Que les pointes simples ont moins de masses, & qu'elles sont plus deliées & moins roides que les paquets, qui sont composez de plusieurs de ces simples; & par conséquent que les composez sont capables d'un plus grand effort que les simples, & de soulever des poids que les simples ne sont pas capables de soulever.

5°. Que ces paquets de sels mineraux aïant été succez par les racines dans les plantes, s'y mêlent avec les matieres sulfureuses des vegetaux, qui passant ensemble par les filieres fort étroites des organes des plantes, se penetrent intimement les uns les autres, y souffrent des fermentations, & se subdivisent; de sorte qu'ils se résolvent ou se dégagent en aiguilles simples, c'est-à-dire, que les sels acides roides pesans & multiples des mineraux, de-

viennent par les filtrations & par les differentes fermentations dans les plantes, des acides ſimples, déliez, plians & legers des vegetaux.

6°. Que l'alcali volatile, ou le ſel d'urine eſt une matiere ſpongieuſe & capable de compreſſion; & qu'ainſi plus il y en a de diſſous dans une petite quantité de liqueur acqueuſe, plus la maſſe de ce ſel eſt comprimée & peſe ſur lui-même, & plus il eſt par conſéquent difficile à être penetré par les pointes des acides qui ſe préſentent pour entrer dans ſes pores; & qu'au contraire étant diſſous dans une ſuffiſante quantité d'eau, ſes pores ſont dans leur état naturel, c'eſt-à-dire, ouvert autant qu'il le peuvent être, & par conſéquent faciles à être penetrez par les acides.

7°. Que toutes les actions des acides ſur les alcalis & ſemblables, ne ſe font que parce qu'ils ſont pouſſez les uns dans les autres par la matiere de la lumiere, que j'ai prouvé ailleurs être toûjours en mouvement, & heurter contre les parties ſolides de tous les corps, c'eſt-à-dire, les pouſſer continuellement.

Toutes ces ſuppoſitions étant accordées, j'en ferois l'application au fait dont il s'agit en cette façon: les acides diſtilez des vegetaux conſiſtant en pointes ſimples, legeres & fort deliées, preſenteront peu de maſſes à la matiere de la lumiere qui les pouſſe, & qui par conſéquent ne leur imprimera qu'un très-petit effort ſur l'alcali volatile, puiſque les efforts ne ſont qu'à proportion des maſſes; & comme ces pointes ſi déliées ont peu de fermeté, elles plieront & elles gliſſeront plûtôt de deſſus la maſſe peſante & comprimée du ſel d'urine qui nage dans peu de liqueur aqueuſe, que d'en ſoulever les parties & de s'introduire dans ſes pores, pour faire l'efferveſcence & l'ébullition, que la penetration des acides dans les alcalis produit ordinairement; mais quand le ſel volatile d'urine a été delayé dans une grande quantité de liqueur aqueuſe, ſes parties ſont écartées les unes des autres, & n'étant pas entaſſées dans un petit eſpace, ſes po-

res ne ſont pas comprimez, mais ſe tiennent ouverts, & pour lors le petit effort, dont les pointes legeres & pliantes des acides des vegetaux ſont capables, ſuffira pour les introduire ſans aucune réſiſtance dans ſes pores, & elles produiront l'effervefcence & l'ébullition, comme nous le voïons par l'experience.

Et comme nous avons ſuppoſé les pointes acides dans les mineraux couchées les unes ſur les autres attachées enſemble par paquets, la maſſe de ces paquets ſera d'autant plus multipliée, qu'il y aura de pointes ſimples raſſemblées dans chaque paquet ; & par conſéquent auſſi l'effort qu'ils recevront de la matiere de la lumiere, ſera d'autant plus grand; ces pointes ramaſſées en paquets étant plus fermes que les pointes ſimples, elles releveront aiſément le poids des alcalis volatils entaſſez dans peu de liqueur aqueuſe, & s'introduiront de même dans leurs pores ſans ſe plier ou gliſſer deſſus, & produiront l'efferveſcence & l'ébullition, ſans que l'alcali volatile ait beſoin d'être délayé dans une plus grande quantité d'eau, ce que les pointes ſimples des acides des vegetaux n'étoient pas capables de faire, comme l'expérience le démontre.

Nous avons vû dans les faits que nous venons de rapporter, que les acides diſtillez des mineraux, agiſſent plus promptement & avec plus de vigueur, que ceux des vegetaux ſur les alcalis volatils diſtillez, en quelque degré de forces qu'ils les rencontrent; cependant il ne laiſſent pas de penetrer fort difficilement dans les pores de ces mêmes alcalis volatils qui n'ont pas été diſtillez, & qui ſont encore enchaſſez dans les parties animales ou vegetales qui les contiennent naturellement. J'ai vû l'eſprit de nitre produire une ébullition très-ſenſible avec les mouches cantharides, & la continuer pendant plus de deux ans. Voici l'occaſion qui me l'a fait obſerver.

J'ai vû emploïer avec ſuccès dans les maux des reins & dans la gravelle une certaine préparation des mouches cantharides, que l'on appelloit le *Lythontripticum Tulpii ;* on en faiſoit un ſecret. J'en eus la préparation que voici :

Prenez une dragme de cantharides ſans les ailes, & une dragme de la petite cardamome ſans les coques. Pulveriſez-les, & verſez deſſus une once d'eſprit de vin rectifié, & demi-once d'eſprit de nitre; laiſſez-les en infuſion froide pendant cinq ou ſix jours : en les remuant de tems en tems. Il ne faut pas boucher exactement la fiole; car elle ſe caſſeroit par la fermentation continuelle qui s'y fait; on en prend depuis quatre juſques à quinze ou vingt gouttes dans un verre d'eau & de vin, le matin une heure après avoir pris un boüillon, & l'on continuë d'en prendre trois ou quatre jours de ſuite.

Cette liqueur a travaillé toûjours pendant plus de deux ans, & ne s'eſt jamais clarifiée parfaitement, même après l'avoir ſéparée par inclination de deſſus ſes feces; le ſel d'urine ou l'alcali volatile qui ſe trouve dans les cantharides, eſt ſelon toutes les apparences, ſi fort enveloppé de matieres huileuſes & des autres parties de cet animal, que l'acide quoique mineral ne l'a pû atteindre que peu à peu, & pendant tout ce tems une ébullition douce ſe faiſant continuellement, la partie la plus volatile de cette liqueur ſe rarefie en vapeurs, comme il arrive toûjours en pareille cas; ces vapeurs étant enfermées dans la fiole & occupant plus de place qu'elles ne font dans leur premiere forme de liqueur, auroient briſé la fiole ſi on l'avoit bouchée exactement. Auſſi l'ai-je trouvé débouchée pluſieurs fois, & le bouchon de liege ſauté fort loin, quand par mégarde je l'avois enfoncé un peu trop. Il m'eſt arrivé à peu près la même choſe avec la cochenille & avec la chair ſéche des viperes, apparemment par les mêmes raiſons; mais les ſubſtances liquides animales comme l'urine, la ſeroſité du ſang, la liqueur contenuë dans la bourſe du fiel; &c. ne produiſent pas des effets ſemblables; au contraire les ébullitions s'y font avec les mêmes acides très-promptement & ne durent pas, apparemment parce que le ſel volatile contenu dans ces liqueurs y eſt à nud, & non enveloppé de matieres huileuſes ou d'autres parties de l'animal, qui par conſéquent doit être touché

tout auſſi-tôt, & penetré par les acides mineraux, & même il paroît que dans ces cas il n'eſt pas toûjours beſoin que les acides ſoient diſtillez, pour produire des ébullitions & des effervеſcences, & qu'il ſuffit quelquefois d'emploïer ſeulement les ſels mineraux tels qu'ils ſe trouvent en les tirant de leurs mines, comme nous le verrons par lès Obſervations ſuivantes.

Prenez une livre de fiel de bœuf, mêlez-y demi-once d'alun en poudre, battez-les un peu enſemble, il ſe fera ſur le champ une ébullition très-conſiderable avec effervеſcence, & toute la liqueur deviendra trouble comme de la bouë épaiſſe, à peu près de la même couleur qu'étoit le fiel de bœuf avant que d'avoir été précipité par l'alun, c'eſt-à-dire, d'un vert tirant ſur le jaune; mais le précipité ſe jettant peu à peu au fond du vaiſſeau, la liqueur ſe clarifie au Soleil, & change ſa premiere couleur en un rouge tirant ſur le gris de lin, laiſſez repoſer le tout pendant cinq ou ſix jours, & ſéparez-en les ſaletez qui ſurnagent & la réſidence épaiſſe du fond; remettez cette liqueur claire au Soleil pendant trois ou quatre mois dans une fiole bien bouchée, il ſe fera encore quelque ſediment au fond du vaiſſeau, & il s'amaſſera peu à peu ſur la ſurface de la liqueur une graiſſe fort blanche & fort dure de la groſſeur environ d'une groſſe noix, & la couleur rouge de la liqueur ſe changera en un jaune fort foible couleur de citron, & elle acquerera un eodeur ſemblable à celle des écreviſſes cuites.

Il ſe fait dans cette derniere operation une précipitation fort ample, que nous n'avons pas obſervé dans les experiences précedentes, apparemment par la raiſon que l'alcali volatile du fiel de bœuf, aïant abſorbé l'acide de l'alun, ſa matiere terreuſe a perdu ſon diſſolvant, & elle a reparu dans ſa premiere forme terreuſe, & s'eſt précipitée au fond de la liqueur; mais comme ce precipité ſurpaſſe de beaucoup la quantité de l'alun qu'on y avoit mis, il faut que le fiel de bœuf y ait contribué une partie; nous voïons arriver précisément la même choſe dans la

préparation

préparation des lacques des Peintres, qui ne ſont autre choſe que des extractions des teintures de la cochenille, de certains bois, ou des fleurs des plantes par le moïen de quelque alcali fixe, & précipitez enſuite par l'alun, dont la maſſe eſt toûjours plus peſante que l'alun qui l'a précipité.

L'on obſerve dans cette derniere operation un fait remarquable, qui eſt que dans la liqueur rouge & clarifiée du fiel de bœuf, il ſe trouve une quantité fort ſenſible d'une graiſſe blanche & dure comme du ſuif de mouton, & que cette liqueur étant expoſée au Soleil, perd ſa rougeur peu à peu, à meſure que la graiſſe s'en ſépare; & quand elle en eſt toute ſéparée, la liqueur a perdu auſſi toute ſa couleur rouge; cette obſervation confirme l'idée que l'on avoit de la liqueur contenuë dans la bourſe du fiel, ſçavoir, que c'eſt une eſpece de ſavon liquide. Il eſt conſtant que le ſavon dans ce païs-cy n'eſt autre choſe que de l'huile d'olives unie par la cuiſſon au ſel de la ſoude; & dans les païs froids, où le ſel de la ſoude & l'huile d'olives ſont fort chers, l'on ſubſtituë à la place de l'un le ſel lixiviel du bois de chêne; & à la place de l'autre le ſuif des animaux, qui produiſent un ſavon auſſi blanc, auſſi dur & auſſi bon pour le blanchiſſage que celui qui eſt fait avec l'huile d'olives. Dans la liqueur du fiel la nature a emploïé une graiſſe ſemblable au ſuif, qui dans cette operation s'en ſépare peu à peu, & qui reprend la même forme que nous obſervons dans la graiſſe des animaux; mais au lieu d'un alcali fixe que nous emploïons dans la fabrique de nos ſavons factices, elle s'eſt ſervie de l'alcali volatile, dont toutes les parties animales ſont remplies: cet alcali aïant été détruit dans nôtre operation par l'acide de l'alun, la liqueur du fiel a rendu la graiſſe qu'elle contenoit, de la même maniere que dans nos ſavons factices les alcalis fixes ſe détruiſent par l'addition de quelque acide, & font reparoître l'huile ou la graiſſe qui étoit entrée dans ſa compoſition.

Nous avons obſervé que la liqueur du fiel de bœuf eſt

rouge après sa premiere précipitation, & qu'elle perd sa couleur à mesure que la graisse s'en sépare ; la raison en est, que presque toutes les dissolutions des matieres huileuses ou grasses sont rouges, en quelque menstruë qu'elles soient dissoutes, & que celle-cy étant une de ces dissolutions, elle en conserve la couleur tant qu'elle contient de la graisse, laquelle en étant séparée, la couleur s'est perduë aussi qui en avoit été produite.

Notre fiel de bœuf ayant été dégagé de sa partie terreuse & grasse, de la maniere que nous l'avons enseigné dans cette derniere operation, devient un des meilleurs remedes que nous aïons, pour ôter commodément les tannes qui paroissent dans la peau, & particulierement au nez de la plûpart des hommes, & qui sont d'autant plus sensibles que la peau est blanche & délicate. Il faut l'emploïer de cette façon :

Prenez une dragme & demie de cette liqueur, après qu'elle aura été au moins deux ou trois mois exposée au Soleil en esté, & autant d'huile de tartre par défaillance ; ajoûtez-y une once d'eau de riviere, mêlez bien ensemble, & gardez dans une fiolle bien bouchée ; il ne faut pas faire beaucoup de ce mélange à la fois, parce qu'il ne se conserve pas long-tems. Pour s'en servir l'on moüille un doigt dans ce mêlange, on en tappe l'endroit où sont les tannes, on le laisse sécher & on en remet ; l'on fait cela sept ou huit fois par jour, jusques à ce que l'endroit, étant sec, commence à devenir rouge, alors on cesse d'en mettre ; on sentira une très-legere cuisson, ou plûtôt une espece de chatoüillement, & la peau se fera un peu farineuse pendant un jour ou deux ; la farine étant tombée les tannes seront effacées pendant cinq ou six mois de temps, après quoi il faudra recommencer le même remede : Si après la premiere application du remede, c'est à dire la farine étant tombée, les tannes n'étoient pas tout à fait effacées, il en faudroit appliquer deux fois de suite.

Les tannes m'ont toûjours paru n'être autre chose que

la matiere terreuſe, huileuſe & ſaline de la ſueur, laquelle reſte dans les mailles de la peau, tandis que la liqueur aqueuſe, qui leur ſervoit de vehicule, s'en évapore par la chaleur du corps, ces matieres rempliſſent peu à peu ces mailles; de ſorte qu'il en regorge toûjours une partie par les petits trous ou par les pores que ces mailles ont dans la ſurpeau; & comme cette matiere eſt tenaſſe & gluante, elle retient la craſſe & la poudre qui vole ſur le viſage, & quoiqu'on l'eſſuïe ſouvent, non ſeulement on n'emporte pas la craſſe, qui s'eſt placée ſur les extrémitez des tannes, qui ſont dans les enfonçures de ces trous; mais au contraire le linge qui eſſuïe le viſage, la ramaſſe & la preſſe dans ces creux, où elle reſte & produit ces petits points noirs, qui paroiſſent dans les pores de preſque tous les nez, & qui fait le petit bout noir de la tanne quand on la fait ſortir de ſon trou, en la pinçant d'une certaine façon; ce qui a fait croire aux perſonnes peu inſtruites, que les tannes ſont des vers qui s'engendrent dans la peau, & que ce petit point en eſt la tête, au lieu que c'eſt un petit peloton de la ſueur deſſéchée dans les pores de la peau, dont la petite extrémité qui regarde le jour eſt ſale & craſſeuſe par la poudre qui journellement vole deſſus, & en eſt retenuë par la matiere gluante de la tanne même. Il en paroît ordinairement plus ſur le nez & ſur le menton qu'aux autres endroits du viſage, peut-être parce qu'en ces endroits la peau étant plus tenduë; les pores s'y tiennent plus ouverts pour recevoir en plus grande abondance & pour retenir la poudre qui vole deſſus.

Ce remede du fiel de bœuf étant une eſpece de leſſive, elle entre peu à peu dans les pores, où elle détrempe & diſſout entierement la tanne; & comme dans cet état la tanne occupe beaucoup plus de place qu'elle ne faiſoit auparavant, la plus grande partie de ſa ſubſtance ſort de ſon creux & s'en va en farine, il faut un temps aſſez conſidérable pour remplir de nouveau ces creux, pendant lequel il n'en paroît point dans la peau.

DE LA FORMATION ET DE L'ACCROISSEMENT DES COQUILLES DES ANIMAUX

tant terrestres qu'aquatiques, soit de mer soit de riviere.

PAR M. DE REAUMUR.

1709. Novembre.

LA Sagesse de la Nature n'auroit pas assez fait pour la conservation des Animaux, si contente d'avoir travaillé avec un art merveilleux leurs délicates parties interieures, elle eût négligé d'emploïer la même adresse à les défendre contre les corps qui les environnent : le trop rude attouchement de ces corps auroit bientôt détruit ces canaux si déliés, ces fibres si subtiles sur lesquelles est fondé tout le jeu surprenant des machines animales. Aussi la Nature a-t-elle pris soin de revêtir ces délicates parties de diverses envelopes qui ne peuvent pas aisément être alterées par le corps qui les entourent ; non-seulement elle les a renfermées dans une derniere peau plus serrée & plus solide que les autres, mais elle a encore ordinairement couvert cette derniere peau de poils, de plumes, d'écailles, ou de coquilles. Ce sont là les petits remparts, s'il m'est permis de parler de la sorte, à l'abri desquels les machines animales peuvent soûtenir les efforts de la plûpart des corps qui les frotent, poussent, ou choquent continuellement. L'attention même de la Nature a été jusques à proportionner la force de ces défenses à la foiblesse des parties interieures, je veux dire, que les animaux qui par leur figure, ou la molesse de leur substance donnent plus de prise aux corps qui les environnent, ont en récompense de plus fortes envelopes ;

ainſi voïons-nous que des coquilles couvrent ceux dont la ſubſtance eſt très-humide & très-molle, & la figure preſque plate ou ſpirale, qui par ce double inconvenient ſeroient expoſés à être déchirés par la terre, le ſable ou les pierres ſur leſquelles ils rampent. Combien la Nature conſerve-t'elle d'eſpeces d'animaux differentes ſur la terre, dans les rivieres & dans les mers par le moïen de ces coquilles? avec quel art ne paroît-elle pas les avoir travaillées? Il ſemble qu'elle ait pris plaiſir à varier leurs figures, leurs ſtructures & leurs couleurs. Auſſi la plûpart de ceux que les beautés de la Nature touchent, ont mis leurs ſoins à en aſſembler le plus qu'il leur a été poſſible, chaque nouvelle coquille fourniſſant de nouveaux attraits à leur curioſité; leurs cabinets ne contiennent qu'une partie de celles qui parent l'univers, & en ont toûjours de reſte pour exciter l'admiration de ceux qui ſçavent admirer. Mais il ſemble qu'on ſe ſoit borné à contempler ce bel ouvrage; perſonne, au moins que je ſçache, n'a expliqué de quelle maniere il eſt produit; de ſorte que n'ayant pas trouvé à m'en inſtruire chez les Auteurs, j'ai conſulté la Nature elle-même par diverſes experiences; & c'eſt en rapportant ce qu'elles m'ont appris, que je vais faire voir dans la ſuite comment ſe font la formation & l'accroiſſement des Coquilles.

Quoiqu'il parût d'abord naturel d'expliquer de quelle maniere les coquilles des animaux ſont formées avant de parler de leur accroiſſement, je ſuivrai cependant ici un ordre contraire. Je commencerai par expliquer de quelle maniere elles croiſſent, ce qu'il a été plus aiſé de découvrir par des experiences, & ce qui ſuffira pour faire connoître de quelle maniere ſe fait leur formation, qui n'eſt, pour ainſi dire, que leur premier degré d'accroiſſement.

Un corps peut croître de deux manieres differentes; ou, pour parler ſelon des idées plus diſtinctes, les petites parties de matiere qui viennent s'unir à celles dont le corps étoit déja compoſé, & qui par là augmentent ſon étenduë, peuvent lui être ajoûtées par deux differentes

voïes : ou ces parties ne s'attachent à celles qui composent déja le corps qu'après avoir passé au travers de ce corps même, y avoir été préparées & en quelque façon renduës propres à occuper la place où elles sont conduites; & c'est ce qu'on appelle ordinairement Croître par vegetation, & dans l'Ecole Croître par *Intussusception*.

C'est ainsi que la séve monte dans les plantes par divers petits canaux des plantes mêmes, qui après l'avoir préparée en quelque sorte la conduisent en differens endroits de la plante où elle se colle, & augmente par conséquent l'étenduë de cette plante. C'est ainsi qu'une certaine portion du sang aïant été conduite par les arteres aux extremitez du corps de l'animal, s'attache à ses chairs, & en augmente le volume. La seconde espece d'accroissement est lorsque les parties qui augmentent l'étenduë d'un corps, lui sont appliquées sans avoir reçû aucune préparation dans ce corps même, & c'est ce qu'on nomme Croître par apposition, ou en termes de l'Ecole, par *Juxtaposition*. Toutes ces plantes artificielles que nous devons à l'adresse des Chymistes, croissent de cette maniere, comme aussi toutes les cristalisations, les sels, &c.

L'accroissement des coquilles doit se faire de l'une ou de l'autre des manieres précedentes. Ceux qui ont tout fait vegeter jusques aux pierres, n'auroient eu garde apparemment de soupçonner, que des coquilles travaillées avec tant d'art pussent être produites par une simple juxtaposition. L'analogie même qui paroît être entr'elles & les os (car ne pourroit-on pas les regarder comme des os exterieurs ?) sembleroit confirmer cette opinion, puisque les os vegetent veritablement, Mais de pareilles conjectures ne suffisent point en bonne Physique. Les seules experiences faites sur les choses dont il est question, y doivent servir de bases à nos raisonnemens : elles seules peuvent nous faire connoître le chemin qu'il a plû à la Nature de prendre pour arriver à son but ; c'est avec le secours de ces experiences que nous verrons dans la suite que les coquilles sont produites par une simple apposi-

tion. Au reste, quoique je n'en aïe fait que sur quelques especes de coquilles de terre, de mer, & de riviere, je ne laisse pas de me croire en droit d'expliquer en général l'accroissement & la formation des coquilles. Les voïes génerales dont la Nature se sert pour produire des ouvrages semblables sont assez connuës. Ne suffiroit-il pas à un Physicien d'avoir expliqué comment une plante croît, de quelle maniere se fait la nutrition dans un animal pour en conclure, ou plûtôt afin que tout le monde Philosophe conclût avec lui, que c'est ainsi que toutes les plantes croissent ; que la nutrition se fait de la même maniere dans tous les animaux ; après qu'il a été démontré que le sang circuloit dans l'homme, qui a douté qu'il ne circulât dans toutes les machines animales ?

Aussi me contenterai-je de rapporter les experiences que j'ai faites sur diverses especes de Limaçons terrestres, pour ne pas fatiguer par d'ennuïeuses repetitions dans lesquelles je tomberois necessairement si je rapportois de semblables experiences faites sur des Limaçons aquatiques tant de riviere que de mer, sur diverses especes de coquilles à deux pieces, comme Moules, Palourdes, Pectongles, &c. outre qu'il ne seroit pas aisé à bien des gens de repeter les mêmes experiences sur les coquilles de mer ou de rivieres, au lieu que tout le monde les peut faire commodément sur les limaçons terrestres. J'avertirai seulement que j'ai renfermé diverses sortes de coquillages de mer & de riviere dans de petites cuves que j'ai fait enfoncer dans la mer ou dans la riviere après les avoir percées de plusieurs trous assez grands pour donner libre entrée à l'eau, mais trop petits pour laisser sortir les coquillages ; ce qui m'a donné la facilité de faire à peu près les mêmes experiences sur leurs coquilles, & avec le même succès, que celles que je rapporterai avoir faites sur les Limaçons terrestres. Ceci supposé, je passe à expliquer comment se fait l'accroissement des Coquilles.

Lorsque l'animal qui remplissoit exactement sa coquille

croît, il arrive que cette même coquille n'a plus assez d'étenduë pour le couvrir tout entier, ou qu'une partie de la surface du corps de l'animal se trouve nuë; la partie qui se trouve ainsi dépoüillée de coquille par l'accroissement de l'animal est toûjours celle qui est la plus proche de l'ouverture de la coquille, car le corps de l'animal peut seulement s'étendre de ce côté là. Tous les animaux qui habitent des coquilles tournées en spirale, comme les Limaçons, ne peuvent s'étendre que du côté de la tête où est l'ouverture de la coquille; au lieu que les animaux des coquilles de deux pieces, comme les Moules, peuvent s'étendre dans tout leur contour. Or dans toutes les especes de coquillages, c'est cette même partie du corps qui se trouve dépoüillée par l'accroissement de l'animal, qui fait croître la coquille. Voici la méchanique sur laquelle cet accroissement est fondé.

C'est un effet necessaire des loix du mouvement, quand les liqueurs coulent dans des canaux, que les petites parties de ces liqueurs, ou les petits corps étrangers mêlés parmi elles, qui à cause de leur figure ou leur peu de solidité par rapport à leur surface, se meuvent moins vîte que les autres, s'éloignent du centre du mouvement, ou qu'ils se placent proche des parois de ces canaux. Il arrive même souvent que ces petites parties s'attachent à la surface interieure de ces canaux, lorqu'elles sont assez visqueuses pour cela. Les canaux qui conduisent de l'eau à des reservoirs nous en fournissent des exemples. On voit ordinairement, lorsqu'on les ouvre, leur surface interieure couverte d'une petite croute de matiere visqueuse; on remarque même que ceux dans lesquels passent certaines eaux, ont une croute pierreuse. Il est de plus certain que les liqueurs qui coulent dans ces canaux, poussent leurs parois de tous côtés, ou (ce qui est la même chose) qu'elles poussent les petites parties pierreuses & visqueuses des croutes dont nous venons de parler, contre les parois. De sorte que si ces canaux étoient percés comme des cribles, d'une infinité de petits trous de figure propre à donner
seulement

ſeulement paſſage à ces petits corps viſqueux & pierreux, ils s'échaperoient des canaux, & iroient ſe placer ſur leur ſurface extérieure, où ils formeroient la même croute que l'on voit ſur leur ſurface intérieure avec cette ſeule difference que cette croute pourroit devenir beaucoup plus ſolide & même plus épaiſſe, étant moins expoſée au frottement de la liqueur que celle qui ſe forme dans l'intérieur du tuyau. L'accroiſſement des coquilles eſt l'ouvrage d'une ſemblable Méchanique; la ſurface extérieure de la portion du corps de l'animal qui s'eſt trop étenduë pour être couverte par l'ancienne coquille, eſt remplie d'un nombre prodigieux de canaux dans leſquels circulent les liqueurs néceſſaires à la nutrition de l'animal; beaucoup de petites parties de matiere viſqueuſe & pierreuſe ſont mêlées parmi ces liqueurs, mais comme ces petites parties viſqueuſes & pierreuſes ſont moins fluides que celles qui compoſent les liqueurs avec leſquelles elles coulent, elles ſe trouvent les plus proches des parois de ces vaiſſeaux, qui étant remplis d'une infinité de pores du côté de la ſurface extérieure du corps de l'animal, propres à leur donner paſſage, ces petites parties de matiere pierreuſe & viſqueuſe s'échapent aiſément des canaux qui les contenoient; car elles ſont continuellement pouſſées contre leurs parois par la liqueur qui les remplit, & elles vont ſe placer ſur la ſurface extérieure de ces canaux, ou plûtôt ſur toute celle du corps de l'animal qui n'eſt point couverte par la coquille, où elles arrivent avec d'autant plus de facilité, que tous les pores leur donnent une libre ſortie, au lieu que pluſieurs de ces pores peuvent être bouchez ſur le reſte du corps par la coquille dont il eſt revêtu. Ces petites parties de matiere pierreuſe & viſqueuſe étant arrivées à la derniere ſurface du corps de l'animal, s'attachent aiſément les unes aux autres & à l'extrémité de la coquille; ſur-tout lorſque ce qu'il y avoit de plus ſubtil parmi elles, s'eſt évaporé, elles compoſent alors toutes enſemble un petit corps ſolide qui eſt la premiere couche du nouveau morceau de coquille. D'autres petites parties

de matiere ſemblable à celle de la premiere couche, dont la liqueur qui circule dans les vaiſſeaux fournit abondamment, s'échapent de ces vaiſſeaux par la même Méchanique; car on ne doit pas craindre que la premiere couche ait bouché tous les pores, & elles forment une ſeconde couche de coquille, il s'en forme de la même maniere une troiſiéme, & ainſi de ſuite, juſques à ce que la nouvelle coquille ait une certaine épaiſſeur, mais ordinairement beaucoup moindre que celle de l'ancienne, lorſque l'accroiſſement de l'animal donne l'origine à un autre nouveau morceau de coquille. C'eſt aux experiences que je vais rapporter à faire voir, ſi j'ai véritablement décrit la maniere dont la Nature agit, ou ſi l'on doit regarder tout ce qu'on vient d'avancer comme un ſimple jeu d'imagination.

J'ai commencé par ſuppoſer que l'animal croît avant ſa coquille; & c'eſt de quoi il eſt aiſé de s'aſſurer, ſi l'on veut regarder avec quelque attentions des limaçons de Jardin dans le temps qu'ils augmentent l'étenduë de la leur; on voit d'une maniere très-ſenſible qu'elle eſt trop petite pour les contenir. Ils s'attachent alors contre les murs, où ils reſte en repos, & donnent la facilité d'obſerver qu'une portion de leur corps déborde tout autour de la coquille. Cette portion, comme tout le reſte de leur corps, eſt remplie d'une quantité prodigieuſe de petits canaux, les yeux ſeuls en apperçoivent un grand nombre qui leur paroît augmenter conſiderablement, lorſqu'on leur donne le ſecours du Microſcope.

Les pores dont j'ai ſuppoſé ces canaux remplis ſont trop petits pour être ſenſibles aux yeux, mais on ſe convainc de leur exiſtence par leurs effets avec autant de certitude que ſi on les appercevoit fort diſtinctement; il ne faut pour cela que caſſer un morceau de la coquille d'un limaçon ſans le bleſſer, ce qui eſt toûjours aiſé de faire, parce qu'elle ne lui eſt adherente que dans un ſeul endroit, & ôter le morceau de coquille que l'on a caſſée, on voit dans peu de tems la peau de l animal ſe couvrir

d'une liqueur, qui n'a pû arriver des vaiſſeaux dans leſquels elle étoit contenuë juſques à cette derniere ſurface, ſans que les pores de ces vaiſſeaux l'aïent laiſſé paſſer; ſi même pour s'aſſurer davantage de la route que cette liqueur a priſe pour arriver ſur la peau du limaçon, on ôte cette liqueur en eſſuïant la peau avec un linge, peu d'heures après on voit reparoître une liqueur ſemblable à celle que l'on a ôtée qui vient en même tems de toute la partie découverte, & qui par conſéquent ne peut avoir paſſé que par les pores.

C'eſt cette liqueur, ou plûtôt les parties de matiere moins propres au mouvement mêlées parmi cette liqueur, qui ſervent à faire croître la coquille du Limaçon. On n'aura gueres lieu d'en douter lorſque l'on ſçaura qu'elles reparent la perte du morceau de coquille qu'on lui a enlevée; & c'eſt ce qu'on verra fort clairement, ſi après avoir dépoüillé un Limaçon d'une partie de ſa coquille, on le met dans quelque endroit où l'on puiſſe le voir commodément, dans un vaſe par exemple, il n'eſt pas longtems ſans s'attacher contre les parois de ce vaſe, comme ils s'attachent contre les murs des jardins dans le tems que leurs coquilles croiſſent. On voit alors cette liqueur s'épaiſſir & ſe figer, ou, pour parler ſelon des idées plus claires, les parties les plus ſubtiles s'évaporent, & les plus groſſieres reſtent ſeules, & forment ſur la partie du corps de l'animal qui eſt découverte une petite croute très-fine; on peut ſouvent diſtinguer cette croute après vingt-quatre heures; elle reſſemble aſſez alors par ſa fineſſe à ces toiles que les araignées des maiſons font dans les angles des murs. C'eſt cette croute qui forme la premiere couche de la nouvelle coquille. On voit au bout de quelques jours cette croute s'épaiſſir par le moyen de differentes couches qui ſe produiſent ſous cette premiere; & enfin au bout de dix ou douze jours ordinairement, le nouveau morceau de coquille qui s'eſt formé a à peu près la même épaiſſeur de l'ancien morceau de coquille que l'on a ôté au Limaçon. FIG. I.

Lorſqu'on veut voir parvenir le nouveau morceau de coquille à l'épaiſſeur de l'ancienne, il faut avoir la précaution de mettre dans le vaſe où on a renfermé les Limaçons une nourriture qui leur ſoit convenable, ſur tout lorſqu'on a caſſé cette coquille proche de l'ouverture, ſans quoi le volume de leur corps diminuë conſiderablement, & ce qu'on leur a laiſſé de coquille ſe trouvant alors aſſez grand pour les couvrir, il ne ſe forme que les premieres feüilles de la coquille : il eſt même quelquefois à propos de les détacher des parois du vaſe, lorſqu'on remarque qu'ils y reſtent pluſieurs jours de ſuite, afin de les obliger de ſe ſervir de la nourriture qu'on leur a donnée, & de reparer la diſſipation qui s'eſt faite pendant la production des premieres feüilles du nouveau morceau de coquille.

On peut leur donner pour les nourrir, des herbes, même de la terre & du papier ſouvent arroſés d'eau ; ils mangent aſſez indifferemment de toutes ces choſes, qui peuvent fournir des petites parties de matiere aſſez ſolide pour former la coquille. La terre, par exemple, doit être remplie d'une infinité de petites lames qui ſervent à former les pierres qui croiſſent dans ſon ſein. Si ces petites lames pierreuſes circulent avec les liqueurs dans les vaiſſeaux du Limaçon, elles doivent ſans doute être très-propres à bâtir les diverſes couches de coquilles : or on peut s'aſſurer par une experience facile que ces petites parties pierreuſes circulent avec ces liqueurs. On n'a pour cela qu'à mettre une certaine quantité de cette liqueur dans un vaſe, & la laiſſer expoſée à l'air pendant quelques jours. Après que le plus ſubtil s'eſt évaporé, on voit au fond du vaſe une matiere ſolide, parmi laquelle on diſtingue beaucoup de petits grains d'une matiere blanche friable, aſſez reſſemblans à des grains de ſables, à cela près qu'ils ont moins d'épaiſſeur. On ſçait de plus que les limaçons au commencement de l'hyver, font avec cette liqueur ou leur bave un petit couvercle à l'ouverture de leur coquille, dans laquelle ils ſe renferment entierement. A la verité

ce couvercle eſt d'une tiſſure aſſez differente de celle de la coquille, mais il eſt ſolide, & cela ſuffit pour faire voir qu'il y a beaucoup de matiere ſolide mêlée parmi ces liqueurs. La difference qui eſt entre la tiſſure de la coquille, & celle de ce couvercle vient ſans doute de la difference des pores par leſquels cette liqueur a paſſé avant de former l'une ou l'autre

La maniere ſeule dont ſe forme un nouveau morceau de coquille en la place de celui qu'on a enlevé, pourroit ſuffire pour prouver que les coquilles ne vegetent point; car ſi elles croiſſoient par vegetation, ce ne pourroit être que de deux manieres qu'il n'eſt pas poſſible d'accommoder avec l'experience précédente. Ou les liqueurs que l'animal fourniroit pour l'accroiſſement de la coquille, & qu'il ne pourroit dans cette hypothêſe lui communiquer que par le petit endroit auquel il lui eſt attaché, qu'on devroit regarder alors en quelque ſorte comme la racine de la coquille; ou, dis-je, ces liqueurs enfileroient dès cet endroit des canaux qui les porteroient à toutes les parties de la coquille; ou ils ne les conduiroient que vers l'extrémité qui doit s'étendre; or dans l'une & l'autre de ces ſuppoſitions, il arriveroit que lorſque l'on auroit caſſé un morceau de la coquille, la liqueur qui coule au travers de cette coquille, s'échaperoit par l'ouverture qu'on lui a faite; & alors ce ſeroit ſur le contour du trou qu'on a fait à la coquille, que l'on appercevroit cette liqueur que l'on ne voit que ſur le corps de l'animal; laquelle liqueur après s'être figée, feroit une eſpece de calus, qui s'augmentant peu à peu boucheroit enfin entierement le trou. C'eſt ainſi que les calus des os fracaſſés ſe forment par l'extravaſion du ſuc qui ſervoit auparavant à les nourrir & à les faire croître, que lorſque l'on a coupé des chairs de quelque partie du corps, les chairs voiſines s'étendent & recouvrent la partie qu'on avoit découverte; enfin nous voyons arriver la même choſe aux arbres dont on a enlevé une partie: il ſe forme un calus du ſuc qui s'extravaſe de l'arbre & qui recouvre l'arbre peu à peu;

tout se passe autrement dans la production du nouveau morceau de coquille. Rien ne s'échappe de la coquille; toute l'étenduë du trou se bouche en même tems par la liqueur qui sort du corps de l'animal; & afin qu'on ne soupçonne pas que cette liqueur s'étant extravasée de la coquille d'une maniere insensible tombe par son propre poids sur le corps de l'animal où elle se rassemble en assez grande quantité pour composer ensuite le nouveau morceau de coquille qui est toûjours posé directement sous l'ancienne; je vais rapporter deux experiences qui serviront également à dissiper ce scrupule, & à démontrer ce que j'ai avancé.

FIG. II. J'ai cassé plusieurs coquilles de limaçon de deux manieres differentes. Premierement, j'ai fait aux unes un assez grand trou entre les deux extrémités de la coquille, c'est-à-dire entre la pointe de la coquille & son ouverture; après quoi j'ai fait couler par ce trou entre le limaçon & sa coquille un morceau de peau de cannepin, c'est avec cette peau qu'on fait les gands qu'on nomme *Gands de poule*; cette peau étoit très-mince, mais d'une tissure serrée; je l'ai collé cette peau à la surface intérieure de la coquille, de maniere qu'elle bouchoit assez exactement le trou que je lui avois fait; c'est-à dire, que je l'ai collée entre la coquille & le corps de l'animal. Or il est évident que si la coquille ne se formoit pas d'une liqueur qui sort immédiatement du corps de l'animal, mais de celle qui passe au travers de la coquille, qu'il auroit dû se former un morceau de coquille sur la surface extérieure de la peau de gand, & qu'il n'étoit pas possible qu'il s'en formât entre le corps du Limaçon & cette peau. Le contraire est cependant toûjours arrivé; le côté de la peau qui touchoit le corps de l'animal s'est couvert de coquille, & il ne s'est rien formé sur la surface extérieure.

L'autre expérience n'est pas moins décisive que celle-ci. 2°. J'ai cassé plusieurs coquilles de Limaçon de maniere que j'ai diminué le nombre de leurs tours. J'ai, par

exemple, réduit des coquilles de gros Limaçons des jardins, qui sont ordinairement quatre tours de spirales, ou quatre tours & demi, à trois tours & demi ou à quatre tours; ainsi j'ai rendu ces coquilles trop petites pour couvrir le Limaçon; & je les ai mises à peu près dans le même état où elles sont, lorsque l'accroisement du corps de l'animal les fait croître. Après avoir ainsi cassé plusieurs coquilles, j'ai pris comme dans l'experience précédente un morceau de peau aussi large que le contour de l'ouverture de la coquille, j'ai fait entrer une des extrémités de cette peau entre le corps du Limaçon & la coquille, à la surface intérieure de laquelle j'ai collé cette peau; & aïant renversé l'autre extrémité de la peau sur la surface extérieure de la coquille, je la lui ai pareillement collée; d'où l'on voit que j'ai envelopé tout le contour de l'ouverture de la coquille avec cette peau. Or si la coquille croissoit par un principe de vegetation, il seroit arrivé l'une de ces deux choses, ou le morceau de peau ainsi collé l'auroit empêché de croître, ou la coquille s'allongeant auroit porté la peau plus loin. Mais il est arrivé au contraire que la coquille a crû, & que la peau est restée où je l'avois placée; car l'accroissement de la coquille s'est fait de telle sorte, que l'épaisseur du gand est restée entre le nouveau morceau de coquille & l'ancienne, qui par conséquent n'a contribué en rien à cette formation. FIG. III.

Au reste il ne doit pas paroître difficile à concevoir comment les petites parties de matiere solide qui sont mêlées parmi la liqueur, peuvent s'attacher les unes aux autres pour former une premiere couche de la nouvelle coquille, ni comment une seconde couche peut s'unir à cette premiere, une troisiéme à la seconde, & ainsi de suite; ou plûtôt, cette difficulté n'est point differente de celle que l'on a à expliquer l'union des parties de tous les corps solides; mais quelque sistême que l'on veüille adopter, il est aisé de comprendre que ces petites parties solides qui nagent dans une liqueur très-visqueuse, ont une grande facilité à s'unir entr'elles, comme aussi les

diverſes couches de coquille qu'elles compoſent ; je raporterai pourtant une expérience qui pourroit peut-être donner quelque ouverture pour expliquer comment ces petites parties qui forment les coquilles s'attachent les unes aux autres.

J'ai broïé dans un mortier des coquilles de Limaçon ; & après les avoir réduites dans une poudre très-fine, j'ai fait paſſer cette poudre par un tamis dont le tiſſu étoit très-ſerré, afin d'en ſéparer les parties les plus groſſieres. J'ai mis cette poudre dans un vaſe, & j'ai jetté du vinaigre deſſus avec lequel elle a fermenté. Il s'eſt fait une eſpece de pâte que j'ai laiſſée ſécher exposé à l'air ; elle eſt devenuë d'une aſſez grande dureté ſur tout la premiere couche, ou celle qui étoit la plus expoſée à l'air ; lorſqu'au contraire j'ai délaïé cette poudre avec de l'eau, quand elle s'eſt ſéchée, les petits grains de poudre ont ceſſé d'être adherens. D'où il paroît que des acides analogues à ceux du vinaigre ſont très-propres à lier entr'eux les petits corpuſcules qui forment les coquilles de Limaçon. Ceux qui emploïent volontiers par tout les acides de l'air, pourroient trouver ici leur compte, en s'imaginant qu'ils contribuent à coaguler la liqueur qui vient ſe placer ſur le corps du Limaçon ; mais il ſemble que pour rendre cette conjecture vrai-ſemblable, il ſeroit neceſſaire qu'il ſe trouvât auſſi certains acides mêlés parmi l'eau de mer qui ſerviſſent à coaguler les liqueurs qui forment les coquilles de mer; & ſi cela étoit vrai,il devroit arriver, lorſqu'on auroit délaïé de la poudre de coquille de mer avec de l'eau de mer, que cette poudre auroit plus de conſiſtance étant ſéche, que n'en a celle de coquille de Limaçon délaïée avec de l'eau de riviere, & c'eſt ce qui n'arrive point.

On ne doit pas craindre auſſi, qu'une premiere feüille de la coquille étant formée, elle bouche tous les paſſages néceſſaires à la nouvelle liqueur qui doit s'échaper des vaiſſeaux pour produire une ſeconde couche de la coquille ; & ainſi de ſuite juſques à ce qu'elle ait une certaine épaiſſeur.

Il

Il n'eſt pas poſſible que le corps du Limaçon s'applique aſſez exactement ſur cette nouvelle feüille de coquille, pour boucher entierement tous ces petits pores: on verra même cette difficulté s'évanoüir entierement pour peu qu'on faſſe réflexion que cette premiere couche de coquille n'a pû être produite ſans que le volume du corps du limaçon ſoit diminué non-ſeulement de la quantité des parties ſolides qu'il a fournies pour ſa formation, mais encore de beaucoup de parties de matiere plus liquide qui étoient mêlées parmi elles, & qui ſe ſont évaporées, ſans ce qui peut s'être diſſipé par d'autres voïes. Ainſi on voit qu'il doit reſter aſſez d'eſpace entre cette nouvelle feüille, qui eſt immédiatement appuyée ſous l'ancienne coquille, & le corps de l'animal, pour qu'une nouvelle liqueur puiſſe ſe placer entre deux, & former enſuite une ſeconde couche par la même Méchanique qui a formé la premiere : on raiſonnera de même de la troiſiéme couche, & de toutes celles qui donnent l'épaiſſeur de la coquille.

Les diverſes couches qui compoſent l'épaiſſeur de la coquille deviennent très-ſenſibles, ſi on jette les coquilles dans le feu, & qu'on les en retire après les avoir un peu laiſſé brûler : l'épaiſſeur de la coquille ſe diviſe alors en un grand nombre de differentes feüilles qui ſe ſont un peu éloignées les unes des autres, le feu aïant trouvé des paſſages plus commodes entre ces diverſes feüilles, qu'entre les petites parties qui forment chacune d'elles ; c'eſt auſſi ce qui arrive ordinairement aux corps formés par couches. Toutes les patiſſeries que l'on nomme feüilletées; nous en fourniſſent un exemple vulgaire, mais ſenſible : tout leur art eſt d'être faites de diverſes couches de pâte & de beure poſées les unes ſur les autres ; lorſqu'on les fait cuire, elles ſe diviſent en pluſieurs feüilles, le feu s'ouvrant plus aiſément des chemins ou en trouvant d'ouverts entre ces differentes couches qui ne peuvent jamais être exactement appliquées les unes ſur les autres dans toute leur étenduë.

Les diverſes feüilles peuvent aiſément s'attacher les unes aux autres ſans qu'il doive arriver qu'elles ſe collent auſſi ou corps de l'animal qu'elles couvrent; l'humidité de ſa peau doit l'empêcher; & s'il leur arrivoit de s'y coller legerement, les divers mouvemens qu'il ſe donne dans ſa coquille, ſuffiroient pour les détacher.

C'eſt une ſuite neceſſaire de la maniere dont nous venons de voir que les coquilles des Limaçons croiſſent, qu'elles ne deviennent plus grandes que par l'augmentation du nombre de leurs tours de ſpirale, & que la longueur de chaque tour de la coquille formée reſte toûjours la même; c'eſt auſſi une verité de laquelle il eſt aiſé de ſe convaincre: ſi l'on réduit la coquille d'un Limaçon qui eſt parvenuë à ſon dernier degré d'accroiſſement, au même nombre de tours que celle d'un petit limaçon de la même eſpece; ces deux coquilles alors paroiſſent de même grandeur. J'ai comparé pluſieurs fois des coquilles de Limaçons qui ne faiſoient qu'éclore, ou même que j'avois tirées de leurs œufs avant qu'ils fuſſent éclos, avec d'autres coquilles des plus gros Limaçons de la même eſpece, auſquelles je ne laiſſois que le même nombre de tours de ſpirale qu'avoient ces petites coquilles; & alors elles paroiſſoient égales: au reſte le nombre de ces tours augmente conſidérablement la grandeur de la coquille des Limaçons, & un tour plus ou moins fait une grande difference; car le diametre de chaque tour de ſpirale, ou ſa plus grande largeur, eſt à peu près double de celui qui la précede, & la moitié de celui qui la ſuit; ainſi on voit qu'un demi-tour, ou même un quart de tour plus ou moins, doit conſiderablement augmenter l'étenduë de la coquille; & il n'eſt pas ſouvent aiſé de démêler ſi une coquille fait un quart de tour plus ou moins. De ſorte que pour remarquer fort diſtinctement qu'une coquille fait plus ou moins de tours qu'une autre coquille de même eſpece, il eſt néceſſaire de comparer de groſſes coquilles de cette eſpece avec de très-petites de la même eſpece, & alors la difference des tours devient fort ſenſible.

Fig. IV.

Tout ce que nous avons dit jusques ici de l'accroissement des coquilles, nous exempte d'entrer dans le détail de leur premiere formation. Car on conçoit aisément que lorsque le corps d'un petit embrion, qui doit un jour remplir une grosse coquille, est parvenu à un certain état, dans lequel les diverses peaux qui l'envelopent ont assez de consistance pour laisser échaper par leurs pores la seule liqueur propre à former la coquille ; on conçoit, dis-je, que cette liqueur va se placer sur ces peaux, qu'elle s'y épaissit, qu'elle s'y fige, en un mot, qu'elle y commence la formation de la coquille de la même maniere qu'elle continuë son accroissement. Les Limaçons ne sortent point de leurs œufs sans être déja revêtus de cette coquille, qui a alors un tour de spire & un peu plus.

Il me reste à éclaircir deux difficultez, qui pourroient paroître considerables : la premiere naît naturellement des Experiences que j'ai rapportées ; voici en quoi elle consiste. Le nouveau morceau de coquille qui se forme pour boucher le trou qu'on a fait à la coquille du Limaçon, est ordinairement de couleur blanchâtre, & par consequent très-differente de celle du reste de la coquille : d'où il semble qu'il doit être d'une differente tissure, & on en pourroit conclure avec quelque apparence qu'il n'est pas formé de la même maniere que le reste de la coquille ; ainsi les experiences précedentes ne décideroient rien pour leur accroissement ordinaire. Pour répondre à cette difficulté, il est nécessaire d'expliquer d'où naît la réguliere varieté des couleurs de certaines coquilles ; les mêmes experiences qui en fourniront la cause, serviront à dissiper entierement cette difficulté.

Cette varieté réguliere de couleurs est sur tout remarquable dans une petite espece de Limaçons des jardins ; le fond de leur coquille est blanc, citron, ou jaune, ou d'une couleur moïenne entre celles-ci. Differentes raïes paroissent tracées sur ce fond, elles tournent en spirale comme la coquille, dans quelques-unes ces raïes sont noires, dans d'autres brunes, quelquefois rougeâtres. La

FIG. V. VI.

largeur de chacune de ces raïes s'augmente insensiblement en s'approchant du côté de l'ouverture de la coquille : il arrive même quelquefois que deux de ces raïes s'étendent assez pour se rencontrer, & ne faire qu'une seule raïe dans la suite ; quelques coquilles ont jusques à cinq ou six de ces raïes, d'autres n'en ont que trois ou quatre, même deux ou une seule : on peut aussi remarquer diverses raïes brunes & blanches sur les gros limaçons des jardins ; mais elles frappent moins, & il faut les regarder avec quelque attention pour les démêler les unes des autres : les Limaçons de l'une & de l'autre espece n'ont pas toutes ces raïes de même largeur dans le même endroit de la coquille.

Il ne paroît qu'une seule maniere vrai-semblable de rendre raison de la varieté de ces couleurs dans le sistême que nous avons établi de l'accroissement des coquilles par *juxtaposition* : car aïant regardé la peau de l'animal comme une espece de crible qui donne passage aux particules qui servent à former la coquille, il est clair que si l'on conçoit que cette peau est differemment percée en divers endroits, ou (ce qui revient au même) qu'elle est composée de differens cribles dont les uns laissent passer de petites parties differentes en figure, ou de differente nature de celles qui passent par les autres, & ferment le passage à celles-cy ; il arrivera que ces petites parties de figure, ou de nature differente, seront propres à former des corps qui réfléchiront differemment la lumiere, c'est-à-dire, qu'elles formeront des morceaux de coquille de diverses couleurs.

C'est aussi une suite necessaire de la maniere dont croît la coquille du Limaçon, que tout le contour de cette coquille (je ne dis pas toute son épaisseur) soit formée par le colier du Limaçon parce qu'il est la partie la plus proche de la tête, & que par conséquent pour peu que l'animal croisse, il cesse ce colier d'être couvert par l'ancienne coquille : c'est donc toûjours à lui à l'étendre, & on peut le regarder comme l'ouvrier de tout le contour de la co-

quille; ainſi il ſuffira que ce colier ſoit compoſé de differens cribles pour former une coquille de differente couleur : s'il a, par exemple, deux ou trois petits cribles propres à laiſſer paſſer les parties noires ou brunes, & que les côtés de ces cribles ſoient paralleles entr'eux, pendant que le reſte de ſa ſurface laiſſe échaper toutes les petites parties de matiere propres à réfléchir la lumiere de telle ſorte qu'elle faſſe apercevoir une couleur de citron; la coquille qui ſera formée par les petits corps qui ont paſſé par ces differens cribles, ſera elle-même de couleur d'un fond citron avec des raïes noires ou brunes, preſque paralleles ou qui s'approcheront les unes des autres inſenſiblement, & deviendront plus larges dans la même proportion que ces cribles ſeront augmentez.

Quand nous ne verrions rien de ſemblable aux differens cribles dont je viens de parler ſur le colier du limaçon, ils nous fourniſſent une explication ſi probable de la varieté des couleurs des coquilles, qu'il ſeroit neceſſaire de les y ſuppoſer; mais heureuſement ils ſe découvrent eux-mêmes, ſur tout dans la petite eſpece de limaçon ſi remarquable par ſes raïes diſtinctes. Lorſqu'on a dépoüillé un de ces Limaçons d'une partie de ſa coquille, tout le reſte du corps paroît d'une couleur aſſez blanche, au colier près dont le blanc tire un peu plus ſur le jaune, & qui outre cela eſt marqué d'un nombre de raïes noires ou brunes égal à celui des raïes de la coquille, & poſées dans le même ſens; ainſi les Limaçons qui n'ont qu'une raïe noire ſur leur coquille, n'ont auſſi qu'une tache noire ſur leur colier; ceux qui ont quatre raïes ſur la coquille, en ont auſſi toûjours quatre ſur le colier : ces raïes ſont placées immédiatement ſous celles de la coquille; elles commencent à une ligne quelquefois, ou environ de l'extrémité du colier qui eſt auſſi ordinairement elle-même tachetée de noir tout autour. La longueur de ces raïes du colier eſt differente dans differens Limaçons de même eſpece, on ne peut méconnoître les cribles dont j'ai parlé en remarquant ces raïes, leur differente cou- FIG. V.

leur prouve la difference de leur tiſſure.

Pour ne pouvoir plus douter que ces taches ne faſſent la fonction de cribles differens de ceux du reſte du colier, & que le reſte du colier qui paroît auſſi de couleur differente du reſte de la peau du corps entier, laiſſe auſſi échaper des particules d'une figure, ou d'une nature differente; il ne s'agit que de ſçavoir ſi l'expérience s'accommode avec ces raiſonnemens; & il ne faut pour cela que laiſſer réparer au Limaçon la coquille qu'on lui a enlevée : car s'il arrive que ce qui ſe forme de coquille vis-à-vis ces raïes noires ſoit noir, & que ce qui eſt formé entr'elles ſoit d'une couleur differente de ce qui s'eſt formé ſur ces raïes & ſur le reſte du corps, il doit paroître inconteſtable que ces differens endroits ſont les fonctions qu'on leur a attribuées. Or l'experience ſe trouve parfaitement d'accord

FIG. VI. avec le raiſonnement précédent : la coquille qui croît ſur le colier vis-à-vis les raïes brunes ou noires, eſt elle-même noire ou brune; celle qui ſe forme entre ces raïes, eſt blanche ou citron, & celle qui vient ſur tout le reſte du corps, eſt blanche, mais d'un blanc different de celle du colier lorſqu'elle eſt blanche auſſi. La même choſe arrive aux gros Limaçons des jardins : toute la coquille qui ſe forme ſur leur colier, eſt brune ou de couleur ſemblable à celle de l'ancienne; & la coquille qui vient ſur le reſte de leur corps, eſt blanche.

Il eſt bon de diſſiper à preſent un autre ſcrupule qui pourroit naître à ceux qui tenteroient les mêmes expériences que j'ai rapportées. Il arrive quelquefois que la nouvelle coquille qui ſe forme vis-à-vis le colier en la place de celle qu'on a ôtée, n'eſt pas de même couleur que l'ancienne, il ſemble pourtant par l'explication & les eperiences que je viens de rapporter, que cela ne devroit pas arriver.

Cette eſpece d'irregularité paroîtra moins difficile à concilier avec les raiſonnemens & les experiences précédentes, lorſqu'on fera attention que la nouvelle coquille formée vis-à-vis le colier, n'eſt jamais de couleur diffé-

rente de celle de l'ancienne, à moins que sa surface exterieure ne soit extrémement raboteuse, & qu'elle ne represente plusieurs sillons, au lieu que celle du reste de la coquille est assez polie.

L'inégalité de cette surface de la nouvelle coquille est causée par les mouvemens que le Limaçon se donne lorsqu'il veut rentrer dans sa maison, avant que la nouvelle coquille ait assez d'épaisseur pour se soûtenir, sans s'appuïer sur lui; car il est aisé de comprendre que s'il se retire ainsi, lorsqu'il n'y a encore qu'une ou peu de feüilles formées du nouveau morceau de coquille, il raprochera l'extrémité de ces feüilles trop minces encore pour pouvoir se soûtenir, de l'ancienne coquille; & que les réduisant à un moindre espace, il leur fera faire differens plis, ce qui pourroit presque seul suffire pour changer la couleur de la nouvelle coquille: mais il est quelque chose de plus; c'est que la premiere couche qui se forme lorsqu'on a enlevé un grand morceau de coquille est ordinairement blanche, les parties de liqueur propres à former la coquille de cette couleur sortant plus aisément par les pores qui leur donnent passage, que ne font celles qui forment la coquille d'une autre couleur; ce qui est assez visible, le reste du corps de l'animal étant couvert de liqueur d'une matiere très-sensible, avant qu'on en apperçoive sur son colier, d'où il arrive que cette liqueur s'étend sur le colier & y produit une premiere couche de coquille blanche; mais comme cette couche est extrêmement mince, elle est aussi transparente & ne suffit pas ordinairement pour empêcher la coquille que le colier lui-même a produit ensuite, de paroître de la couleur qui lui est naturelle. Or s'il arrive que le Limaçon rentre dans sa coquille lorsqu'il n'y a encore que cette premiere couche blanche de produite, on voit clairement qu'il raprochera les extrémités de cette couche l'une de l'autre, parce qu'elle lui est adherente en quelques endroits, qu'il lui fera faire differens plis, & augmentera son épaisseur en diminuant sa largeur & sa transparence; ce qui rendra

la nouvelle coquille d'une couleur moïenne entre celle qui est ordinairement formée sur le colier, & celle qui est formée sur le reste du corps : mais la surface interieure du nouveau morceau de coquille qui est toûjours polie, doit aussi toûjours être de la couleur de celle que doivent former les pores qui lui correspondent ; aussi paroît-elle de couleur variée de la même maniere que celle de l'ancienne coquille, lors même que la surface exterieure n'a pas la couleur qui semble lui être naturelle.

On concluoit mal, si l'on concluoit de ce que nous venons de dire de la formation des raïes qui parent certaines especes de coquilles, que la surface exterieure de toutes les coquilles devroit être raïée, ou d'une couleur uniforme, & qu'il ne devroit point y en avoir de ces coquilles dont la surface exterieure fût marquée de diverses taches posées differemment, de figure irréguliere, séparées les unes des autres par des intervalles inégaux, telle qu'est la coquille de la figure 7e, & cela fondé sur ce que ces taches ne peuvent être produites sur la surface de la coquille, sans qu'il y ait sur le collier de l'animal qui l'habite, des especes de petits cribles qui laissent passer une liqueur differente de celle qui passe par les autres endroits, & par conséquent sans que cet animal ait tout ce qui est necessaire pour produire une coquille rayée. Car il est aisé de voir, qu'il faut que ces cribles subsistent pendant l'entiere formation de la coquille, afin de rendre cette coquille raïée dans toute son étenduë ; mais s'il arrive au contraire que ces cribles changent, c'est-à-dire, que si les pores qui laissent échaper de la liqueur propre à former une coquille de couleur brune, deviennent trop larges ou trop étroits, ou changent en quelqu'autre façon de figure, après avoir filtré une certaine quantité de cette liqueur, & ceux qui donnoient passage à la liqueur qui forme la coquille blanche, changent aussi de configuration, il arrivera aussi alors que la coquille qui se formera, sera marquée de diverses taches noires & blanches combinées avec la même irregularité que s'est fait le changement des cribles.

Ceci

Ceci ne paroîtra pas une ſuppoſition purement gratuite, à ceux qui voudront faire attention qu'il arrive même quelques changemens aux cribles du colier des Limaçons qui produiſent les coquilles raïées ; car on peut remarquer que quelques-unes de ces coquilles ont des raïes très-marquées & d'une couleur très-vive vers leur ouverture, pendant qu'on n'apperçoit aucune de ſes raïes ſur les premiers tours de la ſpirale, c'eſt-à-dire, ſur ceux qui ſont les plus proches du ſommet de la coquille, ou qu'on les y voit ces raïes marquées très-foiblement. Or ce changement de couleur ne peut être arrivé que par un pareil changement dans les cribles du colier. Il faut à la vérité imaginer des changemens bien plus conſiderables ſur le colier des animaux qui habitent des coquilles telles que celle de la figure 6e, mais ces changemens ſont également poſſibles.

La fluidité de la liqueur qui ſert à former la coquille, a peut-être auſſi quelque part à la diſtribution irréguliére des couleurs que l'on voit ſur quelques eſpeces. Car il eſt aiſé de concevoir que ſi certains animaux laiſſent échaper pour la formation de la coquille, une liqueur aſſez fluide & qui coule aiſément d'un endroit ſur un autre, il pourra ſe former des coquilles marquées irrégulierement s'ils ont des cribles ſur leur colier qui laiſſent paſſer des liqueurs differentes ; puiſqu'il arrivera ſouvent alors que la liqueur ne reſtera pas vis-à-vis l'endroit par où elle eſt ſortie, & que ce qui eſt ſorti de liqueur propre à faire de la coquille blanche, ira ſe poſer ſur l'endroit d'où eſt ſorti la liqueur qui fait la coquille noire ; comme auſſi celle qui fait la coquille noire, coulera peut-être ſur l'endroit où eſt ſortie quelqu'autre liqueur qui fait la coquille blanche. Or comme cela arrivera irregulierement ſelon les diverſes poſitions plus ou moins inclinées dans leſquelles ſera l'animal lorſque la coquille ſe forme, ces taches ſeront auſſi poſées d'une maniére irréguliere.

Il faut pourtant avoir recours à la 1re des deux cauſes dont nous venons de parler ; c'eſt-à-dire, au changement

de la tiſſure des cribles du colier, pour expliquer la réguliere poſition des taches rouges, de figure quarrée ou rectangle, qui ornent la coquille repreſentée fig. 8e, étant néceſſaire pour la former telle, que les cribles de figure quarrée ou rectangle, qui laiſſent paſſer la liqueur propre à colorer ainſi la coquille, ſe bouchent & ſe débouchent dans une certaine proportion.

Quoique le colier du Limaçon trace tout le contour de la coquille, & que cela ſuffiſe pour lui donner les couleurs diſtribuées régulierement, il ne lui donne pas cependant toute l'épaiſſeur qu'elle peut avoir, de petites parties de liqueur qui s'échapent par les pores du reſte de la peau, l'augmentent cette épaiſſeur, c'eſt de quoi on ne peut douter; car ſi l'on réduit la coquille d'un gros Limaçon au même nombre de tours que celle d'un petit, elles paroiſſent également grandes, mais celle du grand paroît plus épaiſſe. Cette augmentation de l'épaiſſeur de la coquille eſt ſur-tout remarquable dans quelques eſpeces de coquilles de mer tournées en ſpirale, elle devient quelquefois telle que les premiers tours de la coquille ſe bouchent enfin abſolument, & que la queuë de l'animal qui les habite eſt obligée de ſe placer dans des tours plus éloignés, ce qu'on peut voir d'une maniere très-ſenſible dans des coquilles que M. Mery a diſſequées avec beaucoup d'adreſſe. La fig. 8e repreſente une de ces coquilles; les eſpaces marqués *aaa* occupés autrefois par le corps de l'animal, y ſont devenus entierement ſolides.

La queuë de l'animal n'étant point adherante au ſommet de la coquille, comme quelques-uns l'ont crû, il lui eſt aiſé de ſe placer, ſur-tout dans le tems que l'endroit par lequel l'animal eſt attaché à la coquille, change (car cet endroit change ſelon que le corps de l'animal fait plus ou moins de ſpires): un petit Limaçon, par exemple, y ſera attaché par une partie du premier tour de ſa ſpire; & lorſqu'il ſera devenu plus gros, il n'y ſera attaché que dans le 2e tour.

Les dernieres couches qui ſont produites par la peau

qui ne couvre pas le colier du Limaçon doivent être blanches, ſelon tout ce que nous avons dit juſques ici, auſſi le ſont-elles ; ce que l'on voit aiſément ſi on ſe donne la peine d'uſer avec une lime les premieres couches de la ſurface extérieure de ces coquilles, celles qui reſtent alors paroiſſent blanches ; ou ſans ſe donner ces mouvemens, ou peut s'aſſurer de la même choſe, en faiſant attention que les couleurs des coquilles vuides que l'on trouve dans les jardins, ſont ſouvent très-effacées, & que dans quelques endroits mêmes elles paroiſſent blanches, les premieres couches qui ſont ſeules colorées aïant été enlevées par de fréquens frottemens contre la terre.

L'accroiſſement des coquilles étant proportionné à celui des animaux qui les habitent, ſe fait d'une maniere preſque inſenſible ; on peut néanmoins dans la plûpart des coquilles diſtinguer aſſez aiſément leurs divers degrés d'accroiſſement : ils ſont marqués par diverſes petites éminences paralleles entr'elles, qu'on prendroit volontiers pour les fibres de la coquille : ces éminences regnent ſur tout le contour de la coquille dans celles qui ſont plattes ou de deux pieces, & ſur la largeur dans celles qui ſont tournées en ſpirale. Pour peu qu'on faſſe attention à la maniere dont nous venons de voir que les coquilles ſe forment, on remarquera aiſément qu'elles ne peuvent croître ſans laiſſer paroître les petites éminences dont je viens de parler : car chaque nouveau petit morceau de coquille doit être immédiatement collé ſous celui qui le précede, qui par conſéquent ſera plus élevé que celui-ci de toute l'épaiſſeur qu'il avoit, lorſque l'accroiſſement de l'animal a donné l'origine à ce dernier, ſous lequel doit auſſi être poſé le morceau qui eſt produit enſuite. Ainſi la coquille doit être remplie d'un grand nombre de petites éminences paralleles entr'elles ; on les voit fort diſtinctement ſur les coquilles des Limaçons, Fig. I.
elles ſont très-proches les unes des autres.

Chaque coquille a ordinairement quelques-unes de Fig. II. XIII.
ces éminences beaucoup plus diſtinctes, que les autres, &

aſſez éloignées, elles marquent les differens tems où la coquille a ceſſé de croître, & ont quelque choſe d'analogue avec les diverſes pouſſes qu'on peut remarquer ſur chaque jet d'arbre. La chaleur de l'été ou le froid de l'hyver arrêtant l'accroiſſement de l'animal qui habite les coquilles, ce que nous voïons arriver aux Limaçons, l'étenduë de la coquille ne peut pas s'augmenter pendant ces ſaiſons; il n'en eſt pas de même de ſon épaiſſeur, car il s'échape continuellement de petites parties de liqueur du corps de l'animal dont elle profite. Ainſi lorſqu'il recommence à croître dans une ſaiſon plus favorable; le nouveau morceau de coquille qu'il produit, ſe colle ſous une coquille beaucoup plus épaiſſe que lorſque ſon accroiſſement ſe fait inſenſiblement; par conſéquent ce premier terme doit être marqué par une plus grande éminence.

Il eſt encore une autre choſe qui rend ſenſibles ſes différens endroits où la coquille a commencé à croître après avoir ceſſé quelque tems; c'eſt un changement de couleur qu'on apperçoit diſtinctement ſur les raïes dont nous avons parlé cy-deſſus: les raïes noires ou brunes ſont dans ces endroits d'une couleur beaucoup plus claire, & même quelquefois peu differente de celle du reſte de la
FIG. II. ſurface ſupérieure de la coquille. La cauſe de ce changement n'eſt pas difficile à trouver pour peu qu'on ſe ſouvienne que les cribles du colier qui laiſſent paſſer la liqueur propre à former ces raïes noires ou brunes, ont leur origine à quelque diſtance de l'extrémité du collier; d'où l'on voit que la premiere couche de coquille qui eſt tracée par l'extrémité de ce colier, doit être de couleur différente de celles des raïes. Mais comme l'accroiſſement de l'animal fait que les raïes du colier ſe trouvent ſous cette premiere coquille, pendant qu'elle eſt encore très-mince, & par conſéquent tranſparente, elle n'empêche point que la coquille qui eſt produite ſous elle ne paroiſſe noire dans les endroits où elle l'eſt: mais lorſque l'animal a ceſſé de croître pendant quelque tems, il aug-

mente alors l'épaiſſeur de cette coquille produite par l'extrémité du colier; de ſorte que la coquille, que les raïes du colier produiſent ſous cette derniere quand l'animal recommence à croître, ſe trouvant poſée ſous un morceau de coquille beaucoup plus épais & moins tranſparent, la couleur de ces raïes y paroît beaucoup moins; & ainſi elle doit être differente dans ces endroits de celle du reſte de la raïe.

La figure de certaines coquilles eſt ce qui pourroit paroître à preſent de plus difficile à concilier avec la maniere dont nous avons vû qu'elles croiſſent. C'eſt auſſi la 2e difficulté que je me ſuis propoſé d'éclaircir. Ce qui me paroît y avoir de plus embaraſſant pour accommoder l'accroiſſement des coquilles par *juxtapoſition* avec leurs figures, peut ſe réduire à quatre choſes. 1°. Comment il ſe peut faire, que la courbure de certaines coquilles change en certains endroits, ou, pour m'expliquer plus clairement, comme peuvent être produites certaines coquilles dont la courbure, après s'être étenduë quelque tems en dehors, revient ſur elle-même. La figure 10e eſt la ſection tranſverſale d'une de ces ſortes de coquilles. On y peut voir qu'après que cette coquille a tourné depuis *a* ſelon les lettres *ccc* juſques en *eee*, elle rebrouſſe chemin en *ddd*. Une ſimple appoſition de parties ſembleroit devoir continuer la même courbure. 2°. Comment ſe produiſent les cornes qu'on voit ſur certaines coquilles. J'appelle cornes, certaines éminences qui ſont ſur quelques eſpeces de coquilles, qui reſſemblent aſſez par leur figure aux cornes de quelques animaux. On les voit ces éminences fig. 9e & 10e marquées par les lettres *ccc*. 3°. De quelle maniere peuvent être produites les canelures qui ornent la ſurface extérieure de certaines coquilles pendant que leur ſurface intérieure eſt polie; car pourquoi ces coquilles ſont-elles plus épaiſſes dans toute leur longueur en certains endroits que dans d'autres: telles ſont celles des fig. 12e, 13e, 14e. 4°. Comment enfin ſe fait une cavité avec laquelle le corps de l'animal ne communique

point & qui regne tout du long de la rampe de la coquille. Elle eſt marquée fig. 2[e] par la lettre *e* qui va la rencontrer par une ligne ponctuée.

Les coquilles des Limaçons terreſtres nous fourniront encore une réponſe à la premiere de ces difficultez. Le dernier degré d'accroiſſement de ces coquilles eſt une eſpece de rebord d'une ligne de largeur ou environ qui tourne en dehors au lieu que le reſte de la coquille tourne en dedans : lorſque ce rebord eſt formé, ces coquilles ne croiſſent plus, c'eſt leur dernier periode. Ceux qui n'auroient point vû de coquille de Limaçons ſans un pareil rebord, paroîtroient conclure avec beaucoup de fondement que ces coquilles ne peuvent être produites par une ſimple juxtapoſition ; car elles devroient alors tourner dans un ſens contraire à celui où elles tournent ; mais lorſque l'on conſidére des coquilles de Limaçons de differens âges, on ne leur veut point de tel rebord, ce qui fait évanoüir toute la difficulté ; car la même choſe arrive ſans doute aux coquilles telle qu'eſt celle de la fig. 10[e]. Ce rebord eſt de la même couleur que les raïes dans les petits Limaçons raïés (*fig. 6.*) auſſi l'extremité du colier eſt-elle de même couleur que la peau qui forme les raïes, comme on peut le voir dans la fig. 5[e].

La courbure de la coquille ne peut changer, que celle du corps de l'animal qui lui ſert de moule ne change: il eſt aiſé d'imaginer des cauſes probables d'un tel changement ; apparemment que dans l'accroiſſement des Limaçons, par exemple, il arrive que les fibres extérieures du colier ne croiſſent pas dans la même proportion que les intérieures, par conſéquent qu'elles retirent le colier du Limaçon vers elles & l'obligent de ſe recourber en dehors.

Comme la difference de la longueur des fibres du colier nous fait aiſément comprendre de quelle maniere il arrive qu'il ſe recourbe en dehors ; auſſi pourrons-nous voir aſſez clairement en faiſant attention à la differente longueur de ſes fibres, comment il peut ſe faire que le

corps de divers animaux tourne en ſpirale. Car ſi l'on conçoit que dès la production de ces animaux les fibres d'une certaine ſurface de leurs corps ſont plus longues que celles de la ſurface qui lui eſt oppoſée ; il eſt clair que le corps ſe recourbera de maniere que la ſurface dont les fibres ſont les plus courtes formera le concave de la courbure, & la ſurface dont les fibres ſont les plus longues formera le convexe. Ce qui ſuffira pour faire décrire au corps de l'animal une ſpirale, parce qu'il ne pourra croître qu'il ne ſe replie toûjours ainſi ſur lui-même, ſi les fibres plus longues & plus courtes croiſſent dans la même proportion. Il eſt vrai que dans le cas dont nous venons de parler, il décriroit ſeulement des ſpirales dont les differens tours ſeroient preſque ſur le même plan, & peu d'animaux ont leur coquille ou le corps qui leur ſert de moule tourné ainſi : les differens tours des ſpirales de leurs corps ou de leurs coquilles ſont ſur differens plans ; mais avec une ſuppoſition de plus, on concevra également comment ſe forment ces dernieres ſpirales. Outre les deux ſurfaces dont nous avons ſuppoſé que les fibres de l'une ſont plus longues que les fibres de l'autre, il faut encore imaginer deux autres ſurfaces directement oppoſées, chacune deſquelles eſt compriſe entre les deux précedentes, mais plus petites qu'elles ; & que ces deux dernieres ſurfaces ſont auſſi formées de telle ſorte que les fibres de l'une ſont toutes plus longues que les fibres correſpondantes de l'autre. Ce qui obligera encore le corps de l'animal de s'incliner d'un côté, & qui fera former à ſon corps des ſpirales tracées ſur differens plans.

S'il arrivoit aux Limaçons terreſtres de produire un rebord ſemblable à celui qui eſt leur dernier terme d'accroiſſement après la formation de chaque quart de tour de ſpirale que fait leur coquille, & que leurs fibres extérieures ſe relâchant après ils produiſiſſent un autre quart de coquille recourbé dans le premier ſens, après quoi ils produiſſent encore un nouveau rebord & ainſi de ſuite ; leur coquille ſeroit d'eſpace en eſpace marquée par de

Fig. XI. XII. pareils rebords qui lui feroient un petit ornement. C'est par un art semblable que sont formées diverses especes de coquilles de Limaçons marins qui paroissent merveilleusement travaillées. Ce sont divers petits rebords de la coquille disposez d'espaces en espaces qui l'ornent de maniere, qu'il semble que la Nature ait pris plaisir à la sculpter.

Fig. IX. X. Les cornes que l'on voit sur plusieurs especes de coquilles, sont aussi produites par la même méchanique que le reste de la coquille. Certains tubercules charnus qui viennent sur le corps des poissons qui les habitent, leur servent de moules, & selon qu'il se forme plus ou moins de ces tubercules pendant que l'animal croît d'un tour de spirale, il y a plus ou moins de ces cornes dans le même tour; elles sont creuses lorsque ces tubercules sont restés sur le corps de l'animal pendant tout le tems qu'il a vêcu. Elles sont en partie creuses & en partie solides, lorsque ces tubercules ne se sont dissipés qu'en partie, & enfin absolument solides lorsque ces tubercules se sont absolument dissipés pendant la vie de l'animal.

On doit ramener à la même formation & à celle des rebords, certaines éminences beaucoup plus petites, que leur figure peut faire nommer assez proprement épines; elles sont ordinairement à la fin des termes d'accroissement sensibles de ces coquilles; ce qu'on peut remarquer fig. 13e.

Les cannelures qui paroissent sur la surface exterieure des coquilles pendant que leur surface intérieure est très-polie, ne donneront pas plus d'embarras à expliquer. Il me suffira de dire que toute l'extrémité du contour du corps de l'animal est cannelée; aussi voit-on la coquille cannelée dans sa surface intérieure jusques à quelque distance de son extrémité. Mais comme le reste de la surface du corps de l'animal qui les habite est polie & molle, l'animal croissant, & la partie de son corps qui n'est pas cannelée venant à correspondre à celle de la coquille qui est cannelée, ce que cette partie fournit pour la coquille

Fig. XII. XIII. XIV.

sert

sert à boucher les cannelures intérieures, & la coquille se trouve seulement cannelée sur sa surface extérieure, excepté les seules premieres lignes de la largeur de sa surface intérieure.

Il est une coquille de mer plate comme les huitres, assez semblable aux coquilles de S. Jacques; dont la formation paroîtroit difficile si nous ne venions de voir comment se font les cannelures des autres coquilles, elle est elle-même cannelée; mais les deux côtés des cannelures sont de petits canaux renfermés de coquilles de tous côtés, & percés depuis le sommet de la coquille jusques à son extrémité; il est aisé de voir comment se forment ces petits canaux; il suffit de concevoir que la premiere extrémité du corps du poisson est profondément cannelée, mais que le reste de son corps est très-uni & d'une substance assez dure pour ne pouvoir pas entrer dans la cannelure formée par l'extrémité; de sorte que le reste du corps produit seulement quelques feüilles de coquilles qui s'appliquent sur cette cannelure sans la boucher intérieurement; ainsi il doit rester un canal tel que nous venons de le dépeindre. FIG. XIV. FIG. XIV.

Avant d'expliquer enfin comment se forme la cavité qui regne tout du long de la rampe de certaines especes de coquilles, & avec laquelle le corps de l'animal ne communique point, il est bon de dire ce que nous entendons par rampe. Pour s'en faire une idée nette, il faut prendre garde, que lorsque le colier de l'animal trace les differens tours de spirale de coquille, que la partie de la surface extérieure qui est la plus proche de l'axe autour duquel il tourne, forme des spirales dont le diametre ou la largeur est plus petite que celle des spirales décrites par d'autres points de ce colier; or on appelle rampe de la coquille cette partie qui est formée par les spirales de la moindre largeur ou des plus petits diametres. La rampe des escaliers peut donner une idée sensible de celle des coquilles.

Pour développer à present le mystére de la formation

du trou qui eſt le long de la rampe, il faut d'abord remarquer que la ſurface ſupérieure du colier de l'animal eſt de figure convexe & ſa ſurface inférieure de figure concave; ce qui eſt évident puiſque la premiere eſt poſée ſous le concave de la coquille, & la ſeconde ſur le
FIG. II. convexe. Or la ſurface ſupérieure du colier étant toûjours découverte par l'accroiſſement de l'animal, c'eſt auſſi toûjours elle qui forme la nouvelle coquille, & la partie de la ſurface ſupérieure de ce colier qui trace des ſpirales des plus petits diametres, eſt auſſi celle qui produit la rampe de la coquille. Si on veut à preſent imaginer que le colier de l'animal s'avance & s'étend pour produire un nouveau morceau de coquille & par conſéquent un nouveau morceau de la rampe; comme l'animal eſt entortillé dans toute ſa coquille, on doit concevoir en même tems qu'une certaine partie de ſon corps s'avance & s'entoure autour d'une partie de la rampe à laquelle elle n'avoit pas encore été appliquée; cette partie qui s'applique ainſi à un nouvel endroit de la rampe eſt celle où la ſurface inférieure du colier fait un angle avec ſa ſurface ſupérieure. Or ſi on imagine que cette partie de l'animal n'eſt ni aſſez courbe ni aſſez flexible pour ſe mouler parfaitement ſur la partie de la rampe où elle s'eſt recemment appliquée, il eſt clair qu'il reſtera un petit eſpace vuide, renfermé entre la rampe, une portion du corps de l'animal, & un petit morceau de l'ancienne coquille qui ſe trouve entre cette portion du corps, & la rampe. La petite partie qui contribuë à renfermer ce trou n'étant pas couverte de coquille, laiſſera échaper de la liqueur propre à la former, & par la production de ce nouveau petit morceau de coquille, le petit trou ſe trouvera entouré de tous côtés, & on voit bien que ce trou doit regner tout du long de la rampe, parce que la coquille ne peut croître ſans qu'il ſe forme.

Si la petite partie qui aide à renfermer le trou, laiſſe échaper de la liqueur très-abondamment, alors il arrivera que le trou deviendra abſolument ſolide étant bou-

ché par la nouvelle coquille. C'eſt auſſi ce qui arrive à pluſieurs coquilles de mer, dont les rampes ſont beaucoup plus épaiſſes qu'elles ne ſembleroient devoir être.

Si la Courbure de la rampe diminuë aſſez pour donner la facilité au corps de l'animal de ſe mouler deſſus, lorſque cette coquille a fait un certain nombre de ſpires; il eſt clair qu'il ne doit plus alors ſe former de trou, & que celui qui eſt formé doit ſe boucher vers ſa ſurface ſupérieure. C'eſt auſſi ce qui arrive aux Limaçons qui ſont parvenus à leur dernier degré d'accroiſſement; ou dont le rebord de la coquille eſt formé, ce qu'on peut voir dans la fig. 6ᵉ. La petite coquille qui y eſt repreſentée a un rebord marqué *bbb*, & le trou qui paroîtroit en *e* ſi elle n'étoit pas parvenuë à ſon terme d'accroiſſement, eſt bouché à cauſe qu'elle y eſt parvenuë. La même choſe arrive aux gros Limaçons, & on ne voit les trous marqués *e* (*fig.* 2ᵉ. *&* 3ᵉ.) ſur la rampe de leur coquille, que parce qu'ils n'étoient pas parvenus à leur dernier degré d'accroiſſement, ſans quoi ces trous ſeroient couverts par-deſſus comme dans la fig. 6ᵉ.

Lorſque le colier de l'animal trace les differentes lignes ſpirales de la coquille autour d'un petit cône, il eſt clair qu'il doit reſter un petit eſpace vuide de figure conique au milieu de la coquille, c'eſt-à-dire qu'on doit voir un petit eſpace vuide autour duquel ſont poſés les divers tours de la coquille. Pluſieurs eſpeces de coquilles de mer, (telle eſt celle de la fig. 7.) & diverſes eſpeces de Limaçons terreſtres ont une pareille couverture coniques.

Si le ſommet du cône autour duquel le colier de l'animal tourne eſt à l'origine de la coquille, on voit bien que ce trou doit ſe terminer à la pointe de la coquille qui le bouche en cet endroit; telle eſt le trou des coquilles de Limaçon dont je viens de parler & de celui de la fig. 7. il finit où la coquille commence; mais ſi le ſommet de ce cône eſt par-delà l'origine de la coquille, elle doit être entierement percée; pluſieurs coquilles de mer ſont faites de cette derniere maniere.

Enfin si l'on conçoit que le colier de l'animal tourne autour d'un solide de figure courbe au lieu du cône dont nous avons parlé cy-dessus, & que le sommet de ce solide soit à l'origine de la coquille, il est encore évident qu'il se formera dans la coquille un trou de la figure de ce solide.

Si l'animal qui habite une pareille coquille, forme tout du long de la rampe de cette coquille un trou tel que les gros Limaçons des jardins en forment un le long de la leur, comme nous l'avons vû cy-dessus; cette coquille sera percée de deux trous differens dans toute sa lon-
FIG. X. gueur, & aura deux longues ouvertures avec lesquelles le corps de l'animal ne communiquera point.

Ces deux trous peuvent aussi quelquefois être produits de la même maniere que celui qui regne le long de la rampe, il n'est besoin pour le concevoir que d'imaginer que la partie qui occupe ensuite la place de celle qui a formé le trou, parce qu'elle ne pouvoit pas se mouler sur la rampe, que la partie, dis-je, du corps de l'animal qui succéde à celle-ci, ne peut pas exactement se mouler sur la coquille qu'elle a produite.

Un long ouvrage suffiroit à peine pour épuiser tout ce que les figures des coquilles ont de singulier; mais je me suis prescrit des bornes plus étroites, & je l'ai fait d'autant plus volontiers qu'on peut toûjours amener la formation de ce qu'elles ont de plus extraordinaire à celle de quelques-unes des choses dont nous venons de parler.

EXPLICATION DES FIGURES.

LA Figure 1re représente une coquille de gros Limaçon de jardin qu'on a cassée en deux endroits differens. Les lettres *aaa* marquent le contour des trous qu'on lui a faits. On y voit ces trous bouchés par de nouveaux morceaux de coquille posés immédiatement sous l'ancienne. Il est à remarquer que cette nouvelle coquille n'est pas colorée comme l'ancienne, qu'elle n'a pas aussi diverses

petites lignes, qu'on peut appeller, quoiqu'improprement à cause de leur figure, fibres de la coquille, lesquelles fibres sont distinctement marquées sur l'ancienne.

Fig. 2e. Les lettres *aaa* marquent le contour d'une ouverture faite à la coquille. *i* est un morceau de peau de cannepin, appellée vulgairement Peau de poule, qui bouche cette ouverture cette peau est collée à la surface interieure de la coquille. *b* represente la nouvelle coquille qui s'est formée sur la surface du cannepin qui touchoit le corps du Limaçon.

d d est le contour de l'ouverture de la coquille qui n'est point rebordé comme celui de la fig. 1re.

e marque par une ligne ponctuée l'ouverture d'un trou qui regne tout du long de la rampe de la coquille jusques à son sommet, ou sa pointe *p*.

c c est un des termes notables de l'accroissement de la coquille. On y voit les raïes presque interrompuës ou foiblement tracées.

Fig. 3e. est la coquille d'un gros Limaçon de jardin, dont le contour de l'ouverture alloit jusques en *a*, mais qu'on a cassée de maniere en suivant tout le tour de cette ouverture qu'elle a été terminée par les lettres *bcc*. *ccc* est un morceau de cannepin, qui paroît ici collé sur la surface extérieure de la coquille, mais qu'on doit aussi concevoir collé sur la surface intérieure de la même coquille; de façon qu'il envelope tout le bord de la coquille, qui est par conséquent renfermé entre les deux extrémités de ce morceau de cannepin. *e d d d q* marquent la nouvelle coquille qui a été produite, qui a été séparée de l'ancienne par l'épaisseur de la peau du cannepin sur laquelle elle est appliquée.

Fig. 4e. represente la coquille d'un petit Limaçon, qui est sorti de son œuf depuis peu de tems.

Fig. 5e. est celle d'un petit Limaçon de jardin qui porte une coquille, sur laquelle sont peinte cinq raïes noires ou brunes; les intervalles qui sont entre ces raïes sont de couleur citron. Ce Limaçon paroît dépoüillé d'une partie

de sa coquille qui alloit autrefois jusques en *a a a* , & qui est à present terminée en *bb*, ce qu'on a fait à dessein de faire voir le colier de ce Limaçon, qui est aussi lui-même marqué de cinq raïes *c c c c c* de couleur brune, mais moins foncée que celle de la coquille : l'origine de ces raïes est à quelque petite distance de l'extrémité du colier ; & elles n'ont ordinairement qu'une ligne ou deux de longueur. L'espace qui est entre ces raïes, & celui qui est entre leur extrémité la plus proche du bord du colier & ce même bord de colier *aa*, est de couleur beaucoup plus claire que celle des raïes, mais aussi plus brune que celle du reste de la peau, qui est depuis l'extrémité des raïes *c c c c c* la plus éloignée de *aaa* jusques au sommet *p* de la coquille.

Le bord *a a a* du colier de l'animal est de couleur un peu brune.

Fig. 6e. est aussi une coquille raïée, mais qui avoit seulement trois raïes. On a fait deux trous à cette coquille, dont le plus éloigné du colier est marqué *a*, & le plus proche *dcc*. La coquille qui s'est formée pour boucher le trou *a* est de couleur differente de celle des raïes & de celle de leurs intervalles Mais celle qui a bouché le trou *dcc* est de même couleur que l'ancienne ; ensorte que les raïes noires sont continuées en *cc*, & que *d* est de couleur citron. Ce dernier trou est pourtant peint ici un peu moins près qu'il ne devroit être du bord de la coquille.

b b b marquent le rebord de cette coquille, qui étoit parvenuë à son dernier degré d'accroissement. Ce rebord est de couleur brune ; aussi a-t-on vû (*fig.* 5e) que l'extrémité du bord du colier de l'animal est brun. L'origine des raïes de la coquille n'est point à ce rebord, comme l'origine des raïes du colier (*fig. précedente*) n'est point à l'extrémité de ce colier.

e marque la coquille qui bouche alors la cavité qui est le long de la rampe.

Fig. 7e. represente une coquille appellée la Veuve ; elle est marquée de diverses taches noires, de figures irrégu-

lieres, & posées irrégulierement sur un fond blanc.

On voit en *a* un trou qui va jusques au sommet de la coquille. Ce trou est formé bien differemment de celui des fig. 2e & 7e.

Fig. 8e. est une espece de turbinites, sur laquelle on voit divers petits quarrés qui sont de couleur rouge, disposés dans une proportion assez réguliere.

Fig. 9e. est la coupe d'une coquille, dont la queuë de l'animal a été obligée d'abandonner les premiers tours, parce qu'ils sont devenus entierement solides. Les lettres *a a a a a a* marquent les espaces qui étoient autrefois occupés par le corps de l'animal, & qui se sont remplis dans la suite. On voit aussi qu'une partie de l'espace *e b* est devenuë solide, sçavoir celle qui est marquée *e*, le corps de l'animal n'occupoit plus que les espaces *bb*, *d d d d d*, &c.

c c c c sont de ces éminences de coquilles que j'ai appellées cornes, ou des coupes de ces éminences.

Fig. 10e. est la coupe transversale d'une coquille, qui après avoir fait un certain nombre de tours de spires jusques en *c c c c* dans un sens, rebrousse chemin en *ddd*.

a a sont deux trous qui sont dans toute la longueur de la coquille, avec lesquels le corps de l'animal ne communique pas, qui occupe les espaces *bbb* &c.

c c c sont des éminences ou petites cornes.

Fig. 11e. est une espece de turbinites qui paroît artistement travaillée. Cet ornement lui vient de divers rebords tels que le dernier *a a a* disposés d'espace en espace.

Fig. 12e. a aussi divers rebords comme la précédente. Mais on peut remarquer de plus que chacun de ces rebords est cannelé.

b b est la surface intérieure de la coquille, qui est polie, quoique les rebords soient cannelés.

Fig. 13e. est une coquille dont la surface extérieure est cannelée, quoique sa surface intérieure soit polie.

cc, *ccc*, *ddd*, sont trois termes d'accroissemens très-sensibles, dont le dernier *dddd* est orné de diverses petites éminences que j'ai nommées points à cause de leur figure.

Fig. 14ᵉ. eſt auſſi une coquille cannelée, mais qui a cela de particulier, que chacun des côtés des cannelures ſont eux-mêmes de petits canaux, c'eſt-à-dire qu'il reſte des eſpaces vuides au milieu de ces côtés dans toute leur longueur, & que ces trous ſont entourés de coquille de maniere que le corps de l'animal n'entre point dedans. On a ouvert un de ces canaux marqués *b*, *dd*, *aa*, *cc*. On voit que la ſurface intérieure *dd*, qui eſt appliquée ſur le corps de l'animal, ſe termine en *aa*, c'eſt-à-dire que ces longs trous ne ſont pas renfermés depuis *a a* juſques à l'extrémité *cc* dans laquelle le corps de l'animal entre.

CONJECTURES

ET REFLEXIONS

Sur la matiere du Feu ou de la Lumiere.

PAR M. LEMERY le fils.

1709. 13. Novemb.

LA matiere du Feu eſt le premier & le plus puiſſant diſſolvant des corps terreſtres; nous n'avons aucun agent qui y pénetre auſſi profondément, & qui en déſuniſſe auſſi parfaitement les ſubſtances eſſentielles.

C'eſt donc à cette matiére que le Chimiſte eſt redevable des ſecrets qu'il arrache à la Nature, & qu'elle ne lui reveleroit jamais, ſi elle n'étoit forcée, & miſe pour ainſi dire, à la queſtion par un diſſolvant auſſi actif.

Une matiere qui contribuë ſi fort à nous faire connoîtres les autres corps, mérite bien de nous occuper à ſon tour, & d'exciter notre curioſité ſur les proprietés qui lui ſont particulieres.

On ne peut diſconvenir qu'elle ne ſoit le principe véritable de la chaleur, de la lumiere, & même de la fluidité ou de la fuſion de pluſieurs corps terreſtres, qui ſans le mélange & l'action de cette matiere, conſerveroient toûjours une forme ſolide. Mais elle n'eſt pas toûjours

aſſez

Fig. 2.

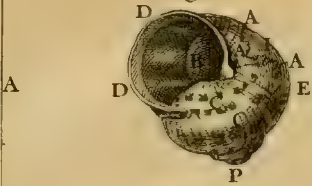




Fig. 3.

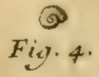


Fig. 4.

Fig. 5.

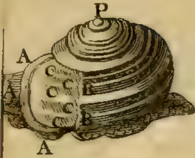


Fig. 6.

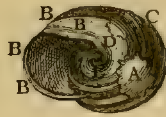


Fig. 7.



Fig. 8.




Fig. 1.
A
A
A
A
B
B
B

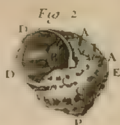
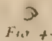
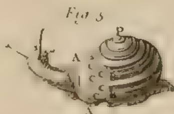

Fig. 2
D
A
A
D
E
P


Fig. 3
D
C
C
D
B
B


Fig. 4.


Fig. 5
P
A
A

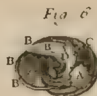

Fig. 6
B
B
C
B
B
A


Fig. 7
A


Fig. 8



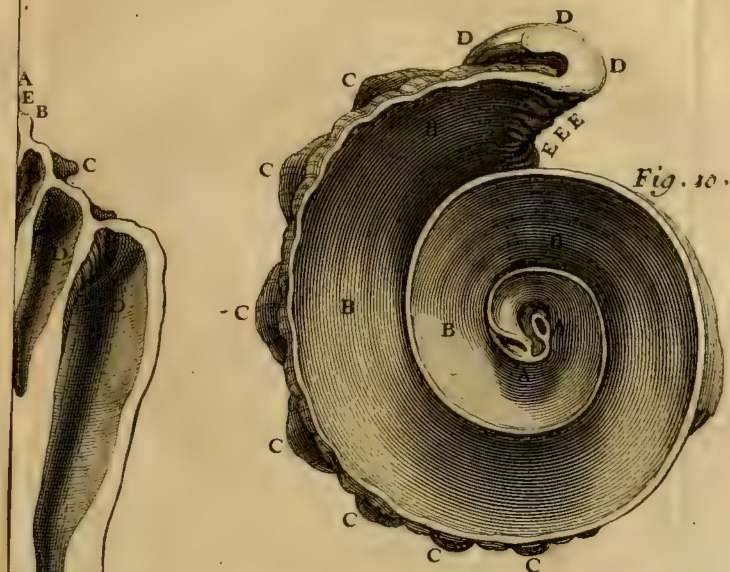


Fig. 10.



Fig. 12

A
A

Fig. 11.

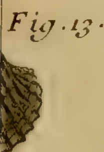


Fig. 13.

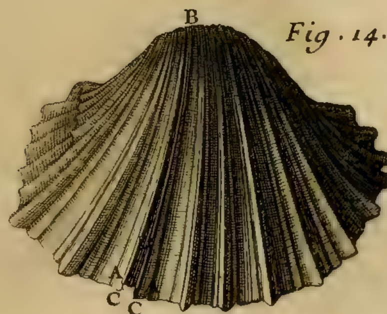
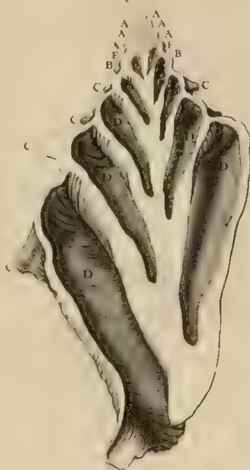


Fig. 14.


Fig. 9

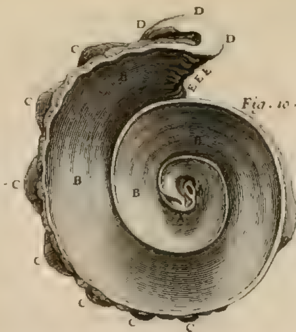
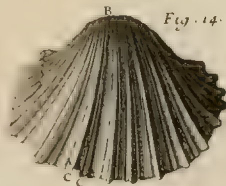

Fig. 10.


Fig. 11


Fig. 12


Fig. 13


Fig. 14.

aſſez abondante, ou elle ne trouve pas toûjours des corps qui lui réſiſtent aſſez peu pour les mettre ſi facilement en fuſion; on remarque même ſouvent qu'au lieu de les fondre, ou de les entretenir dans la fluidité qu'elle leur avoit d'abord communiquée, elle s'y engage & s'y envelope de maniere qu'elle y demeure emprisonnée, & qu'elle n'en ſort que quand une cauſe étrangere vient à ſon ſecours, & ouvre exterieurement les cellules qui la retenoient.

Il y a encore deux circonſtances remarquables dans cette matiere enfermée; c'eſt 1°. qu'elle augmente quelquefois très-ſenſiblement la peſanteur du corps qui la contient; & en ſecond lieu, qu'elle conſerve pendant tout le tems de ſa captivité, les proprietez particulieres de matiere de feu, dont elle donne des marques évidentes quand on la met en état de s'échaper de ſa priſon, & d'aller faire ſon impreſſion ſur quelqu'autre corps.

Tout le monde ne convient pas de ce que je viens d'attribuer à la matiere du feu. On prétend même que ce ſentiment répugne à l'idée qu'on doit avoir de ce qui conſtituë la nature propre de cette matiere; cependant il eſt appuïé ſur tant & de ſi ſolides experiences que pluſieurs Chimiſtes du premier ordre n'ont pû ſe diſpenſer de l'adopter. Pour donner un nouveau jour à ce ſentiment, & avoir un plus grand droit de le mettre en œuvre pour l'intelligence de quelques phénoménes que j'entreprens d'expliquer dans ce Memoire-cy & dans d'autres; je vais en rapportant les expériences qui lui ſervent de fondement, répondre aux objections par leſquelles on tâche de le détruire, & qui malgré toute la vrai-ſemblance que les experiences lui donnent, ont encore aſſez de force pour faire douter de ſa verité.

Tout le monde ſçait que quand on expoſe au feu pluſieurs matieres métalliques telles que le Régule d'Antimoine, le Plomb, l'Etain, & même le Mercure, quoique pluſieurs de ces matieres perdent beaucoup de leur propre ſubſtance qui s'échape en l'air pendant l'operation,

bien loin de peser beaucoup moins qu'auparavant, ce qui sembleroit devoir arriver, neanmoins elles pesent beaucoup davantage. On demande d'où peut provenir cette augmentation de poids, & la matiere du feu aïant réduit ces corps dans l'état de la calcination où nous les voïons, ne doit-on pas aussi lui attribuer la pesanteur nouvelle qu'ils acquierent?

Peut-être me dira-t-on, que cette augmentation de poids vient des acides du bois ou du charbon qui se sont introduits dans l'intérieur de ses corps à la faveur des parties de feu, & qui y sont restez pendant que les parties de feu s'en sont échapées.

Mais il est bien difficile que ces acides parviennent en assez grande quantité jusqu'au corps mis en calcination, pour y produire toute l'augmentation de poids qu'on y découvre ensuite, & qui va quelquefois à un dixiéme comme M. Homberg l'a remarqué. Et en effet avant que ces acides atteignent la matiere exposée au feu, il faut qu'ils traversent les parois du vaisseau qui contient cette matiere, & qui certainement ne donne pas un passage libre à ces acides, puisque les vaisseaux dont on a coûtume de se servir dans ces sortes d'operations pourroient contenir les plus forts acides sans les laisser échaper au travers de leurs pores. Si donc malgré la difficulté du passage quelques acides du bois trouvent le secret de traverser à la faveur des parties de feu, les pores dont il s'agit, cette même difficulté est une preuve, qu'ils passent en petit nombre, & même que la plus grande partie de ces acides est arrêtée, & retenuë par les parties même du vaisseau qui ordinairement est d'une nature à les pouvoir absorber. La matiere du feu au contraire passant librement & en abondance au travers de toute sorte de vaisseaux comme l'expérience le démontre; c'est particuliérement sur son compte que doit être mise l'augmentation dont il s'agit, & qui étant souvent fort considérable, suppose une cause abondante, & telle que la seule matiere du feu le peut être en cette occasion. Enfin ce qui

prouve encore plus clairement que cette matiere peut augmenter le poids de plusieurs corps en s'y engageant, c'est que si on exposé ces mêmes corps aux rayons du Soleil réünis par le verre ardent, leur pesanteur n'augmente pas moins que s'ils eussent été exposez au feu ordinaire ; or en ce cas-cy on ne peut point avoir recours aux acides du bois & du charbon, & quelque supposition que l'on fasse, il est bien difficile d'ôter à la matiere du feu, la part qu'elle a dans ce phénomene.

Il ne suffit pas d'avoir prouvé que la matiere du feu s'insinuë dans certains corps, & en augmente le poids, il s'agit encore de faire voir que cette matiere en se logeant dans ces corps, ne change point de nature, & y conserve toûjours les proprietez particulieres qui la constituent matiere de feu. La preuve de ce second article me paroît être une confirmation du premier ; car si ce qui s'introduit dans les corps pendant leur calcination, est une matiere veritable de feu, dés qu'on concevra évidemment que cette matiere s'y engage effectivement, & y réside avec les mêmes proprietez qu'elle avoit avant son emprisonnement, on accordera aisément ensuite que c'est elle qui fait la principale augmentation de leurs poids.

La matiere du feu qui s'est engagée dans les corps métalliques, y est si fort cachée & si bien retenuë, qu'elle ne se peut manifester à nous bien sensiblement par aucuns des signes propres qui la font reconnoître, & qui la distinguent de toute autre matiere. La raison en est que pour se faire appercevoir, il faudroit qu'elle forçât les portes de sa prison, & qu'elle vînt faire sur quelqu'autre corps l'impression dont elle est capable. Mais elle est retenuë par des cellules si fortes & si solides, qu'il ne lui faut pas moins qu'un feu de fusion pour détruire ces cellules, & pour dégager les parties du feu qui y étoient enfermées, & qui se confondant avec celles qui les ont tirées de captivité, ne permettent pas au Physicien de verifier leur nature particuliere, & si elles sont effectivement des parties de feu.

Il n'en eſt pas de même de celles qui ſe ſont inſinuées dans les corps pierreux ou ſalins par le ſecours de la calcination : car ces corps étant beaucoup moins ſolides, l'eau ſuffit pour ouvrir exterieurement à la matiere du feu, des iſſuës libres ; & cela parce qu'en choquant rudement les parties de ces corps, non ſeulement elle vient à bout d'en déranger l'union, mais elle les réduit encore en une pouſſiere très-fine qui devient propre à être entierement ſuſpenduë dans le liquide, ſi les corps ſont ſalins ; ou qui s'y ſoûtient en partie ſi les corps ſont pierreux. L'eau de chaux, par exemple, n'eſt deſſicative & abſorbante que par les parties pierreuſes dont elle s'eſt chargée, & la chaux détrempée par l'eau, n'eſt ſi convenable dans les ouvrages de maçonnerie où on l'employe, que parce que ſes parties ayant été fort attenuées par le liquide, elles ſe réüniſſent enſuite ſi intimement les unes aux autres, qu'elles forment enſemble une maſſe compacte & durable.

Si donc l'eau déſunit ſi bien toutes les parties des corps ſalins & pierreux calcinez, & ſi elle les broye ſi ſubtilement ; ſuppoſé qu'il y ait de la matiere de feu engagée, & reſſerrée entre ces parties, elle doit s'échaper à la faveur de cette déſunion ; cet auſſi ce qu'elle fait ; car elle ſe rend dans le liquide aqueux à qui elle doit ſa délivrance, & qui en eſt plus ou moins échauffé ſuivant la quantité de cette matiere.

Il arrive encore un effet conſiderable dans quelques-uns de ces corps calcinez ; c'eſt que comme ils font ſouvent une très-ample proviſion de matiere de feu, & que la moindre cauſe eſt capable de la leur faire perdre : quand on les applique ſur les chairs, les parties de feu qui s'échapent de ces corps & qui s'introduiſent dans le tiſſu de la partie, la brûlent & y font un eſcare qui ne differe guere que du plus au moins, de la brûlure produite par un charbon ardent ou par un fer chaud.

La facilité qu'il y a d'expliquer les effets qui viennent d'être marquez, en ſuppoſant des parties de feu toûjours

agiſſantes, donne un grand préjugé en faveur de la ſuppoſition ; mais ce qui la rend parfaitement ſolide, c'eſt l'examen de la maniere dont les corps calcinez deviennent propres aux effets qu'on leur voit faire. Ils n'acquierent ces proprietez qu'en conſéquence de leur calcination, ou de leur expoſition à la matiere même du feu ; & ce qui eſt à remarquer, ces proprietez ſont les mêmes que celles du feu ; cela étant, y a-t-il rien de plus vrai-ſemblable & de plus naturel, que d'attribuer ces effets aux parties mêmes du feu qui ont été retenuës dans ces corps, & qui trouvant enſuite le moyen d'en ſortir, vont faire leur impreſſion ſur ceux qui s'offrent à leur paſſage.

Ajoûtez à tout ce qui vient d'être dit, qu'il eſt impoſſible par tout autre ſuppoſition de rendre aucune raiſon ſatisfaiſante des phénomenes dont il s'agit. Car ſi l'on prend un exemple particulier, quand la chaux plongée dans l'eau échauffe ce liquide, & le fait boüillir à peu près comme feroit du feu, attribuëra-t-on cet effet à quelques principes fermentatifs contenus dans la chaux, & qui ſont mis en action par l'eau ; mais on ne trouve dans la chaux qu'une pure terre dégarnie de tous ſels depuis ſa calcination, & dont il ſemble que le feu ait chaſſé tout autre corps pour en occuper la place. Or comment une pure terre détrempée par l'eau, viendra-t-elle à bout de l'échauffer ? c'eſt ce qu'il eſt impoſſible de concevoir ſans la ſuppoſition des parties de feu. Pourquoy donc cette ſuppoſition malgré les preuves déja alleguées trouve-t-elle encore des contradicteurs ? Le voici.

Les parties de feu, dit-on, ne ſont telles qu'à cauſe du mouvement rapide dont elles ſont agitées. Or quand on paſſeroit qu'elles peuvent-être engagées dans le tiſſu des corps groſſiers, elles y perdroient bientôt le mouvement qu'elles y auroient apporté, & ceſſant par-là d'être parties de feu, elles deviendroient incapables des effets que je leur attribuë. Par conſéquent il faut avoir recours à quelqu'autre cauſe pour expliquer ces effets.

Je répons que la matiere de feu doit être regardée

comme un fluide d'une certaine nature, & qui a des proprietez particulieres qui le distinguent de tout autre fluide. Je consens que ces proprietez dépendent de la rapidité avec laquelle toutes les parties de ce fluide se meuvent; mais je crois aussi que la figure de chacune de ces parties doit nécessairement entrer en ligne de compte. Quoiqu'il en soit, quand ce fluide a été arrêté dans le tissu de quelque matiere grossiere, comme il n'est pas de pire condition que tous les autres fluides que nous connoissons, il doit avoir le même sort. L'eau par exemple, est un liquide dont la fluidité, comme il sera dit dans la suite, dépend de la matiere du feu, & par conséquent dont la fluidité est bien inferieure à celle de cette matiere. Cependant l'eau s'enferme tous les jours dans une infinité de corps, sans qu'on puisse dire qu'elle y perde sa fluidité, ni aucune des proprietez qui la caracterisent. Enfin quand on l'en fait sortir, elle se retrouve avec ces mêmes proprietez essentielles qui ne l'ont pas quittée un moment. A plus forte raison notre matiere doit-elle dans la même situation conserver aussi les siennes, & se retrouver après sa sortie, telle qu'elle étoit auparavant.

Mais, me dira-on, il ne s'agit pas icy de comparaison, il s'agit de faire voir sans cela, comment les parties de feu retenuës dans un corps grossier y peuvent conserver leur mouvement; c'est aussi ce qui sera expliqué dans la suite après avoir satisfait à l'objection suivante, dont la réponse conduit naturellement à cet éclaircissement.

On n'a pas de peine à concevoir qu'un fluide grossier, & dont les parties sont médiocrement agitées, soit arrêté dans le tissu d'un corps solide. Mais on ne conçoit pas de même qu'une matiere aussi subtile & aussi active que l'est celle du feu, ne trouve pas dans le corps où elle s'est introduite, quelqu'issuë pour s'échaper, ou qu'elle ne s'en fasse pas une par la rapidité de son mouvement.

Je répons, que pour ce qui regarde l'activité de la matiere du feu, elle est certainement très-grande, & que

quand cette matiere ſe trouve en une quantité ſuffiſante pour forcer la réſiſtance d'un corps ſolide, elle ſe fait jour au travers en rompant l'union de toutes ſes parties; mais elle n'eſt pas toûjours aſſez abondante pour cela; & alors ſa force étant inférieure ou égale à la réſiſtance du corps ſolide qui l'envelope, l'activité & les efforts de cette matiere demeurent inutiles, s'ils ne ſont aidez & ſecourus par quelque cauſe étrangere qui agiſſe extérieurement.

Quant à la fineſſe des parties de cette matiere, on ne peut diſconvenir qu'elle ne ſoit très-conſiderable; mais il s'agit de ſçavoir, ſi les pores des cellules dans leſquelles je ſuppoſe les parties de feu enfermées, ne ſont pas encore plus petits que ces parties; comme nous n'avons point de microſcopes aſſez fins, ni de meſures aſſez exactes pour vérifier ce qui en eſt, & que d'ailleurs il n'y a aucun inconvenient à ſuppoſer les pores dont il s'agit, plus étroits que les parties de feu ne ſont fines & déliées; j'adopte d'autant plus volontiers cette ſuppoſition, qu'ayant d'ailleurs de fortes preuves que la matiere de feu peut être retenuë dans le tiſſu de pluſieurs corps, cette ſuppoſition y convient parfaitement.

Au reſte je ne prétens pas que les pores, au travers deſquels la matiere de la lumiere ne ſçauroit paſſer, ſoient impraticables à toute autre matiere; car quelques déliées que ſoient les parties de feu, j'en puis concevoir encore de cent fois plus ſubtiles qui ne trouvent aucuns pores impénétrables, & dont la deſtination eſt peut-être de remplir tous les vuides de l'univers; mais quoyqu'elles ſurpaſſent en fineſſe les parties de la matiere du feu, je ne les crois pas pour cela auſſi propres que cette matiere, aux effets dont elle eſt reconnuë capable Voici pourquoi.

Une des principales proprietez de cette matiere, c'eſt de diſſoudre & de mettre en fuſion les corps terreſtres, ce qu'elle fait en diviſant & déſuniſſant toutes leurs parties, & donnant à chacune l'agitation neceſſaire, pour que le tout ait une forme de liquide; mais la matiere ſubtile trouve un paſſage ſi libre au travers de tous les corps,

qu'elle s'échape par les iſſuës qui lui ſont ouvertes de tous côtez, ſans faire une impreſſion auſſi vive ſur ces corps, que la matiere du feu, qui n'étant pas auſſi ſubtile que l'autre, & par conſéquent ne pouvant enfiler les mêmes routes, ſe trouve contrainte pour ſe faire une paſſage de forcer les obſtacles qui s'y oppoſent, & par-là de détruire le tiſſu naturel de ces corps.

Je pourrois fortifier ce raiſonnement de pluſieurs exemples ſenſibles; en voici un entr'autres qui vient aſſez bien au ſujet. Si l'on tend un rets dans une riviere à l'expoſition de ſon courant, les parties de l'eau paſſant facilement par les mailles ou les trous de ce rets ne l'endommageront point ou peu; mais s'il vient un corps qui ne puiſſe pas traverſer ces mailles, ou il s'arrêtera-là, ou il rompra le rets pour ſe faire un paſſage. C'eſt auſſi ce qui arrive à la matiere de la lumiere, qui ſuivant ſon abondance & ſa force, s'embarraſſe dans les corps ou les diſſout.

Pour concevoir à préſent ſans le ſecours de comparaiſon, comment la matiere du feu enfermée dans les cellules d'un corps ſolide peut y conſerver ſon mouvement, il n'y a qu'à faire attention qu'une matiere plus ſubtile parcourt continuellement tous les pores de ces cellules, & par conſéquent entretient l'agitation de la matiere qui y réſide.

Monſieur Saurin nous a fait voir qu'on pouvoit ſuppoſer avec aſſurance & ſans crainte de contradiction bien fondée, que la matiere propre des corps les plus ſolides & les plus peſans, ne faiſoit pas la centmilliéme partie de leur volume. Sans prendre cette ſuppoſition à la rigueur, & en relâchant beaucoup de ſon étenduë, les corps ſolides donneront toûjours paſſage & habitation à une grande quantité de matiere étrangere; & en ce cas la matiere plus ſubtile dont il a été parlé, y paſſant bien plus aboudamment qu'on ne ſe le ſeroit imaginé, celle du feu quoiqu'empriſonnée, ne manquera pas de cauſes pour entretenir ſa fluidité & ſon mouvement.

Au

Au reste, quand je serois obligé d'accorder que les parties de feu engagées dans un corps solide n'y pourroient pas toûjours conserver leur mouvement, il ne s'ensuivroit pas de-là qu'elles y perdroient aussi leur nature propre de matiere de feu; car ce n'est pas seulement à la rapidité de leur mouvement qu'elles doivent les proprietez qui leur sont particulieres, c'est encore à leur figure & à leur tenuité. Par exemple, quand les parties d'eau sont gêlées, elles sont en repos; cependant on ne peut pas dire qu'elles soient en cet état essentiellement differentes de ce qu'elles étoient auparavant, puisque la moindre agitation, ou la moindre chaleur les remet en possession des effets ausquels la figure particuliere qu'elles conservent, les rend toûjours propres, & dont tout autre corps exposé à la même chaleur, ne seroit jamais capable.

On sçait encore que le sel est la matiere des saveurs, & qu'il a de certaines proprietez qui sont dûs à la figure propre de ses parties; cependant il n'agit que quand il est dissous, ou ce qui est la même chose quand il nage dans un liquide qui tient ses parties en mouvement. Cela étant, dira-t-on que quand il n'est pas dissous, il n'est plus la matiere des saveurs, & qu'il n'a plus les proprietez qui caractérisent le sel en general; il faudroit pour cela que ses parties eussent encore perdu leur figure essentielle, qui est la source principale de ces proprietez.

Par la même raison, quand il seroit vrai que l'engagement des parties de feu dans un corps solide leur enleveroit quelquefois leur mouvement, elles seroient alors dans le même cas que l'eau gelée, & le sel en repos; c'est-à-dire qu'elles pourroient encore en regagnant du mouvement, reproduire leurs premiers effets.

On me demandera peut-être comment la matiere du feu, qui a bien pû penetrer dans un corps solide, n'en peut pas sortir de la même maniere, sans avoir besoin d'une cause étrangere qui facilite son évasion; car elle n'y est entrée, que parce qu'elle a trouvé des voïes assez ouvertes pour cela; pourquoi donc ne ressort-elle pas

par les mêmes iſſuës, ou par d'autres d'une égale grandeur.

Je répons, que tant que le corps eſt expoſé au feu, cet agent ouvre & dilate ſes pores, & y fait paſſer librement & continuellement pluſieurs de ſes parties qui en peuvent auſſi reſſortir enſuite avec la même liberté qu'elles y étoient entrées ; & cela parce que la dilatation des pores perſiſte toûjours ; mais dès que le feu ceſſe d'agir la cauſe de la dilatation ceſſant auſſi, les parties du corps qui avoient été ſoûlevées, s'afaiſſent, & les pores ſe rétabliſſent dans leur premier état ; alors les parties de feu qui s'étoient introduites dans les cellules de ce corps, s'y trouvent tout d'un coup empriſonnées, & n'en peuvent plus ſortir ſans une nouvelle dilatation de pores ou une fuſion parfaite du corps qui les retient.

On ne doit pas s'étonner de ce que les corps qui par la calcination ont fait une proviſion abondante de matiere de feu, ne donnent aucun ſentiment de chaleur quand on les touche ; car comme les parties de feu qu'ils renferment interieurement, ne peuvent parvenir juſqu'à la main appliquée ſur la ſurface de ces corps, elles ne ſe font pas plus appercevoir par cette épreuve que ſi elles n'y étoient pas contenuës ; de même que le ſel n'eſt ſenſible au goût, que quand il eſt aſſez dégagé de tout autre corps, pour frapper immédiatement l'organe de cette ſenſation. Par conſéquent quand les corps nouvellement retirez du feu font une impreſſion ſi vive de chaleur, ce n'eſt pas par les parties de feu qu'ils tiennent empriſonnées ; mais par celles qui ont trouvé des iſſuës aſſez ouvertes pour s'échaper au dehors. Car on peut admettre dans les corps deux ſortes de pores, les uns qui naturellement ſont aſſez grands pour donner en tout tems un paſſage libre à la matiere du feu, & les autres qui ne lui en donnent que quand ils ont été dilatez par la chaleur ; comme je l'ai déja remarqué.

Enfin on me demandera peut-être encore pourquoy la matiere du feu enfermée dans les corps ſalins & pierreux

ne dérange pas les parties qui s'oppoſent à ſa ſortie, puiſque l'eau qui a bien moins d'activité que cette matiere, en vient bien à bout.

Je répons, que ſi la quantité de la matiere de la lumiere contenuë dans la chaux étoit auſſi grande que celle de l'eau qu'on verſe deſſus pour en faire ſortir cette matiere, elle n'auroit peut-être pas beſoin de ſecours étranger pour s'échaper, & elle ſeroit par elle-même plus que ſuffiſante pour cela; mais toute active qu'elle eſt elle ſe peut trouver en ſi petite quantité par rapport aux parties de l'eau, que ces parties auront plus ou autant d'action qu'elle pour de certains effets; or il eſt certain qu'on dégage des corps dont il s'agit, bien moins de parties de feu qu'on n'emploïe de parties d'eau pour les dégager.

De plus pour ce qui regarde les ſels fixes alkalis qui ſont ceux qui contiennent des parties de feu, on ſçait que l'eau les diſſout avec une promptitude étonnante, & que le feu le plus fort auroit bien de la peine à les mettre auſſi promptement en fuſion; ſi donc l'eau déſunit ſi bien toutes les parties de ces ſels, elle donnera facilement par-là, comme il a déja été dit, une iſſuë libre à la matiere de la lumiere engagée & retenuë entre ces parties; & s'il ne faut pas moins qu'un feu de fuſion pour produire la même déſunion ou le même dérangement dans ces ſels, comme la matiere de lumiere qui y eſt contenuë, n'eſt pas à beaucoup près auſſi abondante, & par conſéquent auſſi puiſſante que celle d'un feu de fuſion, il eſt clair qu'elle agira en cette occaſion avec moins d'efficacité que l'eau.

Enfin il ne faut pas s'imaginer que ce liquide verſé ſur la chaux & ſur les ſels alkalis, ouvre tout ſeul un paſſage à la matiere de la lumiere; & en effet comme on peut ſuppoſer avec toute la vrai-ſemblance poſſible, que cette matiere conſerve toûjours ſon mouvement dans l'intérieur de ces corps, il y a lieu de croire qu'elle travaille continuellement, & au dedans de ſa priſon à forcer les obſtacles qui s'oppoſent à ſa ſortie, & que ſi malgré ſes efforts

elle ne peut parvenir à ſon élargiſſement ſans un ſecours exterieur : du moins contribuë-t-elle beaucoup à faciliter & aſſeurer l'effet de ce ſecours.

Le Soleil ne paroît être autre choſe qu'un amas très-conſiderable de matiere de feu ou de lumiere, ou ſi l'on veut une grande flamme qui ne differe point eſſentiellement de la nôtre, puiſque l'une & l'autre produiſent parfaitement les mêmes effets ; mais comme cet aſtre ſe trouve très-éloigné de nous, il ne peut agir ſur les corps terreſtres que par deux voïes, ſçavoir, ou par des émanations & des échapées de ſa ſubſtance, qui partant du lieu de leur demeure naturelle, viennent ſe rendre juſqu'à nous. Mais cette hypotheſe étant ſujette à quelques inconveniens, ou plûtôt ne ſuffiſant pas pour l'intelligence de certains phénomenes, on peut encore ſuppoſer des traînées abondantes de matiere de lumiere, qui ſont toutes placées dans les interſtices de la grande maſſe du fluide interpoſé entre le Soleil & nous, & ces traînées agiſſent fortement ſur les corps terreſtres quand elles ſont preſſées & pouſſées vigoureuſement & en abondance vers ces corps par la préſence du Soleil. On pourroit les regarder chacune comme des eſpeces de petits Soleils prolongez, mais qui dépendent du grand comme de la ſource de leur mouvement ou de leur action ſur les corps terreſtres.

Ces traînées qui forment les rayons lumineux, & qui ſont les agents immediats de la lumiere, ne different point quant à leur matiere de la ſubſtance même du Soleil, & non-ſeulement il eſt inutile de le ſuppoſer, mais l'experience & l'examen y ſont encore formellement oppoſez. Et en effet le Soleil étant une flamme qui produit les mêmes effets que la nôtre, on peut raiſonner de la maniere dont il agit ſur les corps terreſtres par celle dont nous remarquons que nôtre flamme y agit auſſi. Or il eſt certain que quand on plonge ces corps dans la flamme même, c'eſt la propre matiere de cet agent, qui ſans aucun autre ſecours les penetre, les échaufe, & les modifie

differemment ſuivant leur nature particuliere ; & quand on préſente ces corps au feu ſans qu'ils touchent à la flamme, les impreſſions qu'ils en reçoivent ne different point eſſentiellement de celles que la flamme même appliquée immédiatement ſur ces corps auroit produite ; elle n'en different que du plus au moins, en ſorte qu'un corps ſur lequel une petite flamme agiroit immédiatement, n'en ſeroit pas plus échauffé ni autrement alteré, que ſi on le plaçoit à une diſtance aſſez conſidérable d'une grande flamme.

Tout cela marque ſuffiſamment que la matiere de feu ou de lumiere interpoſée entre la flamme & nous eſt de même nature que la flamme même. Pourquoy donc les rayons lumineux qui ſervent à tranſmettre juſqu'à nous l'action du Soleil, & qui n'en paroiſſent être qu'une continuation ; ſeroient-ils d'une matiere differente de celle de cet aſtre ; & en effet quand on les réünit par le moyen du verre ardent, ils agiſſent en cet état avec autant & plus de vivacité ſur les corps terreſtres, que pourroit faire la flamme la plus violente appliquée immédiatement ſur les mêmes corps ; ce qui marque non ſeulement que la matiere de ces rayons eſt la même que celle de la flamme, mais encore que la flamme conſiſte dans l'amas d'une grande quantité de matiere de lumiere qui agit d'autant plus vivement qu'elle eſt plus abondante & plus réunie. Suivant ce raiſonnement le Soleil ne paroît differer des rayons de lumiere réunis par le verre ardent, qu'en ce que la matiere de lumiere y étant en plus grande quantité, & peut-être même encore plus réünie qu'elle ne l'eſt dans ces rayons, il agiroit avec plus de force & de promptitude qu'eux, ſi les corps terreſtres y étoient immédiatement appliquez.

L'action violente des rayons réünis par le verre ardent, fait aſſez connoître que le fluide qui dans leur état naturel les ſépare & les étend, ſert à temperer cette action, & à la rendre plus ſupportable ; car ſans cet intermede au lieu d'éclairer & d'exciter une chaleur douce, ils con-

ſumeroient tous les corps & détruiroient l'organe de la vûë ; & pour me ſervir d'une comparaiſon ſenſible, l'air doit être regardé par rapport aux rayons lumineux qui tombent ſur nous comme l'eau par rapport aux parties de feu qui paſſent de ce liquide dans un corps expoſé à la chaleur du bain marie ; c'eſt-à-dire que la violence des raïons lumineux eſt temperée par leur paſſage au travers de l'air, comme celle des parties de feu eſt adoucie par leur paſſage au travers de l'eau. On pourroit encore comparer les rayons lumineux aux eſprits corroſifs qui déchirent & rongent puiſſamment quand ils ſont purs, & qui produiſent une aigreur très-agréable, quand ils nagent dans une ſuffiſante quantité de liquide.

La matiere de lumiere pouſſée par le Soleil ſur les corps terreſtres, les modifie differemment ſuivant la nature de ces corps. Il y en a de certains que cette matiere met & entretient facilement en fuſion ; telles ſont les parties d'eau qui originairement ſont ſolides, & qui ne doivent leur fluidité qu'au mélange & à l'action de la matiere de lumiere. La preuve en eſt que leur fluidité perſiſte tant que le Soleil détermine une quantité ſuffiſante de cette matiere à porter ſon action ſur les corps terreſtres ; mais dans les Saiſons où il ne nous en envoye que peu, comme ce peu ne ſuffit pas pour entretenir la fuſion de ces parties, elles retombent dans leur premier état d'immobilité, d'où elles reſſortent enſuite quand on les préſente au feu, ou, ce qui eſt la même choſe, quand le Soleil recommence à pouſſer vers les corps terreſtres, une plus grande quantité de matiere de lumiere.

Ce qui vient d'être dit, fait aſſez connoître. 1°. Que la glace n'eſt qu'un rétabliſſement des parties d'eau dans leur état naturel. 2°. Que la ſeule abſence de matiere de lumiere ſuffit pour concevoir ce rétabliſſement ; & enfin que la fluidité de l'eau eſt une fuſion véritable qui peut être comparée à celle des métaux expoſez au feu, & qui n'en differe qu'en ce que les métaux ont continuellement

besoin d'une grande quantité de partie de feu pour être mis & entretenus en fusion, & que rarement il vient assez peu de matiere de lumiere aux parties de l'eau, pour qu'elles puissent reprendre leur premier état de solidité, comme font les métaux fondus, & éloignez ensuite de la cause de leur fusion.

Un autre effet de la matiere de lumiere répanduë sur les corps terrestres; c'est de s'engager dans de certains composez de sel, de terre, & d'eau, & de former avec eux des huiles, des graisses, & en un mot, des corps inflammables qui ne sont tels que par la grande quantité de parties de feu qu'ils contiennent. Ce qui me fait adopter cette conjecture, c'est que quand on analyse ces corps, on les réduit entierement en sel, en terre, en eau, & en une substance fine & déliée qui passe au travers des vaisseaux les mieux bouchez, & qui quelque soin qu'apporte l'artiste pour ne rien perdre, se dissipe toûjours en assez grande quantité pour produire une diminution de poids considerable dans le total de la matiere restante.

Il est certain que le sel, la terre & l'eau, soit qu'on les unisse ensemble, soit qu'on les sépare, ne deviennent jamais inflammables, & même qu'ils empêchent ou retardent le plus souvent l'inflammabilité des corps qui ont cette proprieté. On peut même dire, que ces principes ne servent dans la composition des corps inflammables qu'à contenir & arrêter la matiere de la lumiere qui est la véritable matiere de la flamme, & qui ne s'élance en l'air sous cette forme, que quand le corps inflammable ayant été exposé au feu, cet agent exterieur en a rompu les vesicules, & a donné à la matiere enfermée dans ces vesicules toute la liberté de s'envoler.

C'est donc la matiere veritable de la flamme qui échape à l'artiste dans l'analyse des corps inflammables, & il ne lui reste après la décomposition de ces corps, que les materiaux qui servoient à former les prisons dans lesquelles cette matiere étoit retenuë. On accordera aisé-

ment que cette matiere étant libre & renduë à elle-même, doit s'échaper au travers des vaisseaux les mieux bouchez, dès qu'on fera attention qu'il n'y a point de vaisseau exposé au feu où cette matiere ne penetre, & n'aille échaufer le liquide qui y est contenu; & quant à la cause de l'inflammabileté, l'experience nous faisant connoître que le sel, la terre, & l'eau dans quelque situation qu'on la mette, ne deviennent jamais inflammables; à qui peut-on plus vrai-semblablement attribuer l'effet dont il s'agit qu'à la matiere de la lumiere, qui comme il a déja été prouvé, forme la flamme, & lui donne toutes ses proprietez.

Au reste on ne doit point être surpris de ce que les métaux calcinez, & en géneral tous les corps qui par la calcination ont fait une provision de matiere de lumiere, ne s'enflamment pas au feu comme font les huiles; car pour qu'un corps s'enflamme & se fasse appercevoir en cet état, il faut que la substance lumineuse qui s'en échape continuellement, soit assez abondante, & forme une masse assez robuste pour presser de tous côtez & avec vigueur la matiere de lumiere qui se trouve confusément répanduë dans les interstices de l'air; ensorte que les parties de cette matiere se poussant successivement les unes & les autres selon la détermination directe qui leur a été communiquée, transmettent par-là jusqu'à une distance plus ou moins grande les impressions de la flamme. Mais quand il ne s'échape des corps solides que de petites parcelles de substance lumineuse, elles se trouvent tout d'un coup si fort offusquées par l'air qui les environne, & leur masse est naturellement si foible, qu'il ne luy est pas possible de faire des pressions assez étenduës & assez efficaces pour devenir sensibles à la vûë.

Cela étant on peut concevoir que la matiere de la lumiere contenuë dans les corps inflammables exposez au feu en sort à chaque instant en beaucoup plus grande quantité que ne fait celle qui s'est engagée dans les métaux calcinez; soit parce que les corps calcinez contien-

nent

nent une moindre quantité de cette matiere que les huiles, soit parce qu'ayant un tissu de parties plus serré, ils ne luy permettent pas une sortie aussi libre, & qu'à chaque effort de l'agent exterieur qui les oblige à s'en désaisir, ils n'en laissent exhaler que de petites parcelles, incapables, comme il a déja été dit, de fraper sensiblement la vûë.

Ce raisonnement s'accorde parfaitement avec un fait assez commun; c'est que quand on expose à un trop petit feu des corps très-inflammables, comme le papier, la paille; ils se consument quelquefois entierement sans jetter aucune flamme, & cela parce que l'agent exterieur étant trop foible pour chasser à la fois une grande quantité de la matiere de la lumiere contenuë dans ces corps, toute cette matiere s'échape successivement en petites portions invisibles, & proportionnées à la force qui procure leur délivrance.

Ce seroit ici le lieu de rendre raison de plusieurs phénomenes curieux, ausquels la supposition de la matiere de lumiere enfermée, convient parfaitement, & qui s'expliquent même si naturellement & avec tant de facilité par cette voïe, qu'il semble que chacun de ces phénomenes soient autant de preuves de la verité de la supposition. Par exemple la matiere de lumiere ne paroît-elle pas convenir particulierement aux phosphores, tant naturels qu'artificiels, & à ces fermentations violentes & accompagnées d'une flamme considerable que les huiles dont on se sert dans ces sortes d'experiences sont contraintes de laisser exhaler quand elles y ont été forcées par des acides nitreux ou vitrioliques qui les ont pénetrées. Mais si je m'engageois dans une explication complette de toutes les experiences de cette nature, & de toutes les circonstances singulieres qui les accompagnent chacune en particulier, & qui les diversifient, je passerois de fort loin les bornes que je me suis prescrites, & je déroberois à d'autres Memoires des sujets qui méritent bien d'être traitez particulierement.

Je remarquerai ſeulement dans ce Memoire-cy, que les phoſphores en géneral doivent être regardez comme des eſpeces d'éponges pleines de matieres de lumiere, dans leſquelles cette matiere eſt ſi foiblement retenuë, & tient à ſi peu de choſe, qu'elle n'a pas beſoin d'un grand ſecours exterieur pour devenir en état de s'exhaler ſous une forme lumineuſe, & ſouvent même de brûler, & d'enflammer les corps preſentez à ſon action.

Il ſuit de tout ce qui a été dit, que ſi le Soleil paroît être une eſpece de grand reſervoir de matiere de lumiere, nous en avons icy dans les corps inflammables un très-grand nombre de reſervoirs particuliers qui ſemblent avoir été formez pour ſuppléer en tems & lieu au défaut du Soleil; & en effet comme ſa préſence nous eſt indiſpenſablement neceſſaire pour la lumiere & pour la chaleur, & cet aſtre ne nous éclairant pas toûjours & s'éloignant même de nous dans de certaines ſaiſons, ou ce qui revient au même, ne déterminant alors qu'une petite quantité de matiere de lumiere à penetrer les corps terreſtres, nous trouveront heureuſement dans le ſein de la terre même de quoy ſubvenir aux maux dans leſquels l'abſence ou l'éloignement du Soleil nous jetteroient immanquablement; c'eſt-à-dire aſſez de matiere de lumiere pour pouvoir former des eſpeces de petits ſoleils qui nous échaufent & nous éclairent auſſi-bien que le grand, & qui ſont en quelque ſorte ſes ſubſtituts.



DE L'EVANOUISSEMENT DES QUANTITEZ INCONNUES DANS LA GEOMETRIE ANALYTIQUE.

PAR M. ROLLE.

Toutes les recherches que l'on a faites dans la Geometrie Analytique se réduisent à deux Classes. Dans l'une on se propose de transformer les Questions de cette Science en Problême d'Algebre ; & dans l'autre on ne s'occupe que du soin de résoudre ces Problêmes. 1709. 9. Aoust.

Comme la Méthode de faire évanoüir les Inconnuës par la voïe du dégagement & des Substitutions est d'un fréquent usage dans ces recherches, & qu'il se trouve dans cette Méthode plusieurs difficultez, ausquelles on n'a pas fait assez attention ; je me suis proposé en marquant ces difficultez, de marquer en même temps comment on peut les résoudre : Ce qui demande plusieurs Memoires. En cela, l'ordre le plus naturel me prescrit de commencer par l'Examen des Problêmes de pure Algebre qui n'ont que deux Egalitez & deux Inconnuës, & dont les termes ne sont affectez ni de fractions ni de signes radicaux. Ce ne sont aussi que ces sortes de Problêmes qui feront le sujet de ce premier Memoire.

Ce Projet ainsi restraint, ne laisse pas de renfermer une infinité d'Exemples qui désignent quatre Inconveniens dignes de remarque dans la Méthode en question.

Car l'on y trouve, 1°. Des Questions impossibles qui paroissent possibles & même faciles à résoudre, quand on n'en juge que par cette Méthode. *Possibilitez apparentes.*

2°. Des questions qui se réduisent à des Egalitez tout-à fait imaginaires, ou à des contradictions manifestes comme $7=4$; qui ne laissent pas d'être possibles & solubles. *Impossibilitez apparentes.*

Indéterminations apparentes.

3°. Des Queſtions déterminées les unes poſſibles, les autres impoſſibles qui paroiſſent indéterminées & capables d'une infinité de Solutions.

Déterminations apparentes.

4°. Des queſtions indéterminées qui ſe réduiſent à des Egalitez ou imaginaires, ou contradictoires, ou ſeulement capables d'un certain nombre de Solutions réelles, & qui neanmoins en ont une infinité.

C'eſt-là en quoy conſiſtent les difficultez que je veux expliquer dans ce Memoire.

Dans le premier Article je n'enviſageray que des Problêmes où les Diviſions que preſcrit la Méthode ne peuvent ſe faire qu'intentionnellement. Et dans le ſecond Article je me propoſeray des Problêmes où les Diviſions ſe font actuellement. Dans l'un & dans l'autre je marqueray les Moyens qui me paroiſſent les plus generaux & les plus convenables pour remedier aux inconveniens indiquez par les Exemples dont je me ſerai ſervi. De-là il ſera facile de voir comment on pourra éviter de ſemblables inconveniens, lorſque les Diviſions ſont en partie actuelles & en partie ſuppoſées.

ARTICLE I. On juge ordinairement de la poſſibilité ou de l'impoſſibilité d'un Problême dans la Methode en queſtion, ſelon que la Réduite ſe trouve poſſible ou impoſſible. Voici des Cas où l'on verra qu'il eſt ſouvent néceſſaire pour s'en aſſurer, non ſeulement de faire la ſubſtitution retrograde des racines à l'ordinaire; mais encore de la pouſſer juſques aux Egalitez propoſées, qu'il ſe trouve des difficultez conſiderables dans ce retour auſquelles on ne fait pas attention. On y verra auſſi comment on peut réſoudre ces premiéres difficultez; ce qui ſervira à découvrir d'autres inconveniens de cette Méthode qui ſeront expliquez dans la ſuite.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple, la Réduite du Problême renferme pluſieurs racines réelles, & neanmoins le Problême eſt imaginaire.

Le Problême propoſé eſt celuy qu'expriment les deux Egalitez *A*, *B*.

$A \ldots yy + xx = nx.$

$B \ldots yy + 4nx = 6nn.$

Dans le deſſein qu'on auroit de réſoudre ce Problême par la Mêthode en queſtion, & de faire premierement évanoüir y, le dégagement dans l'Egalité A, ſeroit comme on le voit icy en C.

$C \ldots yy = nx - xx.$

Suivant cette Méthode, il faut ſubſtituer cette valeur de yy dans l'égalité B. Ce qui donne la réſultante D.

$D \ldots xx - 5nx + 6nn = 0.$

Cette réſultante ainſi trouvée ne renfermant pas l'inconnuë y que l'on a fait évanoüir, elle eſt par conſéquent la réduite du Problême A, B. Et comme cette réduite renferme des racines réelles, il faudroit conclure ſelon des préjugez ordinaires, que ce Problême eſt poſſible. Mais en faiſant évanoüir l'inconnuë x par la ſubſtitution retrograde de ſes valeurs priſes en D, on verra aiſément dans cet exemple, que le Problême eſt abſolument impoſſible.

Car cette Réduite D étant réſoluë, on trouve qu'elle n'a point d'autres racines que $x = 2n$ & $x = 3n$. On trouve auſſi en ſubſtituant ces valeurs dans C, que les réſultantes ſont celles qu'on voit icy en E, F.

$E \ldots yy = -2nn$. ou $y = \pm \sqrt[2]{-2nn}.$

$F \ldots yy = -6nn$. ou $y = \pm \sqrt[2]{-6nn}.$

Ainſi, la ſubſtitution retrograde des valeurs réelles de x, ne donne dans l'égalité du dégagement que des valeurs imaginaires pour y ; & comme cette égalité, dans cet exemple, eſt la même qu'une des propoſées, il eſt facile de voir que le Problême propoſé eſt imaginaire, quoyque ſa réduite ſoit entierement réelle.

Pour ſurcroît de preuves, on trouvera en ſubſtituant $x = 2n$ & $x = 3n$ dans B que les réſultantes ſont encore imaginaires. Ainſi, le Problême qu'expriment les égalitez A & B eſt un Problême impoſſible, quoique la premiere donne un Cercle ; que la ſeconde fourniſſe une

parabole, & que leur réduite soit possible.

REMARQUE. Si l'on se propose de construire l'égalité réelle *D* par la Méthode ordinaire des effections géometriques en prenant l'égalité *A* pour le premier lieu, cette Méthode donnera *B* pour le second lieu, & l'on trouvera que la construction ne donne aucune des racines de *D*. Cet inconvenient dans un exemple aussi simple fait voir la force du préjugé où l'on étoit : Que la réduite des lieux suffit pour sçavoir si le Problême qu'ils expriment, est possible ou impossible. Car pour s'assurer du succez d'une construction, on se contente dans cette Méthode que cette réduite soit la même que la proposée, sans s'occuper de ce qui arrive dans la substitution retrograde. C'est-à-dire qu'ayant voulu construire *D*, & trouvant que *D* est la réduite des lieux, il ne faudroit rien de plus suivant ce préjugé pour s'assurer que la construction donnera les racines de cette Egalité, & que le nombre des points où les Courbes se rencontreront sera égal au nombre de ces racines.

On verra ici par d'autres exemples qu'il y a des cas où il n'est pas facile de voir cet inconvenient, & que pour le découvrir il faut ajoûter des regles considerables à la Méthode en question.

SECOND EXEMPLE.

Dans cet Exemple la Méthode oblige de faire deux dégagemens pour trouver la Réduite. On voit qu'ils s'accordent dans leurs effets, & que neanmoins il faut substituer la valeur de chaque inconnuë dans toutes les Egalitez proposées, pour sçavoir si la racine de cette Réduite convient au Problême.

Ce Problême est celui qui representent *G.H.*

$G \ldots xyy + x^3 = nyy + cly.$

$H \ldots xyy + pll = xxy + gyy.$

Dégageant *yy* dans *A* on trouve *I*.

$I \ldots yy = \frac{lcy - x^3}{x - n}.$

Subtituant cette valeur de *yy* dans l'égalité *H*, & dé-

gageant y de celle qui en résulte on aura K.

$$K \ldots y = \frac{x^4 - gx^3 - pllx + npll}{nxx - x^3 + clx - gcl}.$$

Et cette derniere valeur de y étant substituée dans I ou G, donnera la réduite L.

$$L \ldots \left.\begin{array}{l} 2x^9 - 3nx^8 + nxn^7 \\ \quad - 2gx^8 - clx^7 \\ \quad\quad + ggx^7 \\ \quad\quad + 2gnx^7 \end{array} \&c. \right\} = 0.$$

Cette réduite se divise par $x - n$. Donc $x = n$ en est une racine réelle. Il faut voir si elle convient au Problême proposé G, H.

Substituant cette valeur de x dans le dernier dégagement K, on aura $y = \frac{n^4 - gn^3}{cnl - gcl}$, qui s'abrége en divisant par $n - g$, & delà $y = \frac{n^3}{cl}$.

Ainsi $x = n$ & $y = \frac{n^3}{cl}$ devroient résoudre le Problême. On trouve en substituant ces valeurs dans l'Egalité du premier dégagement I, qu'elles en sont une solution : Et comme cette Egalité est la même que la Proposée G, on peut assûrer qu'elles en sont aussi une solution ; mais en substituant ces valeurs de x & de y. Dans l'autre Proposée H, il en résulte l'Egalité M.

$$M \ldots pccl^4 + n^7 = cln^5 + gn^6,$$

qui seroit une Egalité résoluë si p valoit $\frac{cln^5 + gn^6 - n^7}{ccl^4}$, ou si la valeur de g étoit $\frac{pccl^4 - cln^5 + n^7}{n^6}$. Ou bien, si $g = n$, & en même tems $p = \frac{n^5}{cl^3}$. Car dans ces trois cas, le premier membre de M seroit égal au second, & cette résultante se réduiroit à $0 = 0$. Mais il est évident qu'il y a beaucoup plus de cas où M se trouveroit contradictoire.

Ainsi l'on peut voir dans cet Exemple :

1°. Qu'il ne suffit pas toûjours de faire la substitution retrograde dans l'Egalité du dernier dégagement lorsqu'il fournit une valeur réelle pour l'Inconnuë dégagée, ni même lorsqu'elle se confirme par les autres dégagemens.

2°. Qu'il y a des cas où il faut faire la ſubſtitution des valeurs que fournit la Méthode dans toutes les Egalitez du Problême propoſé, ou avoir des moyens équivalens. pour ſçavoir ſi ces valeurs ſatisfont aux conditions de ce Problême.

REMARQUE I. Le Problême G, H étant conçû en termes generaux, ſi l'on eût fait le premier dégagement dans H, la premiere ſubſtitution ſe feroit faite dans G, & la ſeconde dans H, alors la réduite n'auroit point été diviſible par $x-n$, enſorte que la racine $x=n$ ne ſe ſeroit point trouvée dans cette réduite ſur l'hypothéſe que les grandeurs données demeurent en termes generaux. Mais ſi le rapport de ces grandeurs effaçoit la contradiction qui paroît dans M, la réduite ſe trouveroit diviſible par $x-n$, quand même le premier dégagement & les premieres ſubſtitutions auroient été faites comme je viens de le dire. Alors cette réduite ſeroit encore diviſible par $x-g$, quoique ce binome ne diviſe pas la réduite L.

Delà il ſembleroit que pour réformer la Méthode en queſtion, il faudroit neceſſairement dégager dans une des Propoſées & pourſuivre comme on l'a fait ici. Qu'enſuite il faudroit dégager dans l'autre propoſée & faire un ſemblable manége. Mais cette Méthode ſera reglée de maniere, qu'il ſuffira de faire le premier dégagement dans une des propoſées.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple une Indétermination apparente ſe complique avec une Impoſſibilité ambiguë. La ſubſtitution retrograde dans l'Egalité du dégagement, donne une ſolution du Problême qui paroît réelle dans l'Infini actuel, & qui ſe confirme par une effection géometrique. Cependant la ſubſtitution étant pouſſée juſques aux Egalitez propoſées, ne donne dans l'une & dans l'autre que des contradictions abſoluës. De maniere que le Problême ſeroit ſoluble dans l'Infini, quoiqu'impoſſible dans le Fini, & qu'en ôtant les contradictions,

dictions, il se trouveroit capable d'une infinité de Solutions dont toutes les valeurs seroient réelles & finies.

Les deux Egalitez du Problême sont marquées icy N, O.

$$N \ldots xy + ac = cy + ax + dd.$$

$$O \ldots x^3 + axy = cxx + acy + add.$$

dégageant y dans la premiére, la valeur de cette inconnuë sera comme on la voit en P.

$$P \ldots y = \frac{ax - ac + dd}{x - c}.$$

Substituant cette valeur dans O, sans abreger la fraction que l'on voit naître dans le résultat, on aura la réduite Q.

$$Q \ldots x^4 - 2cx^3 + aaxx - 2aacx + aacc = 0.$$
$$+ ccxx$$

Et si l'on abrége la fraction en divisant ses deux termes par $x - c$, la Réduite sera comme on la voit icy en R.

$$R \ldots x^3 - cxx + aax - aac = 0.$$

Ces deux réduites n'ont point d'autre racine réelle que $x = c$. Mais cette racine se trouve deux fois dans la premiere réduite. Ce qui servira à expliquer une difficulté.

Sur cela, on peut faire les observations suivantes.

1°. En sustituant c à la place de x dans l'Egalité du dégagement P, on aura $y = \frac{dd}{0}$ (qui est l'expression ordinaire des grandeurs actuelles infinies). Ainsi, $x = c$ & $y = \frac{dd}{0}$ sont deux valeurs qui doivent faire une solution du Problême selon la Méthode. Mais comme il y a une infinité d'Exemples où l'on seroit trompé par de semblables apparences, il faut icy des connoissances qu'elle ne donne pas. Voici une voye qui n'est peut-être pas tout-à-fait indifferente pour cette recherche.

Déja nous avons dans P la valeur de y que fournit la premiere proposée N, & substituant $x = c$ dans le numerateur de P sans substituer dans son dénominateur, on aura cette valeur de y sous la forme marquée S.

$$S \ldots y = \frac{dd}{x - c}$$

Dégageant y de la seconde proposée O, on trouve $y = \frac{add + cxx - x^3}{ax - ac}$. Et ne substituant $x = c$ que dans le

numerateur, on aura $y = \frac{add}{ax - ac}$. Où l'on voit que la fraction s'abrége en diviſant ſes deux termes par a, & que ce diviſeur étant connu, comme il eſt, la diviſion ne peut rien changer dans la valeur des inconnuës. Ainſi cette derniere égalité ſe réduit à celle-cy : $y = \frac{dd}{x - c}$ qui eſt la même que S.

Or cette valeur de y renferme encore x, & l'on a $x = c$. Donc en ſubſtituant dans S, on aura $y = \frac{dd}{0}$. Donc $x = c$ & $y = \frac{dd}{0}$ déſigne une Solution du Problême N, O. Il eſt vray que la valeur de y eſt une grandeur infinie dans N & infinie dans O. Mais il paroît que ces deux infinis ſont parfaitement égaux. Car l'un & l'autre eſt exprimé par la valeur de y qui eſt en S. Or il eſt évident que cette valeur ſera toûjours égale à elle-même en prenant pour x une valeur arbitraire. Donc elle ſera égale à elle-même lorſque $x = c$.

Pour ſurcroît de preuves on verroit que cette Solution du Problême N, O, ſe trouveroit dans l'effection géometrique, ſi l'on conſtruiſoit pleinement les Courbes qu'expriment ces deux Egalitez ſur un même axe & une même origine ; enſorte que la grandeur indiquée par $y = \frac{dd}{0}$ ſeroit exprimée par la diſtance qui ſe trouve entre l'axe des x & le point où ces Courbes rencontrent une aſymptote qui leur eſt commun, & l'on verroit auſſi que ce point de rencontre doit être le point d'attouchement deſigné par les racines égales de la réduite Q. Il eſt vrai que la valeur finie de x ſeroit inacceſſible, mais on peut prouver qu'elle eſt dans la conſtruction ſur l'hypothéſe que rien ne manque à la Methode des Effections géometriques. Il en ſera encore parlé dans la ſuite.

2°. Cependant en ſubſtituant $x = c$; non dans P ; mais dans les Propoſées N, O. On trouvera les deux contradictions $dd = 0$. $add = 0$. Ce qui combat la définition des Egalitez réſoluës, & il eſt certain auſſi que le Problême

eſt impoſſible dans le fini. Mais ces contradictions deviennent infiniment petites lorſque y eſt infiniment grande, comme on le dira icy.

3°. On voit encore dans cette Subſtitution que l'Inconnuë y ne reçoit aucune détermination & que les deux contradictions diſparoiſſent lorque $d = \theta$. De maniére que dans ce cas la Solution du Problême N, O, que j'ai indiquée ici ne ſe trouveroit pas, & que dans ce même cas ce Problême eſt capable d'une infinité de Solutions finies. C'eſt-à-dire que $x = c$ & $y = c$ en ſeroient alors une Solution. Que $x = c$ & $y = 2c$ en ſeroient auſſi une Solution. Ainſi de ſuite à l'Infini.

REMARQUE I. Si l'on compare les deux égalitez N, O, pour faire évanoüir x, on aura occaſion d'y faire des remarques fort curieuſes : mais il ne ſeroit peut-être pas facile d'en tirer une ſolution dans l'infini, quoique la contradiction qui déſigne cette ſolution ſoit un diviſeur de la réduite, parce que ce diviſeur n'a que des quantitez connuës, & que celui qui renferme l'inconnuë ne fournit que des racines imaginaires. Un exemple moins composé fera mieux voir cette difficulté. Soit cet exemple T, V.

$T \ldots yx - ay = ad.$

$V \ldots yx = dx + ay.$

Si l'on fait évanoüir y, l'on aura la Solution $x = a$, $y = \frac{ad}{\theta}$. Mais en faiſant évanoüir x la réduite ſera $dda = \theta$, qui eſt une marque ordinaire de l'impoſſible, & cette réduite ne renfermant aucune inconnuë, il ne peut point y avoir de ſubſtitution retrograde. Mais la contradiction de cette réduite donne lieu de chercher la ſolution $x = a$, $y = \frac{ad}{\theta}$, & l'on n'auroit pas cet avantage dans l'exemple précedent ; parce qu'en faiſant évanoüir x, la contradiction ne paroît pas dans la réduite comme dans celle de T, V.

REMARQUE II. Si l'on diviſe par y les deux Egalitez du Problême T, V, il ſera exprimé comme en A, B.

$A \ldots x = \frac{ad}{y} + a. \qquad B \ldots x = \frac{dx}{y} + a.$

Et ſubſtituant a au lieu de x, on aura $\frac{ad}{y}$. Ainſi ce Problême ſeroit réſolu ſi $\frac{ad}{y}$ étoit entierement détruite. Prenant $y = 100000a$, on aura $\frac{d}{100000}$ pour la valeur de la contradiction $\frac{ad}{y}$, & ſi à la place de 100000 on ſuppoſe un nombre d'une grandeur infinie ; il eſt clair que d ſera infiniment diviſé. D'où il ſuit que la contradiction ſeroit alors infiniment petite ſi le Problême étoit ſous la forme A, B, & comme la géneration des Courbes qu'expriment ces deux Egalitez, répond à cette derniere forme, on peut dire qu'en Géometrie le Problême ſe réſout dans l'infini : Il en eſt de même du Problême N, O, & de ſes ſemblables. En cela, il ſuffit à l'égard de l'Infini, de ſçavoir que l'idée que nous en avons renferme la négation du fini, parce que je ne parle ici des Solutions dans l'Infini, que pour faire voir dans la ſuite, comment on peut les diſtinguer des Solutions dont toutes les valeurs ſont finies. Ce qui eſt abſolument néceſſaire pour démontrer l'étenduë, & l'infaillibilité de la Méthode en queſtion, quand on l'aura reformée.

REMARQUE III. Si l'on a une Egalité comme C.

$$C \ldots yy = \frac{a^4}{x^3 - 4axx + 5aax - 2a^3}.$$

En prenant $x = a$, on aura $yy = \frac{aa}{\theta}$ qui eſt une des formules de l'Infini aſymptotique, & il eſt vrai auſſi que cette Courbe a des aſymptotes réels qui ſont des valeurs de y. Mais cette formule n'en déſigne aucun. Elle n'exprime aucune grandeur lorſque θ eſt pris pour un rien abſolu ; & ſi l'on prend θ pour un point réel, la ligne infiniment longue qu'elle exprimera, n'eſt pas un aſymptote. C'eſt alors une ligne hors de la Courbe que fournit C ; de maniere que cette Droite & cette Courbe ne peuvent ſe rencontrer ni dans le Fini ni dans l'Infini.

Si l'on a les deux Egalitez D. E.

$$D. \frac{aax - 3a^3}{x - a} = yy. \qquad E. yy = \frac{a^3x - 3a^4}{xx - 2ax + aa}.$$

Alors $x = a$ donnera $y = \sqrt[2]{\frac{-2ax}{0}}$ dans D & dans E. L'aſymptote que déſigne cette formule eſt réel dans D; mais celui qu'elle déſigne pour E, eſt un aſymptote imaginaire dans le ſens de l'exemple C, & il y auroit même une autre condition pour l'exclure des aſymptotes réels.

Je ne parle point des Formules de l'Infini qui viennent des valeurs imaginaires que l'on ſubſtituë, parce que cet inconvenient, quand il peut tromper, eſt ordinairement combiné avec d'autres inconveniens dont je n'ai encore rien dit. C'eſt par une ſemblable raiſon, que je ne marque point ici les cas où il ne paroît pas poſſible d'exprimer par ſes formules les aſymptotes qui peuvent ſervir à réſoudre des Problêmes dans l'infini. Mais on pourra voir quelque choſe de ces difficultez dans la Remarque qui ſuit.

REMARQUE IV. Lorſque dans un Problême une des Inconnuës ne ſe trouve que dans une des Egalitez, & que parmi ſes valeurs il y en a d'infinies, on n'a pas beſoin de voir ſi ces Infinis ſont égaux à d'autres Infinis pour réſoudre ce Problême; & s'il ſe trouve auſſi que cette inconnuë n'ait point de termes moyens dans cette Egalité, on eſt certain que ces Infinis ſe réduiſent, du moins *à parte rei*, aux Formules telles que $\frac{nn}{0}$. Mais avec tous ces avantages il ne laiſſe pas d'y avoir fort ſouvent des difficultez notables, lorſque les Quantitez qu'il faut ſubſtituer ſe trouvent incommenſurables. On voit un indice de ces difficultez dans le Problême F, G.

$$F \ldots yy = \frac{a^4xx - a^6}{x^3 - 3aax + a^3}.$$

$$G \ldots x^6 + 9a^4\,xx + a^6 = 6aax^4.$$

On peut dire en un ſens que ce Problême eſt capable de douze ſolutions. Il en a quatre réelles dans le Fini; il en a ſix réelles dans l'Infini, & les deux autres ſont imaginaires. Si en cherchant à réſoudre ce Problême, on a en vûë la Méthode en queſtion, on reconnoîtra qu'il faut y ajoûter de nouvelles régles, & qu'il eſt bon ou

même nécessaire de marquer les difficultez de cette Méthode séparément, pour mieux faire voir dans la suite, comment elles s'impliquent dans des Exemples plus composez.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

On peut voir à l'occasion de cet Exemple, les apparences alternatives du possible & de l'impossible, lorsque les limites des Egalitez proposées & les racines de leur réduite sont des quantitez incommensurables.

Les Egalitez du Problême, sont celles qu'on voit icy en *A* & *B*.

A. $yyx^4 + 3a^3yyx + a^6 = aax^4 + a^3x^3$.

B. $x^6 + 7a^3yyx + a^6 = 3yyx^4 + a^3x^3 + 7a^5x + a^4yy$.

Dégageant *yy* dans *A* on aura *C*.

$$C \ldots yy = \frac{aax^4 + a^3x^3 - a^6}{x^4 + 3a^3x}.$$

Et substituant dans *B*, il en résultera *D*.

$$D \ldots x^{10} - 3aax^8 - a^3x^7 + 7a^6x^4 - a^7x^3 - 21a^8xx - 4a^9x + a^{10} = 0.$$

Suivant la Méthode il faut prendre chaque racine réelle de la réduite *D*, & la substituer à la place de *x* dans l'égalité du dégagement *C* pour avoir les valeurs de *y*. Mais toutes les racines réelles de *D* sont incommensurables, & ne peuvent être tirées de cette Egalité par la voye des signes radicaux ni par la voye des Effections géometriques, d'une maniere qui convienne à la résolution du Problême. Ainsi, il ne paroît point d'autre voye pour cette recherche que celle des approximations. En quoi il seroit facile de se méprendre si l'on ne suivoit en cela que les régles ordinaires. Il est vray que par la Méthode des Cascades algébriques, on peut avoir par approximation toutes les racines réelles de la réduite *D*; en sorte que l'erreur soit plus petite qu'aucune quantité donnée, & distinguer, par cette Méthode, toutes ces racines, des imaginaires que cette égalité renferme : mais ce n'est pas assez pour faire un Suplément à la Méthode qui est icy en question. Il ne s'agit pas seulement des valeurs de *x*,

il faut encore diſtinguer parmi celles de y, les réelles des imaginaires dans la ſubſtitution retrograde des racines de *D*. On trouvera par exemple, qu'une de ces racines eſt entre a & θ; enſorte que a eſt proche de cette racine; & ſi l'on s'aviſoit de ſubſtituer a dans *C* à la place de x pour avoir les valeurs de y, on trouveroit $y = \frac{1}{2}a$ & $y = -\frac{1}{2}a$ qui ſont, comme l'on voit, des valeurs réelles. Cependant la véritable racine de *D* qui eſt entre a & θ, ne donne dans *C* que des valeurs imaginaires pour y. En d'autres occaſions, au contraire, la ſubſtitution de la racine approchée donneroit des valeurs imaginaires pour y lorſqu'elle doit donner des valeurs réelles. Mais en rappellant ici la Méthode des queſtions indéterminées que je publiai en 1699; cette Méthode donnera les limites de x dans *C*; & comparant ces limites approchées aux racines approchées de *D*, on découvrira tout ce qu'il y a de réel & d'imaginaire dans le Problême propoſé.

Si l'on fait l'approximation de ces racines & de ces limites par les nombres les plus ſimples qui ſe préſentent, on aura ici pour les limites approchantes de *D*, les nombres qui ſont en *E*, *F*, *G*, *H*. Et pour les limites de x dans *C*, on trouvera les nombres *K*, *L*, *M*, *N*.

E. $2.\ 1\frac{1}{2}$.	*D*.	*K*. $1.\ \frac{1}{2}$.	*C*.
F. $\frac{1}{2}$. θ.		*L*. θ.	
G. $-\frac{1}{3}.\ -\frac{1}{2}$.		*M*. $-\frac{82}{60}.\ -\frac{83}{60}$.	
H. $-1\frac{1}{2}.\ -1\frac{2}{3}$.		*N*. $-\frac{83}{60}.\ -\frac{84}{60}$.	

C'eſt-à-dire que dans *D*, il y a une racine entre les deux nombres qui ſont en *E*, une autre racine entre $\frac{1}{2}$ & θ qui ſont en *F*. Encore une entre $-\frac{1}{3}$ & $-\frac{1}{2}$. Et une auſſi entre $-1\frac{1}{2}$ & $-1\frac{2}{3}$.

On verra que dans *C* les limites de x ſont *K*, *L*, *M*, *N*, c'eſt-à-dire, qu'une des limites eſt entre 1 & $\frac{1}{2}$. Que la ſeconde limite eſt θ; la 3[e] entre $-\frac{82}{60}$ & $-\frac{83}{60}$, & que la 4[e] eſt entre $-\frac{83}{60}$ & $-\frac{84}{60}$.

Par la Méthode des indéterminées qui donne ces limites de *C*, on voit que toutes les valeurs réelles de *x* qui sont au-dessus de *K* donnent dans *C* deux valeurs réelles de *y* : Que toutes les valeurs de *x* entre *K* & *L* ne donnent dans *C* que des valeurs imaginaires pour *y* : Que les valeurs de *x* prises dans l'intervale *LM* donnent deux valeurs réelles de *y* : Que l'intervalle *MN* ne fournit que des imaginaires pour *y* ; & que l'intervale indéfini au dessous de *N*, donne deux valeurs réelles de *y*. C'est-à-dire, qu'en prenant pour *x* des nombres à volonté au-dessous de *N* comme — 2. — 3. — $4\frac{1}{3}$. — 100 &c. chacun de ces nombres donnera deux valeurs réelles de *y* dans *C*.

Alors, il est facile de voir en comparant les termes des racines de *D* aux termes des limites de *C*, que des quatres racines réelles de la réduite, celles qui sont marquées *E*, *G*, *H*, étant substituées dans *C*, chacune donnera des valeurs réelles de *y*. Mais que la racine *F* substituée dans *C* ne donnera que des imaginaires pour la valeur de cette inconnuë. D'où il suit que le Problême *A*, *B*, de ce 4e. Exemple est capables de six solutions réelles, & qu'il ne peut pas en avoir d'autres dans le Fini.

Il y a un très-grand nombre d'exemples où il arrive comme dans celui-cy, que les intervales des limites de l'Egalité où se doit faire la substitution retrograde, donnent alternativement des valeurs réelles & des valeurs imaginaires ; ensorte qu'il faut poursuivre l'approximation de ces limites & des racines de la réduite jusqu'à ce que chacune de ces racines soit comprise dans l'intervale qui luy est propre, pour éviter bien des méprises.

REMARQUE. Si l'on se propose l'Egalité *O*, & que pour la construire par la Méthode ordinaire des effections géometriques, on prenne l'Egalité *A* de ce 4e Exemple pour le premier lieu,

$$O \ldots x^7 + 7a^6x - a^7 = 0.$$

On trouvera que les Courbes se rencontrent en six points, & que des six racines que donne la construction, il n'y en a aucune qui appartienne à l'Egalité *O*, quoique

que cette Egalité ait une racine réelle.

On pourra s'assûrer de cet inconvenient par le moïen du détail précedent ; & l'on aura occasion d'y voir que la difficulté de reconnoître de pareils inconveniens, est souvent une difficulté fort considerable.

De l'Usage ordinaire des Divisions actuelles que la Méthode prescrit.

ARTICLE II. Dans la Méthode en question, le dégagement des Inconnuës se fait presque toûjours par une division ou actuelle, ou intentionelle.

Il y a quantité d'Exemples où la division se peut faire actuellement, & dans ce cas on peut faire aussi, ou que la valeur dégagée n'ait point de fraction, ou bien que la fraction qui en résulte soit conçuë en termes plus simples qu'elle ne l'auroit été sans cette division. Comme l'on a très-souvent l'occasion de ces divisions actuelles, lorsque l'inconnuë qu'on fait évanoüir passe le 3e degré dans chacune des deux égalitez proposées, les inconveniens de la Méthode sont aussi en cela fort considerables. Car dans l'usage de cette Méthode on a de coûtume de rejetter les diviseurs exacts qui servent aux dégagemens, sans rien dire de ce qui obligeroit de retenir ces diviseurs, & de là il arrive souvent, que des questions possibles, qui quelquefois ont une infinité de solutions, se changent en questions impossibles, ou en questions qui n'ont pas toutes les solutions des Proposées.

En d'autres Exemples, la division du dégagement ne sçauroit être qu'intentionnelle, comme on a pû le voir dans l'article précedent ; mais si la division se peut faire actuellement, & que neanmoins on ne la fasse qu'intentionnellement ; alors les Problêmes déterminez & les Problêmes impossibles se changent très-souvent en Problêmes indéterminez & capables d'une infinité de solutions réelles & finies, quoique l'on conduise le jeu analytique de la même maniere qu'on le conduit lorsque les divisions du dégagement ne peuvent être qu'intentionnelles.

De ces deux inconveniens fondamentaux il en résulte un troisiéme inconvenient, qui est digne de l'attention

des Geometres. Car dans la plûpart des Problêmes où il y a occasion de faire une division exacte pour le dégagement d'une inconnuë, on tombe dans l'un ou dans l'autre des deux principaux écueils que je viens de marquer, soit que l'on fasse cette division actuellement, ou qu'on ne la fasse qu'intentionnellement. Il y a des Problêmes néanmoins, où les deux manieres de diviser ne jettent que dans un même écueil; mais cet écueil est different des autres.

Voicy des Exemples où je tâcherai d'expliquer ces difficultez & de marquer les moyens dont je me sers pour les résoudre.

PREMIER EXEMPLE.

Dans cet Exemple le Problême est indéterminé & capable d'une infinité de Solutions. Cependant la Méthode n'en donne que deux.

Le Problême proposé est celui qu'expriment les Egalitez A, D. Les inconnuës sont x. y.

$A \ldots xxy - aay = 2axx - 2a^3$.

$B \ldots yxx + 2aay + 3aax = 3axy + axx + 2a^3$.

Dans le dessein qu'on auroit de résoudre ce Problême, le meilleur parti selon la Méthode est de faire évanoüir y & de le dégager de l'égalité A en divisant chaque membre de cette égalité par $xx - aa$. Si l'on se contentoit d'une division intentionnelle, on auroit $y = \frac{2axx - 2a^3}{xx - aa}$, mais en divisant actuellement, on trouve que le dégagement donne l'Egalité C.

$C \ldots y = 2a$.

Suivant la Méthode il faut substituer cette valeur de y dans B. Ce qui donne la réduite D.

$D \ldots xx - 3ax + 2aa = 0$.

Dont les racines sont $x = a$ & $x = 2a$, qu'il faudroit substituer à la place de x dans l'Egalité du dégagement C, Mais comme cette inconnuë ne s'y trouve pas, & que sans cela on y trouve une valeur connuë de y, la substi-

tution retrograde que prefcrit la Méthode n'a point de lieu dans cet Exemple. Ainfi, il faudroit conclure felon cette Méthode que ce Problême n'a que deux Solutions; l'une $y = 2a$, $x = a$, l'autre $y = 2a$, $x = 2a$. Cependant ce Problême en a une infinité. Car en faifant $x = a$, par cela feul les deux propofées *A*, *B*, font réfoluës. Ainfi, l'on peut prendre pour y une valeur telle qu'on voudra.

REMARQUE I. Il eft évident qu'en rejettant le divifeur $xx - aa$, c'eft de l'Egalité *A* en faire l'Egalité *C* & transformer le Problême indéterminé *A*, *B*, en un Problême déterminé *B*, *C*.

REMARQUE II. Si en dégageant y de *A*, l'on s'étoit fervi de la divifion intentionnelle, on auroit trouvé l'indétermination de ce Problême en fubftituant les racines de la réduite dans l'égalité du dégagement, il eft vrai auffi que cette divifion retient le divifeur qui a été rejetté. Ce qui juftifieroit l'ufage de cette efpece de divifion, & remedieroit dans cet Exemple à un inconvenient de la Méthode. Mais il faut voir d'autres Exemples avant que de tirer ces conféquences.

REMARQUE III. Si l'on dégage y dans *B* par une divifion actuelle, on aura ces deux Solutions $y = a$, $x = a$. $y = a$, $x = -a$.

SECOND EXEMPLE.

Selon la Méthode le Problême paroît impoffible. Cependant il eft capable de quatre differentes folutions.

Les Propofées font *E*, *F*.

E... $xxy - bby = 2bxx - 2b^3$.

F... $bxx + 9b^3 + xyy = 4bbx + 2byy$.

Dégageant y dans *E* par une divifion actuelle on aura *G*.

G... $y = 2b$.

Subftituant dans *F* on trouvera la Réduite *H*.

H... $xx + bb = 0$.

Qui eft, comme l'on voit, tout-à-fait imaginaire. D'où il faudroit conclure felon la Méthode, que le Problême

E, F, eſt impoſſible. Dans ce Problême néanmoins ſe trouvent les quatre ſolutions qui ſont en I, & K.

$$I.\begin{cases} x=b\,.\,y=\sqrt[2]{6bb} \\ x=b\,.\,y=-\sqrt{6bb} \end{cases} \qquad K.\begin{cases} x=-b\,.\,y=\sqrt{\frac{14}{3}bb} \\ x=-b\,.\,y=-\sqrt{\frac{14}{3}bb} \end{cases}$$

REMARQUE. Cette queſtion eſt déterminée ; cependant la diviſion intentionnelle du dégagement en auroit fait une queſtion indéterminée & capable d'une infinité de ſolutions. Ce qu'il faudra comparer à la ſeconde remarque du premier Exemple pour voir que le Remede qu'on y propoſe ne feroit pas géneral.

TROISIE'ME EXEMPLE.

La Réduite eſt contradictoire, & néanmoins le Problême eſt poſſible.

Les deux Egalitez du Problême ſont L, M.

$L \ldots xxy-9bby=2bxx-18b^3$

$M \ldots xxyy+15b^4=4bbxx+4bbyy.$

Diviſant actuellement L par $xx-9bb$, on aura le dégagement N. $\quad N \ldots y=2b.$

Subſtituant dans M, on ne trouvera pour réduite que la contradiction O. $\quad O \ldots b^4=0.$

Ainſi, ſelon la Méthode, il faudroit conclure que la queſtion eſt impoſſible. Cependant elle a ces quatre ſolutions.

$1 \ldots x=3b,\ y=\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}.$

$2 \ldots x=3b,\ y=-\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}.$

$3 \ldots x=-3b,\ y=\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}.$

$4 \ldots x=-3b,\ y=-\sqrt[2]{\frac{21}{5}bb}.$

REMARQUE I. La contradiction O déſigne une ſolution dans l'Infini, qui convient à l'égalité M, mais qui ne convient pas à l'égalité L, ni par conſéquent au Problême propoſé.

REMARQUE II. Si l'on s'avise de résoudre ces trois Problêmes par des effections géometriques, on aura occasion d'observer une difficulté dans la construction des lieux qui est indiquée dans les Memoires du 11. Juillet 1708, & qui est expliquée dans le Memoire du 9 Aoust 1709; mais dont l'explication n'a pû être comprise dans l'impression de ces Memoires, & qui ne peut encore être inferée dans celui-cy.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple le Problême est possible & déterminé. Cependant la Methode le fait paroître impossible quand on dégage l'Inconnuë par une division actuelle, & indéterminé lorsque le dégagement se fait par une division intentionnelle. On voit encore dans cet Exemple, qu'il n'est pas facile de reconnoître l'indétermination lorsque les racines de la Réduite sont incommensurables. En sorte que l'on ne sçauroit éviter ces inconveniens par la Methode en question, quelque choix que l'on fasse des Egalitez & des Inconnuës dans le début & dans la suite des Operations.

Les deux Egalitez de ce Problême sont P & Q.

$P \ldots yy + xy + xx + bn = ay + ax.$

$Q \ldots xxyy + cnny + cnnx = bnxy.$

Dégageant yy dans la premiere on aura R.

$R \ldots yy = ay - xy - xx + ax - bn.$

Substituant dans la seconde, cette valeur de yy, on aura la résultante S,

$S.\ x^3y - axxy + bnxy - cnny = -x^4 + ax^3 - bnxx + cnnx.$

Divisant actuellement chaque membre de cette Egalité S, par $x^3 - axx + bnx - cnn$, on aura le second & dernier dégagement T.

$T \ldots y = -x.$

Suivant la Méthode il faut substituer cette valeur de y dans R, & la substitution donne la Réduite V.

$V \ldots xx = -bn.$ ou. $x = \pm\sqrt{-bn}.$

qui est, comme on voit, absolument imaginaire. Ainsi,

il faudroit conclure selon la Méthode, que la question de ce 4e Exemple est une question impossible, lorsque le dégagement de y se fait dans la résultante S par une division actuelle.

On évite cet écüeil, & l'on tombe dans un autre; quand on fait ce dégagement par une division supposée. Alors, on le trouve comme on le voit en Z.

$$Z \ldots y = \frac{-x^4 + ax^3 - bnxx + cnnx}{x^3 - axx + bnx - cnn}.$$

Substituant cette valeur de y dans R ou P comme le prescrit la Methode, on aura la réduite Δ.

$$\Delta \ldots \overline{x^3 - axx + bnx - cnn}^2 \times \overline{xx + bn} = 0.$$

Dans laquelle il se trouvera toûjours du moins une racine réelle, & il peut y en avoir trois differentes entr'elles, selon les grandeurs & les rapports des quantitez connuës a, b, c.

Suivant la Méthode, il faudroit substituer ces racines dans Z pour avoir les valeurs de y. Mais quand même il n'y auroit point d'écüeil à craindre, il faut demeurer court (si l'on n'a point d'autre voïe) tandis que les quantitez connuës demeurent en termes géneraux; & l'on y trouveroit encore une difficulté si ces quantitez étant conçûës en termes particuliers les racines étoient incommensurables du 3e degré, comme on le verra si l'on prend $a = 7n$. $b = 12n$. $c = 8n$. Car l'approximation des racines de Δ ne découvriroit point l'écüeil qui est en Z; il faut pour le connoître par cette voïe, que ces racines aïent toute leur valeur, & n'aïent rien de superflu.

Mais si l'on a, par exemple, $a = 6n$, $b = 11n$, & $c = 6n$; alors les racines de Δ se trouveront commensurables: ces racines seront $x = n$, $x = 2n$, $x = 3n$, & chacune étant substituée dans Z, on verra dans toutes ces substitutions que l'inconnuë y ne reçoit aucune détermination, & qu'en faisant le dégagement de y dans S par une division supposée, la Méthode ne donne pas la solution du Problême déterminé P, Q; & le transforme en un Problême Z, Δ, qui est véritablement indéterminé.

Ainsi, soit que l'on ait dégagé y de S, ou effectivement ou par supposition, la Méthode conduit dans l'un ou dans l'autre des deux écüeils que j'ai marquez ici. Dans le premier, elle exclut toutes les solutions du Problême : dans le second, elle introduit une infinité de solutions étrangeres sans y faire distinguer celles qu'il faut trouver.

On tomberoit dans de pareils inconveniens, si l'on faisoit évanoüir x. Les inconveniens seroient encore de même, si les premiers dégagemens pour l'une & pour l'autre inconnuë se faisoient dans la seconde égalité ; & à cela se joindroient d'autres inconveniens si l'on commençoit par les derniers termes des proposées. Mais en substituant, quand on le peut, les racines de Δ dans l'une des proposées, on trouvera les solutions du Problême.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Ce Problême est absolument impossible. Cependant il paroît possible & même capable d'une infinité de solutions, par la Méthode en question.

Les deux Egalitez sont A & B.

$A \ldots yy - xy + xx = 0$.

$B \ldots yy - ry + rr = 0$.

Dégageant yy dans l'une des deux à volonté, & substituant dans l'autre on aura C.

$C \ldots xy - ry = xx - rr$.

Sur quoy on peut faire ces remarques.

1°. Si l'on dégage y dans C par une division intentionnelle, on aura D.

$$D \ldots y = \frac{xx - rr}{x - r}.$$

Et substituant cette valeur de y dans A ou B à volonté, on trouvera la Réduite E.

$E \ldots x^4 - rx^3 - r^3x + r^4 = 0$.

Dont les deux racines réelles sont égales, & chacune est $x = r$.

2°. Si l'on substituë cette racine en retrogradant D, on verra que l'inconnuë y ne reçoit aucune détermina-

tion & que la résultante n'a rien de contradictoire. D'où il faudroit conclure, selon la Méthode, que le Problême *A*, *B*, est non-seulement possible, mais encore capable d'une infinité de solutions réelles. Cependant à la seule inspection de ce Problême, on s'assûre qu'il n'a aucune solution réelle. Ainsi d'un Problême impossible *A*, *B*, la Méthode en a fait un Problême possible *E*, *D*, ou *E*, *C*, qui a une infinité de solutions réelles.

3°. Si de *C*. on dégage y par une division actuelle, on aura *F*. $F \ldots y = x + r$.
Et si l'on fait la substitution retrograde de la racine $x = r$, dans ce dégagement *F*, on aura $y = 2r$, d'où il sembleroit que le Problême proposé *A*, *B*, seroit possible, & que $x = r$, avec $y = 2r$ en seroient une solution.

Ainsi, les deux substitutions retrogrades produisent deux differens effets, selon les differentes manieres de dégager y, & l'une & l'autre feroient croire que les Egalitez *A*, *B*, expriment un Problême réel, quoique ces deux égalitez soient imaginaires.

REMARQUE. I. Si l'on rejettoit le dégagement *D* pour prendre le dégagement *F* qui a été fait par une division actuelle, la réduite n'auroit que des racines imaginaires : ce qui seroit conforme au Problême. Mais l'on a vû dans le second Exemple, qu'en dégageant par une division actuelle, la réduite ne renferme aussi que des racines imaginaires, & que néanmoins le Problême est possible. Ainsi cette espece de division produit des apparences contraires, quand on ne fait que ce que prescrit la Méthode en question.

REMARQUE II. Il semble dans cette Méthode que les Diviseurs actuels n'aïent point d'autre usage en comparant deux égalitez pour l'évanoüissement d'une inconnuë, que d'abreger le calcul. Cette apparence est encore plus forte lorsque la division se fait par un simple effacement d'une autre inconnuë. Cependant il se trouve des cas où l'on tomberoit dans un inconvenient considerable, si l'on rejettoit ces diviseurs comme on le fait ordinairement

ordinairement, & si l'on négligeoit d'en regler l'usage. Pour en voir un Exemple, supposons que l'on veüille construire par la voïe ordinaire des effections géometriques, l'égalité marquée G.

$$G \ldots x^4 - 4aaxx - 16a^3x - 16a^4 = 0.$$

Et que le premier lieu soit H.

$$H \ldots yxx + 2xx = 2aax + 6aay + 4a^3.$$

Alors dégageant xx dans H pour faire évanoüir x^4 dans G, le résultat de la substitution se divisera par y & la division donnera I.

$$I \ldots yxx + 2axx + 4axy + 2aax - 5aay - 4a^3 = 0.$$

Qui se divise encore par $x - a$ & la division donne K.

$$K \ldots xy + 5ay + 2ax + 4aa = 0.$$

Ainsi, le second lieu seroit l'hyperbole qu'exprime K. Mais cet abregement exclut toutes les racines réelles de la proposée. De maniere, qu'en comparant le premier lieu H avec le second lieu I ou K, pour faire évanoüir y; la réduite qui devroit être la même que G ou la renfermer, en sera fort differente. Car aucune des racines réelles de G ne se trouvera dans cette réduite; & l'on verra que l'exclusion de ses racines ne vient que de la division qui s'est faite en effaçant y du résultat de la substitution. Tout au contraire, on verra que la construction donne une racine étrangere que la Méthode a introduite: Que la seconde division n'a point détaché cette racine; quoiqu'elle soit comprise dans son diviseur, & que ce diviseur aïant été rejetté, le second lieu K ait demeuré indivisible.

REMARQUE III. Le dessein qu'on a eu dans ce Memoire, n'est pas de faire voir que les inconveniens de la Méthode en question regardent toutes les Méthodes fondamentales de la Geometrie analytique. J'apporterai seulement ici un Exemple sur les Recherches de *Max.* & *Min.* pour donner occasion de penser au reste.

Si l'on se propose de trouver les *Max.* & *Min.* de v. dans l'Egalité L.

$$L \ldots z^4 - 8z^3 + 18zz - 8z + 1 = v.$$

Les Méthodes que les Geometres ont données pour cette recherche forniront l'Egalité *M*.

$M \ldots z^3 - 6zz + 9z - 2 = 0$.

De maniere que le Problême exprimé par *L*, *M*, étant résolu, on aura ce qu'on demande. Et si pour le résoudre par la Méthode en question on fait évanoüir *z*, elle donnera les deux Egalitez *N*, *O*.

$N \ldots 3zz - 12z + v + 3 = 0$.

$O \ldots vz = 2v$.

Ensorte que pour continuer à faire évanoüir *z*, il faut la dégager dans *O*, & substituer sa valeur dans *N*. Si l'on fait ce dégagement par une division actuelle en effaçant *v*, on aura $z = 2$, & la substitution dans *N* donnera la Réduite *P*.

$P \ldots v - 9 = 0$.

La substitution retrograde de $v = 9$ ne donne que $z = 2$. D'où il faudroit conclure selon la Méthode en question, que le Problême *L*, *M*, n'a point d'autre solution que $z = 2$ & $v = 9$. Cependant il y en a encore deux qui se sont échapées en effaçant *v* dans *O* pour le dégagement de *z*.

Aïant trouvé $z = 2$, par le dernier dégagement, & cette valeur étant connuë, comme elle l'est icy, l'usage ordinaire est d'en demeurer là, comme si cela donnoit tous les *Max.* & *Min.* Ainsi, ni selon cet usage, ni par cette Méthode, on ne trouveroit pas $z = 2 \pm \sqrt[2]{3}$, qui donnent deux *Minima* de *v* dans *L*. Ce qui n'est pas, comme l'on voit, un défaut de celles de *Max.* & *Min.*

REMARQUE IV. Si l'on veut remedier aux inconveniens de la Méthode qui sont indiquez par les précédens Exemples de ce second article.

1°. On se servira de divisions actuelles dans tous les dégagemens autant qu'il sera impossible.

2°. On supposera que chaque diviseur actuel est égal à 0, lorsqu'il renferme quelque inconnuë, & cette égalité avec celle qui précede immédiatement l'égalité divisée,

exprimeront un Problême particulier dont toutes les solutions appartiennent au Problême principal ; dans l'hypothêse que ce Problême n'a que deux égalitez.

Ainsi, dans l'Exemple de la Remarque 3, le diviseur v donnera $v = \theta$, & cette égalité E avec l'égalité N, formeront le Problême particulier que l'on voit icy en Q.

$$Q \ldots \begin{cases} 3zz - 12z + v + 3 = \theta. \\ v = \theta. \end{cases}$$

Dont les deux solutions sont celles que la Méthode avoit excluës du Problême principal L, M.

En formant ainsi un Problême particulier pour chaque diviseur actuel, on aura des solutions incomplétes dans certains cas. Les substitutions retrogrades poussées jusques aux égalitez du Problême principal, donnent aussi des valeurs superfluës. Mais ces mêmes substitutions étant réglées suivant la Méthode des indéterminées, font connoître les valeurs qu'on doit retenir, & celles qu'on doit rejetter. Ce qui suffit pour ne rien échaper de nécessaire, en attendant que l'on puisse donner une Théorie nouvelle & de nouvelles régles pour abreger ces recherches & pour s'assurer du succez.

SIXIE'ME EXEMPLE.

Dans cet Exemple, la Réduite du Problême n'est ni réelle, ni imaginaire, ni contradictoire. En faisant évanoüir une des inconnuës, l'autre disparoît en même tems & ne reçoit aucune détermination. Cependant, ce Problême est ou déterminé, ou impossible, selon le plus ou le moins de grandeur des quantitez qui composent les coëfficiens.

Les deux égalitez du Problême sont A, B.

$$A \ldots ay^3 + axxy = bxyy + bx^3.$$

$$B \ldots ay^3 + axxy = x^4 + xxyy + aayy + aaxx.$$

Dégageant y^3 dans A & substituant sa valeur dans B, il en résultera C.

$$C \ldots xxyy - bxyy + aayy = -x^4 + bx^3 - aaxx.$$

Divisant C par $xx - bx + aa$, ou actuellement ou inten-

tionnellement à volonté, on aura la valeur de yy, & substituant cette valeur dans A, on verra que tout disparoît & que l'on n'a pour la Réduite que $0 = 0$, qui n'est comme l'on voit, ni imaginaire, ni contradictoire; & l'inconnuë x n'ayant reçu aucune détermination, il faudroit conclure selon la Méthode, que cette inconnuë est indéterminée, & que le Problême peut avoir une infinité de solutions réelles. Cela se trouve vray aussi sous de semblables indices en bien d'autres Exemples; mais il y en a encore beaucoup où cela n'est pas, & celui-cy en est un. Car la Méthode étant reformée nous fera voir que le Problême est déterminé, & que dans un cas il n'a que la solution de $y = 0$.

REMARQUE I. Pour remedier à l'inconvenient de cette Méthode qui est indiqué par ce 6e Exemple.

1°. On fera le dernier dégagement par une division actuelle, en observant quand il y a plusieurs diviseurs, de prendre celui qui les renferme tous, & l'on retiendra l'égalité du quotient. Ce qui donne dans cet Exemple l'Egalité D ou E.

$$D \ldots yy = -xx. \qquad E \ldots yy + xx = 0.$$

2°. On divisera les deux proposées A, B, par l'égalité du quotient qui est ici l'égalité E, & l'on aura deux autres quotiens. On supposera que chacun de ces quotiens est égal à 0, & l'on aura dans ce même Exemple les deux égalitez F, G.

$$F \ldots bx - ay = 0. \qquad G \ldots xx + aa - ay = 0.$$

3°. On résoudra le Problême qu'expriment les deux égalitez telles que F, G, & toutes les solutions de ce Problême seront des solutions du Problême principal. Il est évident dans notre Exemple que le Problême particulier F, G, ne peut avoir que deux solutions: Que ces solutions sont réelles & differentes lorsque b surpasse $2a$; égales réelles lorsque $b = a$; & imaginaires lorsque $2a$ surpasse b. C'est là tout ce que ce Problême particulier fournit pour le Problême principal A, B.

4°. On résoudra l'égalité formée du premier quotient

(qui eſt auſſi un commun diviſeur des propoſées) & toutes les ſolutions dont elle ſera capable, appartiendront encore au Problême principal. Comme l'Egalité E n'a point d'autre ſolution que $y=0$, $x=0$; c'eſt la ſeule qu'elle peut fournir pour A, B.

REMARQUE II. On a pû voir à l'occaſion de ce 6e Exemple, que la Méthode des indéterminées eſt ſouvent néceſſaire pour diſtinguer le poſſible de l'impoſſible, dans le Problême particulier qui fourniſſent les deux quotiens du commun diviſeur, lorſque les égalitez ſont conçûës en termes generaux. On y voit auſſi que cette Methode eſt néceſſaire pour ſçavoir ſi l'égalité de ce diviſeur eſt réelle ou imaginaire, lorſqu'il renferme pluſieurs inconnuës, & pour ſçavoir encore quand il eſt véritablement déterminé, de combien de ſolutions il eſt capable. On aura un Exemple de ce dernier cas, ſi l'on ſe propoſe de conſtruire le Problême qu'expriment les Egalitez H, I.

$$H \ldots 2y^4 - 4ay^3 + 5xxyy - 6axxy + 3x^4 = 0. \quad \begin{matrix} -8axyy & -12ax^3 \\ +10aayy & +15aaxx \end{matrix}$$

$$I \ldots y^4 - 2ay^3 + 2xxyy - 2axxy + x^4 = 0. \quad \begin{matrix} -4axyy & -4ax^3 \\ +5aayy & +5aaxx. \end{matrix}$$

En faiſant évanoüir y, on trouvera que le commun diviſeur donne l'Egalité K.

$$K \ldots xx + yy + 5aa = 4ax = 2ay.$$

On verra qu'en diviſant H & I par K, les deux égalitez que donnent les deux quotiens expriment un Problême imaginaire. En ſorte que le Problême propoſé ne peut avoir d'autres ſolutions que celles de l'Egalité K. Mais par la Méthode des indéterminées, cette égalité K n'a que la ſolution $y=a$, $x=2a$. Ainſi, le Problême propoſé H, I, ne peut avoir que cette ſeule ſolution, malgré les apparences d'indétermination que l'on y voit, quand on n'y applique que la Méthode en queſtion.

REMARQUE III. Il y a des Exemples où l'on a occa-

ſion d'appliquer la régle que fournit la 4e Remarque du 5e Exemple, avant que de trouver le commun diviſeur, & cette régle conduit à celle de la premiere Remarque du 6e Exemple. Voici comment,

Les deux Egalitez ſoient L, M.

$L \ldots axxy - a^3y = nx^3 - aanx.$

$M \ldots xxyy + aacx = aayy + cx^3.$

Diviſant la premiere par $xx - aa$, on aura $ay = nx$. Et de là N.

$N \ldots y = \frac{nx}{a}.$

Subſtituant dans M, on aura la Réduite O.

$O \ldots nnx^4 - aacx^3 - aannxx + a^4cx = 0.$

dont les racines ſont $x = 0$. $x = a$. $x = -a$, & $x = \frac{aac}{nn}$

Ces racines ſubſtituées dans N donnent les 4 ſolutions: $x = 0$; $y = 0$: $x = a$, $y = n$: $x = -a$, $y = -n$: $x = \frac{aac}{nn}$, $y = \frac{ac}{n}$.

C'eſt-là tout ce que donne la Méthode en queſtion.

Mais ſelon la Régle de la 4e Remarque du 5e Exemple, il faut ſuppoſer que le diviſeur actuel $xx - aa$, eſt égal à 0, & prendre l'égalité M où ſe devoit faire la ſubſtitution, pour réſoudre le Problême que ces deux égalitez expriment. Ainſi, il faut réſoudre le Problême P, M.

$P \ldots xx - aa = 0.$

$M \ldots xxyy - aayy + aacx - cx^3 = 0.$

Si y ſe trouvoit dans P, on en pourſuivroit l'évanoüiſſement. Mais cette égalité ne renfermant pas cette inconnuë, elle eſt la Réduite du Problême P, M. Ainſi, ſuivant la Méthode, il faut ſubſtituer les Racines de P dans M. Si l'on y ſubſtituë $x = a$, ou $x = -a$, on trouvera $0 = 0$. Ce qui marque que les deux égalitez P, M, ont un commun diviſeur, & que ces deux racines y ſont compriſes. Ou, plus generalement, que ces égalitez ont un diviſeur commun qui renferme l'inconnuë x. Ainſi, comparant ces deux Egalitez pour faire évanoüir x, on auroit ce commun diviſeur, ſuivant la Régle de la pre-

miére Remarque du 6e Exemple. Il se trouve ici que ce diviseur est le même que P, & par la même régle toutes les solutions qui lui conviennent, conviennent aussi au Problême principal L, M. Or $x=a$ & $x=-a$ résolvent P. Donc ces deux valeurs résoudront L, M; & comme y ne reçoit aucune détermination dans P, il n'en recevra aucune dans L, M. De maniere qu'en prenant $x=a$, ou $x=-a$, à volonté, & pour y une grandeur arbitraire; on aura la solution du Problême proposé L, M. Ainsi $x=a$ & $y=m$, en font une solution: $x=-a$, $y=r$, une autre solution, &c.

Il faudroit encore suivant les Régles prendre le Problême qui se forme en divisant P, M, par P, mais un des quotiens donne $1=0$. Ce qui rend ce Problême inutile, & indique un abrégement de ces Régles. On peut voir aussi que $xx-aa$ étant un diviseur de P, M; il doit l'être du Problême principal L, M. Ce qui fournit une autre maniére de résoudre ce Problême & ses semblables.

REMARQUE IV. En transformant les Problêmes de Géometrie en Problêmes d'Algebre, il arrive en certains cas, que le Problême algébrique est indéterminé, quoique le Problême proposé soit déterminé. Par exemple, si l'on se propose la recherche des *Max.* ou *Min.* de x dans l'Egalité A.

$$A \ldots \left.\begin{array}{l} cy^6-2acxy^4+aacxxyy-aax^5+2abcy^4 \\ -2aabcxyy+2aabx^4-x^3y^4+aabbcyy \\ -aabbx^3+2ax^4yy-2abx^3yy \end{array}\right\}=0.$$

Les Méthodes les plus generales de *Max.* & *Min.* donneront l'Egalité B.

$$B \ldots \left.\begin{array}{l} 6y^5-8acxy^3+2aacxxy+8abcy^3-4aabcxy \\ -4x^3y^3+2aabbcy+4ax^4y-4abx^3y \end{array}\right\}=0.$$

Selon ces Méthodes la résolution du Problême A, D, doit donner tous les *Max.* & *Min.* de x dans A. Mais on n'y fait pas mention des cas où de tels Problêmes se trouvent indéterminez, & c'en est ici un Exemple. Car en faisant évanoüir x ou y à volonté, on trouvera $0=0$, & un commun diviseur qui donne l'Egalité C.

$C \ldots yy - ax + ab = 0$

de maniere qu'en prenant y à volonté, on aura toûjours une valeur de x, & que ces deux valeurs seront toûjours une solution du Problême *A*, *B*.

Les deux quotiens que donne ce diviseur fournissent le Problême particulier *D*, *E*.

$D \ldots cy^4 - acxyy + ax^4 + abcyy - abx^3 - x^3yy = 0.$

$E \ldots 6cy^3 + 2abcy - 2acxy - 4x^3y = 0.$

Parmi les Solutions de ce Problême on trouve que $y = 0$ donne $x = b$ & $x = 0$, qui sont deux *Min.* de x dans l'Egalité *A*. Comme cette inconnuë n'a point d'autres *Min.* ni aucun *Max.* dans cette égalité, on peut dire que le Problême particulier fournit tout ce que l'on demandoit du Problême principal, & c'est là un moyen pour résoudre la difficulté en pareils cas.

De plus, en appliquant la Méthode *de Max.* & *Min.* au commun diviseur, tous les *Maxima* & *Minima* que l'on y trouvera, appartiennent à la proposée *A*. Ainsi, dans notre Exemple, cette Méthode appliquée à *C* donne $2y = 0$; & substituant 0 au lieu de y dans la même *C*, on aura $x = b$ qui est un *Minima* de x pour *A*. Et comme $y = 0$ avec $x = b$ font une Solution du Problême *D*, *E*, on peut s'en servir pour trouver fort vîte les autres Solutions de ce Problême : de maniere que le principal *A*, *B*, se trouvant indéterminé, on peut toûjours tirer avantage de l'indétermination pour abreger le calcul.

La raison de cette Indétermination est, que la Méthode de *Max.* & *Min.* est fondée sur les racines égales & qu'il y en a une infinité, tantôt réelles & tantôt imaginaires, dans cette espece de Problêmes. Aussi l'on verroit en construisant les Courbes qu'expriment *A*, *B*, que toutes les appliquées de celle que fournit leur commun diviseur *C*, sont tirées des racines communes à ces deux égalitez, & que c'est en cela que consiste l'indétermination.

On peut voir aussi la raison du choix des véritables Solutions, en appliquant la Méthode de *Max.* & *Min.* à chacun

chacun des diviſeurs primitifs de A; il eſt facile ſur le détail qu'on vient de voir, de former une Régle qui abrége la recherche de ces diviſeurs.

Il y a d'autres difficultez ſur cette Methode, lorſque les Expoſans de la Propoſée ſont conçus en termes géneraux. Par exemple la Propoſée étant F,

$$F \ldots a^r x^n - y^e x^m - b^l = 0.$$

Et voulant trouver les *Max.* ou *Min.* de y, on aura l'Egalité G,

$$G \ldots n a^r x^{n-1} - m y^e x^{m-1} = 0.$$

Comparant ces deux Egalitez pour faire évanoüir y, la ſeconde donnera $y^e = \frac{n a^r x^{n-1}}{m x^{m-1}}$. Subſtituant cette valeur dans la premiere (en abregeant la fraction qu'on voit naître dans le réſultat) on trouvera la réduite H,

$$H \ldots m a^r x^n - n a^r x^n - m b^l = 0.$$

Cela poſé, ſi l'on fait $a=1$. $e=1$. $l=1$. $r=1$. $2m=1$. $n=1$. on verra qu'il faut avoir égard aux differentes valeurs dont les expoſans ſont capables, quand on ſe ſert de la Méthode de *Max.* & *Min.* Je ne propoſe ce petit Exemple que pour donner lieu de penſer aux difficultez dont il eſt un indice. La 4e Remarque du 5e Exemple & la 1re du 6e Exemple demandent encore de nouvelles Regles, lorſque les Expoſans & les Coëfficiens ſont exprimez en termes generaux, pour marquer les chûtes de l'Inconnuë, où il arrive que la détermination de ces Expoſans & de ces Coëfficiens donnent des Réduites ou Formules particulieres qui déſignent des exceptions de la Réduite generale : ce qui eſt ſouvent néceſſaire quand on applique l'Algebre à la Geometrie.

REMARQUE V. Il y a une Méthode pour faire évanoüir les Inconnuës, qui paroît differente de celle que nous avons examinée ici & qui eſt en uſage dans la combinaiſon des lieux. Il ne paroît dans cette Méthode ni dégagement ni ſubſtitution. On y multiplie les deux Egalitez que l'on compare, de maniere que le premier terme de l'Inconnuë qu'on veut faire évanoüir, ſoit le

même dans les deux Egalitez qui résultent de ces multiplications, afin que ce terme s'évanoüisse en prenant leur difference. Quand on y divise les Proposées ou les Résultantes, cela ne se fait ordinairement que pour abreger le calcul, & alors on rejette les Diviseurs. Il se trouve aussi que les inconveniens sont les mêmes que ceux que nous avons marquez icy dans la Méthode en question, quand on ne fait aucune division dans l'une ni dans l'autre, & quand on fait dans chacune des divisions équivalentes : en sorte qu'il est aisé d'appliquer les Remarques de ce Memoire à la Methode où les dégagemens & les substitutions se couvrent, pour en reconnoître les inconveniens & pour les éviter ; dans l'hypothêse que les Problêmes proposez n'ont que deux égalitez & deux inconnuës, & que ces égalitez dans leur premier état, ne sont affectées ni de fractions, ni de signes radicaux, selon ce que j'en ai dit au commencement de ce Memoire.





MESSIEURS DE LA SOCIETE' Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie l'Ouvrage qui ſuit, pour entretenir l'union intime qui doit être entr'elles, comme ne faiſant qu'un ſeul Corps, aux termes des Statuts accordez par le Roi au mois de Fevrier 1706.

OBSERVATIONS

Sur l'Evaporation qui arrive aux Liquides pendant le grand froid: Avec des Remarques ſur quelques effets de la Gelée.

PAR M. GAUTERON.

ON eſt accoûtumé à regarder l'Evaporation des Liquides comme un effet de la chaleur ou du mouvement de l'air qui les environne; mais il paroît ſurprenant qu'une cauſe toute oppoſée produiſe à peu près le même effet, & que les liquides perdent beaucoup plus de leurs parties pendant la plus forte gelée, que pendant que l'air eſt dans un état moyen entre le grand froid & le grand chaud, c'eſt-à-dire, quand il eſt dans l'état qu'on appelle temperé.

C'eſt pourtant ce que j'ai remarqué dans le temps de la gaande gelée de cet hiver. J'ai obſervé, que plus le froid a été grand, plus l'évaporation des liqueurs a été conſiderable; & que la glace même qui étoit formée depuis quelques jours, diminuoit conſiderablement, & au-

tant à proportion, que les liqueurs qui résistoient à sa gelée.

Ce fut le 12[e] Decembre 1708., que la gelée commença à Montpellier; le vent étoit au Nord ¼ de Nord-Est, (c'est ordinairement le vent de Nord, ou le vent de Nord un peu déclinant vers l'Est ou vers l'Oüest qui regne dans ce païs-cy pendant la gelée). Ce fut donc le 12. Decembre 1708, * le Thermometre ordinaire étant au 10[e] degré de sa graduation, & celui de M. Amontons au 53[e] degré quelques lignes, que j'exposai à la gelée à 6 heures du soir une once d'eau commune, que j'avois mise dans un gobelet de porcelaine. Elle fut totalement gelée dans la nuit; le lendemain à 8 heures du matin, je pesai le culot de glace, & je trouvai que l'eau en se gelant avoit diminué de 24 grains. Cette diminution étoit très-réelle, puisque la glace étant fonduë, l'eau se trouva encore diminuée de 12 grains, quelque précaution que je pusse prendre pour éviter cette seconde évaporation qui me paroissoit presque inévitable.

La même expérience repetée quelques jours de suite, me donna à peu près la même chose, avec cette difference pourtant, que l'évaporation étoit beaucoup plus grande quand la nuit étoit orageuse, ou que le vent de bise souffloit un peu fort.

Le dégel qui arriva pour lors ne me permit pas de pousser plus loin mes expériences; mais la gelée qui revint brusquement la nuit du 6 au 7 de Janvier me donna lieu de faire celles que je vais raporter.

J'exposai au grand froid la nuit du 7 au 8, de l'eau commune, de l'eau de vie, d'huile d'olive, d'huile de noix, d'huile de therebentine, & du mercure, une once de chacune de ces liqueurs; le Thermometre ordinaire étoit au 2[e] degré de sa graduation, & celui de M. Amontons à 51 degré 6 lignes; l'eau fut bien-tôt gelée, & diminua dans une heure de 6 grains, l'huile de noix diminua de 8, l'eau

* *L'un & l'autre Thermometre ont toûjours été dans un cabinet exposé au Nord, & les vitres du cabinet ont toûjours été fermées.*

de vie, & l'huile de therebentine, de 12 chacune dans le même temps d'une heure ; & l'huile d'olive & le mercure me parurent avoir plûtôt augmenté que diminué de leur poids. Le lendemain matin la diminution de l'eau gelée fut de 36 grains, celle de l'huile de noix qui ne gela point, de 40, celle de l'eau de vie & de l'huile de therebentine, qui résisterent aussi à la gelée, de 54 chacune. Le mercure & l'huile d'olive resterent à peu près au même état.

Il est inutile de marquer jour par jour l'évaporation que le grand froid a produite, puisque toutes choses étant d'ailleurs égales, l'évaporation a été à peu près la même ; le grand froid & les vents en ont toûjours produit une plus grande, que le moindre froid & le tems calme.

Il est necessaire de remarquer que la glace la plus ferme n'est pas exempte d'évaporation dans le grand froid, comme je l'ai déja dit. Elle a diminué de 36 grains depuis huit heures du matin jusqu'à une heure après midy, & de 36 grains encore depuis une heure après midy jusqu'à 8 heures du soir. L'évaporation de la nuit a été à peu près de la même quantité, c'est-à-dire, que la glace a souffert environ 100 grains de diminution dans 24 heures, quoiqu'elle puisse passer dans un corps assez solide ; & cela dans un temps qui semble plus propre à la resserrer qu'à enlever les moindres de ses parties. Toutes ces épreuves ont été faites sur une once de liqueur, poids de marc, & dans des gobelets qui avoient deux pouces de diametre.

Je remarquerai pourtant que la nuit du 10 au 11 de Janvier a été la plus froide qu'on ait jamais sentie dans ce païs-cy : la liqueur du Thermometre ordinaire plongea tout-à-fait dans la boule ; celui de M. Amontons étoit au 51 degré 1 ligne, qui est presque le grand froid du 8e climat : dans les maisons les mieux étoffées on sentoit un froid très-cuisant dont on avoit peine à se garentir ; & peu de personnes pûrent dormir d'un bon somme, malgré toutes les précautions qu'elles avoient pû prendre pour se mettre à couvert du grand froid.

L'évaporation des Liquides pendant cette nuit fut fort considerable; l'eau commune diminua de 48 grains, l'huile de noix de 54, & l'huile de therebentine & l'eau de vie de 72.

Voilà en abregé ce que j'ai observé sur l'évaporation des Liquides pendant le grand froid; & voici ce que j'ai remarqué sur la Gelée.

1°. Que la superficie de l'eau qui se gele paroît toute ridée, & que ces rides forment tantôt des lignes paralleles, & tantôt des raïons qui paroissent aller du centre à la circonference; & quand on la fait geler dans un vaisseau de verre cilindrique, j'ai observé qu'il se forme tout autour du cilindre, des tuïaux fistuleux disposez de bas en haut, & qui paroissent aller de la circonference au centre.

2°. Que l'eau couverte d'huile par dessus & par les côtez, a gelé environ demie heure plus tard que l'eau exposée à l'air sans précaution, & en se gelant elle a formé un champignon de glace relevé d'un pouce au dessus de la superficie de l'huile.

3°. Que l'huile de noix a garanti l'eau d'une gelée médiocre, ce que l'huile d'olive n'avoit pas pû faire.

4°. Que l'eau chaude & prête à boüillir, a gelé plus tard d'environ demie heure que l'eau naturelle.

5°. Que l'eau de vie, l'huile de noix, & l'huile de therebentine n'ont point gelé du tout

6°. Que pendant la gelée, quoique le ciel fut fort serein, le soleil paroissoit un peu pâle.

7°. Que les Orangers & les Oliviers ont perdu leurs feüilles & leurs branches : que la plus grande partie de ces arbres sont morts jusqu'à la racine; & ce que l'on n'avoit jamais vû dans ce Païs-cy, les Lauriers, les Figuiers, les Grenadiers, les Jasmins, les Yeuses, & quelques Chênes même, ont eu le même sort. Le Rhône a été gelé jusqu'à la hauteur de 12 pieds par les couches de glace qui s'y sont amassées; & l'Etang de Thau, ordinairement fort orageux & qui communique à la Mer par

un court & large canal, s'est pris de bout-à-bout, & plusieurs personnes sont allées des Bains de Balaruc & du lieu des Bousigues jusqu'à Sette par-dessus la glace; route inconnuë à nos peres, & qui le sera peut-être long-temps à nos neveux.

8°. Enfin, que le dégel du 23 Janvier comme celui du 26 de Fevrier ont été suivis d'un Rhume Epidemique dont presque personne n'a été exempt.

Tous ces faits doivent-être déduits de la même cause, c'est-à-dire du changement qui arrive à l'air pendant la gelée. Voici suivant moi quel est ce changement.

Dans l'hiver le Soleil ne jette que des raïons obliques sur la Terre, & cette obliquité de raïons par raport à la partie de la Terre qui a l'hiver, fait qu'ils y occupent une plus grande étenduë, & qu'ils se reflechissent moins sur eux-mêmes. Il suit de-là, que la superficie de la Terre qui a l'hiver, doit-être moins échauffée, & que la matiere étherée qui a le plus de force, doit se mouvoir du côté où le Soleil est le plus perpendiculaire à la Terre. Il ne doit donc rester à la partie de la Terre qui a l'hiver, que la matiere étherée la moins propre au mouvement.

Or tout le monde convient, que la matiere étherée est la cause du mouvement des liquides, & que l'air même ne peut recevoir son mouvement d'ailleurs. Donc tous les liquides doivent rester dans un état d'engourdissement ou d'épaississement, dès que cette matiere perd une partie de sa force. L'air par conséquent doit être plus condense en hiver que dans aucune autre saison de l'année.

Mais on est convaincu par plusieurs expériences, que l'air contient un sel que l'on croit être d'une nature approchant de celle du nitre. Cela étant, & l'épaississement de l'air supposé, je dis que les molecules de ce nitre doivent se raprocher & grossir par la condensation de l'air, comme au contraire l'augmentation de mouvement de ce fluide doit les diviser. Si la même chose arrive à toutes

les liqueurs qui ont diſſous quelque ſel, ſi la chaleur du liquide tient ce ſel exactement diviſé, & ſi la fraîcheur d'un lieu ſouterrain, ou de la glace donne lieu aux molecules du ſel diſſous de ſe raprocher, de groſſir & de ſe criſtalliſer; pourquoi l'air capable de rarefaction & de condenſation, ſeroit-il exempt de cette loy generale? Pour être plus ſubtil, en eſt-il moins de la nature des autres fluides?

Si le nitre de l'air eſt plus groſſier pendant le grand froid, comme on n'en ſçauroit diſconvenir, il doit avoir véritablement moins de viteſſe; mais le produit de ſa maſſe augmentée, par la viteſſe qui lui reſte, lui doit donner pourtant une plus grande quantité de mouvement.

Il n'en faut pas davantage pour faire agir ce ſel avec plus de forces contre les parties des fluides, & je crois que c'eſt-là la véritable cauſe de la grande évaporation qu'ils ſouffrent pendant le grand froid.

Cependant ce nitre aërien ne doit pas empêcher les liquides de ſe changer en glace; il doit au contraire en hâter médiatement la concretion. Car ce n'eſt pas l'air & le nitre qu'il contient, qui donne le mouvement aux liquides, c'eſt la matiere étherée. C'eſt donc de la moindre force de celle-cy que dépend la perte ou la diminution de mouvement des autres. Or la matiere étherée déja foible pendant l'hyver, doit encore perdre beaucoup de ſa force en agiſſant contre l'air condenſé, & chargé de plus groſſes molecules de ſel, la matiere étherée doit donc s'affoiblir encore pendant le grand froid, & être moins en état d'entretenir le mouvement des liquides. En un mot, on peut regarder l'air pendant la gelée, comme la glace chargée de ſel dont on ſe ſert pour faire glacer certaines liqueurs pendant l'été. Ces liqueurs gelent vraiſemblablement par la diminution de mouvement de la matiere étherée qui agit contre la glace & le ſel mêlez enſemble, & l'air tout brûlant qu'il eſt dans ce temps-là, ne peut point empêcher cette concretion.

On dira peut-être que les Liquides contiennent beaucoup

coup de parties d'air, lesquelles sont dans un état de compression dix fois plus fort dans les liquides, que dans l'air libre, suivant les Observations de M. de Mariotte de l'Académie Royale des Sciences ; que les ressorts de l'air ainsi comprimez se débandent pendant la gelée par la diminution & mouvement du liquide ; & que c'est à l'explosion de ces ressorts, d'autant plus forte qu'ils sont plus comprimez, qu'on doit raporter l'évaporation des parties des liquides pendant la gelée.

Je ne disconviens pas que les liquides contiennent beaucoup d'air, que cet air est plus comprimé dans les liquides que dans l'air libre ; que la gelée donne occasion à ses ressorts de se débander, ni que ses ressorts se débandent avec plus de force à cause de l'état de compression dans lequel ils sont ; puisque je crois que ce *débandement* des ressorts de l'air produit la rarefaction & la legereté de la glace, aussi-bien que les bulles & les fistules dont j'ai parlé dans mes Remarques. Mais j'ai peine à me persuader, que l'action de ces ressorts soit la cause de l'évaporation, quand je considere que les liquides qui gelent & ceux qui résistent à la gelée, souffrent une évaporation proportionnée à la tenuité de leurs parties, & que la glace formée depuis quelques jours diminuë autant ou plus que l'eau qui commence à se geler. Dans les liquides qui ne gelent point, le *débandement* des ressorts de l'air ne doit pas être fort considerable ; & dans la glace formée depuis quelques jours, ces ressorts doivent avoir fait tout leur jeu, & n'être plus capable d'aucune action.

J'ai remarqué que quand la glace commence à se former, il paroît à sa superficie des rides, disposées quelquefois en lignes paralleles, & quelquefois en manieres de rayons : on voit au-dessous de cette superficie un grand nombre de petites parties gelées en forme d'aiguilles attachées par la pointe, & qui forment des especes d'entonnoirs, dont le bout le plus délié est tourné vers la superficie de l'eau. On remarque très-distinctement ces petits entonnoirs dans une bouteille cilindrique, lorsque

le liquide qu'elle contient est entierement gelé.

Je dis que cette diſpoſition de la glace qui commence à ſe former, favoriſe la ſortie de l'air qui eſt contenu dans l'eau & dont les reſſorts commencent à ſe débander, & ſemble défendre en même tems l'entrée à l'air extérieur qui pourroit aller prendre la place de celui qui ſort du liquide. L'air qui reſte dans l'eau qui ſe gele doit donc ſe dilater plus librement, n'étant plus comprimé par l'air exterieur ; c'eſt de là vrai-ſemblablement que vient la rarefraction & la legereté de la glace, mais non pas l'évaporation de ſes parties.

Je ſerois trop long ſi j'allois expliquer en détail tout ce que j'ai obſervé ſur la gelée, outre qu'il eſt très-aiſé de le déduire des principes que j'ai déja poſez. On voit bien par exemple, que l'huile d'olive a ſes parties plus branchuës que l'huile de noix, que c'eſt à cauſe des branches qui en tiennent exactement les parties, que le nitre aërien ne ſçauroit les enlever. Que l'huile de noix a ſes parties plus groſſes, mais moins branchuës que celles de l'huile d'olive ; que c'eſt pour cela que l'huile de noix eſt plus peſante & qu'elle ſéche plus vîte. D'ailleurs l'huile de noix doit avoir ſes parties liſſes, polies & qui ne ſe touchent que par peu de points de leur ſuperficie ; ce qui fait que la matiere ètherée, toute foible qu'elle eſt, peut les mouvoir aiſément & empêcher cette huile de ſe geler ; mais ces parties ne ſont pas aſſez fortes pour réſiſter à l'impulſion du nitre aërien qui les enleve. On voit auſſi que la ténuité des parties de l'eau de vie & de l'huile de therebentine, favoriſe leur fluidité & leur évaporation ; & pour les parties globuleuſes & peſantes du mercure, il eſt clair qu'il faudroit un agent plus fort que le nitre de l'air pour pouvoir les ſéparer de leur maſſe.

Puiſque la matiere ètherée entretient toûjours la fluidité de l'huile de noix, ce n'eſt pas merveille ſi l'eau qui en eſt couverte, réſiſte à la gelée. L'huile de noix eſt pour lors comme une eſpece de filtre qui donne entrée à une grande quantité de cette matiere, laquelle ſuffit à

entretenir la fluidité de l'eau. Si l'huile d'olive défend l'eau de la gelée pendant un peu de temps, c'eſt auſſi à cauſe que cette huile, qui ne fait que s'épaiſſir par le froid, contient dans ſes branches un peu de cette matiere éthe-rée, ce qui fait que l'eau couverte d'huile d'olive réſiſte un peu plus au froid que ſi elle étoit privée de ce petit ſecours. Si l'eau chaude a gelé demi-heure plus tard, c'eſt qu'il a fallu plus long-temps pour y faire perdre le mouvement que le feu y avoit imprimé. Et ſi pendant la gelée le Soleil paroît plus pâle, qui ne voit que l'épaiſſiſſement de l'air, & la groſſiereté du nitre qu'il contient, doivent faire réflechir beaucoup de rayons, & lés empêcher de penetrer juſqu'à nous ? Enfin s'il paroît une eſpece de gangrene aux parties des arbres & des plantes qui ont été gelées, cette pourriture ne doit-elle pas être l'effet d'un ſel corroſif qui en a corrompu la tiſſure ? Il y a tant de raport entre cette gangrenne qui arrive aux plantes par la gelée & celle qui arrive aux parties des animaux, qu'elles doivent avoir une cauſe fort analogue, les humeurs corroſives brûlent les parties des animaux, le nitre aërien plus groſſier qu'à l'ordinaire fait le même effet ſur les parties des Plantes, *Penetrabile frigus adurit.*

Je finirai ce Memoire en faiſant quelques réflexions ſur les Rhumes Epidemiques qui ſuivirent le dégel du 23 Janvier & du 26 Fevrier de cette année. Tant de perſonnes en furent ſaiſies tout à la fois, qu'on ne peut raporter cette maladie qu'à une cauſe generale qui ait agi en même tems ſur tous les hommes. Nous trouverons cette cauſe dans l'air que l'on reſpira après le dégel : ſon nitre avoit été déja diviſé, & avoit répris à peu près ſa forme naturelle. Je m'explique : l'air qui eſt porté dans les poûmons par la trachée artere, remplit les veſſicules dont ce viſcere eſt composé ; le ſang ne tombe jamais dans ces veſſicules que par une diſpoſition contre nature ; cependant le ſang de la veine du Poûmon plus animé & plus vermeil que celui de l'artere, marque qu'il a reçû un changement conſiderable par l'air de la reſpiration ; mais

l'air n'agit pas ſur le ſang immédiatement, il faut donc que le tiſſu des veſſicules pulmonaires ſoit une eſpece de filtre qui ſépare la partie nitreuſe de l'air, & que ce ſoit cette partie nitreuſe qui anime le ſang de la veine pulmonaire.

S'il arrive donc que le nitre de l'air ſoit plus groſſier qu'à l'ordinaire, comme nous avons prouvé qu'il le doit être pendant le grand froid, je dis que pour lors il n'aura plus la même proportion avec le filtre qui devoit le ſéparer; qu'il ne s'en mêlera qu'une petite quantité avec le ſang; & cela joint avec le froid exterieur fera que ce fluide reſtera dans une eſpece d'engourdiſſement. Dans cet état, & les voyes de la tranſpiration n'étant pas libres, le ſang doit retenir beaucoup de parties ſereuſes & limphatiques qui demeureront envelopées dans ſes parties ſulphureuſes, & dont il ne pourra ſe débaraſſer que par une fonte generale. Cette fonte d'humeurs doit arriver par le dégel. Dans ce tems-là le nitre ſe diviſe en petites molecules, une grande quantité de ce ſel ſe mêle bruſquement avec le ſang, l'anime & le fermente; il n'en faut pas davantage pour faire ſéparer tout à coup une grande quantité de limphe & de ſéroſité qui ſe jette ſur toutes les glandes du corps & produit le mal de tête, le dégoût, l'*enchifrenure*, la toux, la crudité & l'abondance des urines, la laſſitude qu'on appelle ſpontanée, & quelquefois un peu de fievre.

Le Rhume que je viens de décrire eſt fort different de celuy qui arrive pendant le grand froid; dans celuy-cy les humeurs circulent avec peine, & par leur épaiſſiſſement donnent occaſion à quelques parties ſereuſes de s'en ſéparer, ce qui produit la roupie & la toux, qui ſont ſouvent accompagnées d'un larmoyement involontaire, parce que les points lacrymaux ſe trouvent quelquefois bouchez par l'épaiſſiſſement de la mucoſité qui ſe ſépare dans le nez. Auſſi doit-on traiter ces rhumes d'une maniere bien differente; les rhumes de froid ſe gueriſſent par des remedes qui peuvent donner de la fluidité aux

humeurs; ceux qui ſont enchiffrenez pendant le grand froid, gueriſſent plus promptement par le parfum de Karabé que par aucun autre remede que je connoiſſe, ſans doute à cauſe de la quantité de ſel & de ſouffre volatil que cette reſine contient. Le vin & l'eau de vie brûlez avec du ſucre, le Thé, le caffé, & le chocolate conviennent par la même raiſon ; & j'ai gueri pluſieurs rhumes cet hiver très-violens & très-opiniâtres avec des boüillons de poulet, dans leſquels je faiſois boüillir pendant un quart-d'heure, une once de chair de ſerpent ſechée avec une poignée de feüilles de creſſon,

Les Rhumes du dégel doivent être traitez d'une maniere toute differente. Il faut empêcher la trop grande fonte des humeurs par les émulſions cuites, les crêmes de ris, de gruau, d'orge, par l'eau de ſon, l'eau roſe & le jaune d'œuf avec le ſucre candi, par le petit lait & par le lait même. Les Narcotiques & la ſaignée conviennent aux deux eſpeces de rhume, ſur-tout quand les malades ſont fatiguez de la toux, & que l'on craint quelqu'inflammation de poitrine.

Voilà quelle eſt l'idée que j'ai de la gelée & de ſes effets. De l'obliquité du Soleil par raport à la partie de la Terre qui a l'hiver, j'ai conclu que la matiere étherée qui répond à cette partie de la Terre, doit avoir moins de force; de-là, la condenſation des fluides, de l'air même, & l'augmentation des molecules du nitre. De cette augmentation l'évaporation des liquides, la mortification des plantes & l'épaiſſiſſement du ſang. Tout cela paroît aſſez ſimple & puiſé dans la Nature même : cependant je ſuis très-perſuadé qu'il faut faire encore beaucoup d'experiences ſur le même ſujet pour avoir quelque choſe de plus certain. Si le Syſtême eſt veritable, elles s'y rangeront toutes comme autant de conſéquences néceſſaires, & pour lors on pourra ſe flatter qu'on a fort approché de la verité.

Fin des Memoires.

FAUTES A CORRIGER.

Dans 1708.

P*Age* 114. *lig.* 19. *&* 20. *au lieu de* résistances actuelles *lisez* résistances en raison des vitesses actuelles.

Pag. 117. *lig.* 1. *au lieu de* qu'en faisant *lisez* ensorte qu'en faisant



A PARIS.

De l'Imprimerie de JEAN-BAPTISTE COIGNARD Fils, Imprimeur du Roi.